

Оценка эффективности инвестиционных проектов

Оптимальные инвестиционные портфели с учетом групповых выплат

Е. М. БРОНШТЕЙН, Г. Р. МУСЛИМОВА

Аннотация. Рассматривается задача формирования оптимального инвестиционного портфеля, состоящего из инвестиционных проектов, когда предусмотрены потоки платежей по некоторым группам проектов. Учтена возможность заимствования средств. Исследована эффективность применения эволюционного алгоритма и упрощенного метода ветвей и границ в сравнении с ранее рассмотренными точными алгоритмами.

Ключевые слова: *оптимальный портфель, инвестиционный проект, метод ветвей и границ, эволюционный алгоритм.*

Введение

Задачи оптимизации инвестиционных решений занимают важное место в математической теории финансов. В работе рассматривается задача формирования портфеля, состоящего из инвестиционных проектов. Впервые задачи формирования инвестиционного портфеля были поставлены в [1], в [2] для их решения применены методы линейной оптимизации. В работах [3, 4] и ряде других сформулированы задачи формирования оптимальных портфелей при различных предположениях, где в качестве целевой функции принимается чистая приведенная (NPV) или накопленная (NFV) стоимость портфеля. В [5] рассмотрены аналогичные задачи, где в качестве целевой функции принимается модифицированная рентабельность, при этом учитываются и другие характеристики проекта, в [6] — время финансирования портфеля взаимозависимых проектов.

Под (дискретным) инвестиционным проектом (потоком платежей) понимается вектор $C = (c_0, c_1, \dots, c_n)$, компонента c_k которого — это платеж (при $c_k < 0$) или возврат средств (при $c_k > 0$) в момент времени k . Предположим, что инвестору предложен набор проектов, из которых необходимо выбрать несколько инвестиционных проектов для финансирования. Предполагается, что в качестве альтернативного используется вложение средств с фиксированным годовым коэффициентом накопления. В работах [7, 8] поставлена и проанализирована задача формирования оптимального портфеля инвестиционных проектов, если для некоторых групп проектов предусмотрены групповые платежи. Например, необходим офис, если финансируется хотя бы один проект в некотором регионе. Другой пример связан с приобретением специального транспорта. В [7, 8] предполагалось, что для групп проектов могут осуществляться только платежи. В то же время в приведенных примерах офис

или транспортное средство на некоторое время может сдаваться в аренду, а это приведет и к поступлениям средств.

1. Постановка задачи

Имеется набор инвестиционных проектов $C_1, C_2, \dots, C_m$ ($C_i = (c_{i0}, c_{i1}, \dots, c_{in})$), из которых инвестору необходимо выбрать некоторые для финансирования. Будем считать, что сроки выполнения всех проектов совпадают — при необходимости проекты можно дополнить нулевыми платежами. При этом предполагается возможность зависимости между некоторыми проектами, т. е. выбор проекта для включения в портфель зависит от того, с какими проектами он связан. Зависимость можно представить в виде ориентированного графа, где вершинам соответствуют проекты, а ребра определяют зависимость между проектами таким образом, что для включения в портфель некоторого проекта необходимо включение и его предшественников.

Пусть выделены некоторые подмножества проектов $U_j \subset \{1, \dots, m\}$ ($j = 1, \dots, s$), для каждого из которых определен вектор платежей $P_j = (P_{j0}, P_{j1}, \dots, P_{jn})$, реализуемый при финансировании хотя бы одного проекта из множества U_j . Множества U_j могут пересекаться. Также для проектов заданы годичный коэффициент накопления по банковским вкладам в течение n лет (за год вклад возрастает в q раз) и ставка $r > q$, под которую инвестор при необходимости занимает средства, т. е. долг за год возрастает в r раз. Начальный капитал инвестора обозначим через F_{-1} .

Необходимо выбрать для финансирования проекты, которые обеспечивают максимально возможный капитал на конечный момент времени.

Для формализации введем следующие обозначения:

F_k — капитал инвестора (или долг, если эта величина отрицательная) в момент k после всех выплат;

x_i — булевская переменная, равная 1, если i -й проект включается в портфель, и 0 в противном случае;

y_j — булевская переменная, равная 1, если в портфель включается хотя бы один проект из множества U_j , и 0 в противном случае.

Имеют место следующие ограничения:

$$y_j \geq x_i \text{ при } i \in U_j, \quad (1)$$

$$y_j \leq \sum_{i \in U_j} x_i \text{ при } i \in U_j, \quad (2)$$

$$x_i \geq x_k, \quad (3)$$

если для выполнения k -го проекта должен выполняться i -й проект.

Неравенства (1) и (2) в совокупности означают, что $y_j = 1$ тогда и только тогда, когда $x_i = 1$ хотя бы для одного $i \in U_j$.

Неравенство (3) означает, что из $x_k = 1$ следует, что $x_i = 1$.

$$\text{Имеем: } F_0 = F_{-1} + \sum_{i=1}^m x_i c_{i0} + \sum_{j=1}^s y_j p_{j0}.$$

Если $F_0 \geq 0$, то сумма на счете возрастает за год в q раз, с учетом платежей в момент времени 1 получим:

$$F_1 = qF_0 + \sum_{i=1}^m x_i c_{i1} + \sum_{j=1}^s y_j p_{j1}.$$

Если $F_0 \leq 0$, то долг за год возрастет в r раз, откуда имеем:

$$F_1 = rF_0 + \sum_{i=1}^m x_i c_{i1} + \sum_{j=1}^s y_j p_{j1}.$$

Если значение F_k ($k = 1, \dots, n-1$) известно, то аналогично можно получить:

$$F_{k+1} = \begin{cases} qF_k + \sum_{i=1}^m x_i c_{i(k+1)} + \sum_{j=1}^s y_j p_{j(k+1)} & \text{при } F_k \geq 0; \\ rF_k + \sum_{i=1}^m x_i c_{i(k+1)} + \sum_{j=1}^s y_j p_{j(k+1)} & \text{при } F_k \leq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Необходимо найти значения $x_i, y_j \in \{0, 1\}$, при которых величина $NFV = F_n$ является максимальной.

Возможна ситуация, когда заимствование средств невозможно. В этом случае необходимо обеспечить неразорение инвестора в любой момент времени. Условие неразорения имеет вид

$$F_k \geq 0 \text{ при } k = 0, 1, \dots, n. \quad (5)$$

При выполнении условия (5) в условии (4) актуальна только верхняя строка.

Задача (1)–(5) является задачей булевского (нелинейного) программирования. Отметим, что она всегда допустима: значения $x_i = 0, y_j = 0$ удовлетворяют всем ограничениям.

Задача (1)–(4) сводится к задаче частично булевского линейного программирования, которая также всегда допустима. Для этого введем вспомогательные переменные V_i ($i = 0, \dots, n$). Заметим, что поскольку $r > q$, из (4) следует равенство:

$$F_{k+1} = \max \left\{ qF_k + \sum_{i=1}^m x_i c_{i(k+1)} + \sum_{j=1}^s y_j p_{j(k+1)}, rF_k + \sum_{i=1}^m x_i c_{i(k+1)} + \sum_{j=1}^s y_j p_{j(k+1)} \right\}.$$

Задача принимает следующий вид:
Найти числа:

$$\begin{aligned} x_1, \dots, x_m &\in \{0,1\}; \\ y_1, \dots, y_s &\in \{0,1\}; \\ F_1, \dots, F_n, V_1, \dots, V_n &\in R, \end{aligned}$$

такие что:

$$\begin{aligned} y_j &\geq x_i \text{ при } i \in U_j; \\ y_j &\leq \sum_{i \in U_j} x_i \text{ при } i \in U_j \quad x_i \geq x_k \end{aligned}$$

для зависимых проектов;

$$V_{k+1} \leq qF_k \text{ при } k = 0, 1, \dots, n-1;$$

$$V_{k+1} \leq rF_k \text{ при } k = 0, 1, \dots, n-1;$$

$$F_k = V_k + \sum_{i=1}^m x_i c_{ik} + \sum_{j=1}^s y_j p_{jk}$$

при $k = 0, \dots, n$; $F_n \rightarrow \max$.

При этом $V_0 = F_{-1}$.

2. Численные методы решения

1. Для решения задачи (1)–(4) применялись метод ветвей и границ и метод отсечений (Гомори) [9–11]. Эти методы дают точное решение, но при этом являются трудоемкими. В [12] эти методы применялись для решения сформулированной задачи. Вычислительный эксперимент показал, что при малом временном горизонте (до 5) применение метода Гомори для получения точного решения менее эффективно по сравнению с методом ветвей и границ, при временных горизонтах 8–9 — наоборот.

2. Применялась эволюционная стратегия [13, 14] простейшего вида ((1 + 1) – EA) по классификации работы [14]).

Для ее описания используем следующие термины:

- *Особь (индивидуум)* — инвестиционный портфель.
- *Хромосома* — приоритетный список проектов.
- *Популяция* — в данном алгоритме состоит из одной особи.
- *Воспроизведение (оператор репродукции)* — репродукция особи, т. е. формирование портфеля на основе текущего приоритетного списка.
- *Отбор (оператор селекции)*. Применяется так называемый элитный отбор, т. е. из всех особей отбираются особи с наибольшим возможным капиталом на конец временного горизонта.
- *Оператор мутации*. Проекты в приоритетном списке меняются местами случайным образом. В результате получается новая хромосома.

Проекты ранжируются по *NPV* (чистой приведенной стоимости) — первоначальная хромосома. На основе приоритетного списка формируется портфель (популяция), лучший портфель сохраняется (оператор селекции). Если далее улучшения не происходит, список перетасовывается случайным образом (мутация) и опять формируется популяция. Алгоритм заканчивает свою работу, если лучший портфель не улучшается заданное число раз.

3. Упрощенный метод ветвей и границ. Применялся следующий эвристический прием, адекватный структуре задачи. Применим метод ветвей и границ к множеству проектов U_1 , в результате получим портфель Π_1 . Затем применим тот же метод к множеству проектов U_2 при условии, что в портфель уже вошли проекты из Π_1 . В результате получим портфель $\Pi_2 \supset \Pi_1$. Продолжая этот процесс, после $(s + 1)$ шагов получим портфель Π (проекты, не входящие ни в одно из множеств U_j , анализируются на последнем шаге). Такой прием достаточно эффективен, если множества U_j не являются ни слишком большими, ни слишком малыми и их объединение совпадает с множеством всех проектов. Например, при непересекающихся множествах U_j равного размера сложность вычислений можно оценить числом

$$s \left(\frac{n}{s} \right)! \ll n!,$$

где s — число множеств.

3. Численный эксперимент

Для анализа эффективности описанных алгоритмов был проведен численный эксперимент. При этом были заданы следующие параметры:

- $F_{-1} = 100$ — начальный капитал инвестора;
- C_i и P_j — платежи по проектам — генерировались случайно в диапазоне от -150 до 150 ;
- число подмножеств U_j задавалось в зависимости от количества проектов от 3 до 8 (3 для 5 проектов, 4 для 10 проектов, 5 для 15 и т. д.), их состав генерировался случайно;
- ставка банковского вклада 4 %;
- ставка банковского кредита 7 %;
- зависимость проектов (условие (4)) не предполагается.
- для метода ветвей и границ проекты упорядочивались по убыванию чистой приведенной стоимости с учетом групповых платежей.
- для эволюционной стратегии условием останова было достижение 50 неулучшений популяции.

Для каждого эксперимента было сгенерировано 100 задач.

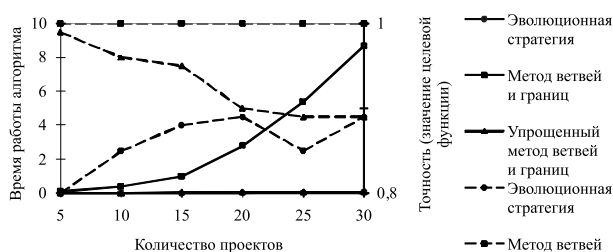


Рис. 1. Результаты вычислений для проектов продолжительностью 4 года

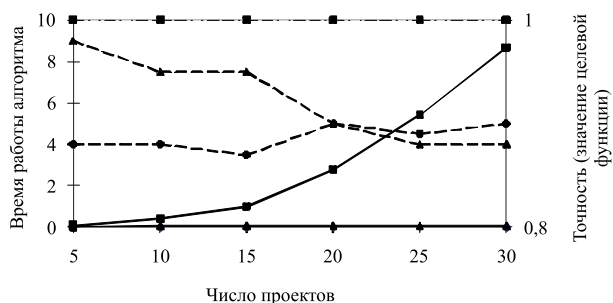


Рис. 2. Результаты вычислений для проектов продолжительностью 5 лет

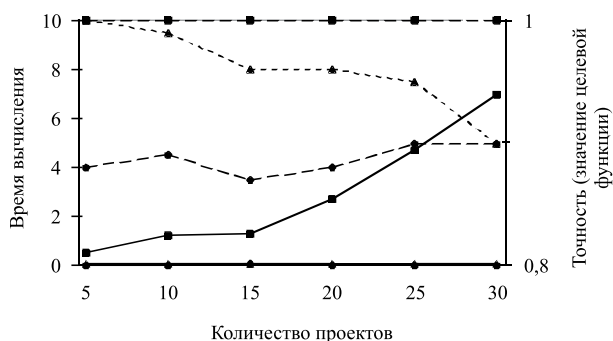


Рис. 3. Результаты вычислений для проектов продолжительностью 6 лет

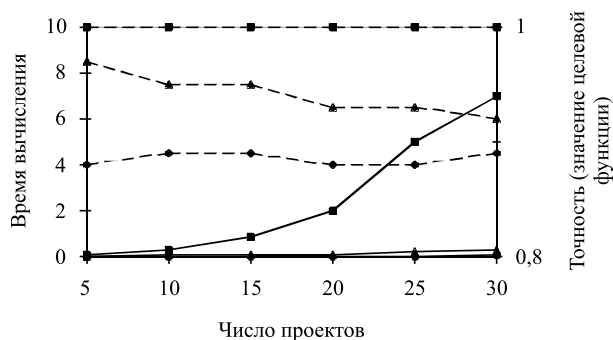


Рис. 4. Результаты вычислений для проектов продолжительностью 7 лет

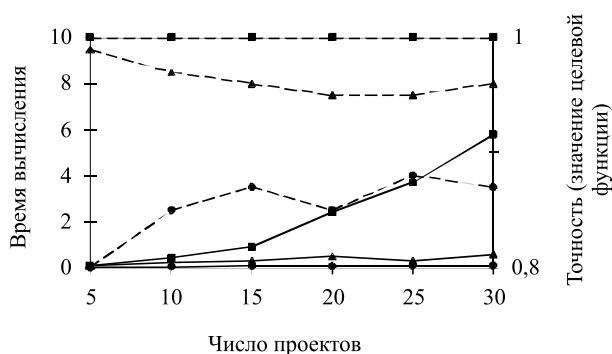


Рис. 5. Результаты вычислений для проектов продолжительностью 8 лет

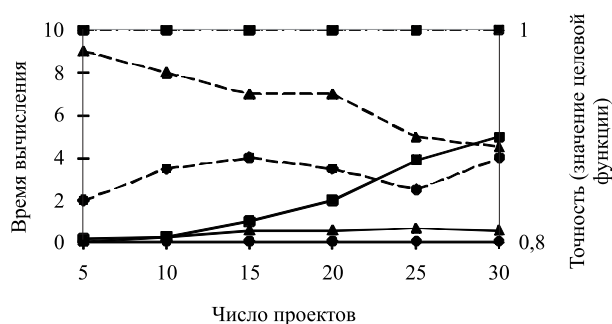


Рис. 6. Результаты вычислений для проектов продолжительностью 9 лет

Результаты численного эксперимента в зависимости от продолжительности проектов и их числа представлены на графиках (рис. 1–6), где сплошные линии отображают временную зависимость, а пунктирные — точность. Точность метода ветвей и границ принята за 1, время измерялось в относительных единицах.

Заключение

В работе поставлена задача формирования оптимального инвестиционного портфеля, в которой учтен ряд дополнительных факторов. Рассмотрены эвристические методы решения задачи. Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

- трудоемкость вычислений слабо зависит от длительности проектов, но существенно зависит от числа проектов;
- упрощенный метод ветвей и границ и эволюционная стратегия показали хорошие результаты в соотношении время работы / точность, при этом первый метод показал в целом более высокую точность при практически тех же временных затратах.

Литература

1. Lorie J. H., Savage I. J. Three Problems in Rationing Capital // Journal of Business. 1955. Vol. XXVIII. № 4. PP. 229–239.
2. Weingartner H. M., Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems. Chicago: Markham publ., 1967.
3. Виленский П. Л., Лившиц В. Н., Смоляк С. А., Оценка эффективности инвестиционных проектов. М.: Дело, 2002.
4. Бронштейн Е. М., Спивак С. И., Как сформировать оптимальный портфель // Рынок ценных бумаг. 1997. № 14.
5. Бронштейн Е. М., Оптимальные инвестиционные портфели // Системное моделирование социально-экономических процессов. М.: ЦЭМИ РАН, 2004.
6. Бронштейн Е. М., Олейник Т. Н., Задача календарного планирования портфеля инвестиционных проектов // Информационные технологии. 2007. № 3.
7. Balinski M. L. On a Selection Problem // Management Science. 1970. Vol. 17. № 11.
8. Mamer J. W., Shogan A. W. A Constrained Capital Budgeting Problem with Applications to Repair Kit Selection // Management Science. 1987. Vol. 33. № 6.
9. Деордица Ю. С., Нефедов Ю. М., Исследование операций в планировании и управлении: Учебное пособие. Киев: Выща школа, 1991.
10. Корбут А. А., Сигал И. Х., Финкельштейн Ю. Ю. Об эффективности комбинаторных методов в дискретном программировании. М.: Наука, 1979.
11. Сигал И. Х., Иванова А. П. Введение в прикладное дискретное программирование. М.: Физматлит, 2007.
12. Бронштейн Е. М., Муслимова Г. Р. Формирование оптимальных портфелей, состоящих из инвестиционных проектов, с учетом групповых выплат // Информационные технологии. 2010. № 5 (в печати).
13. Батищев Д. Ю. Генетические алгоритмы решения экстремальных задач: Учебное пособие / Под ред. Я. Е. Львовича. Воронеж: Воронежский гос. техн. ун-т; Нижегородский ун-т, 1995.
14. Борисовский П. А., Еремеев А. В. О сравнении некоторых эволюционных алгоритмов // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2.

Бронштейн Ефим Михайлович. Профессор кафедры Уфимского государственного авиационного технического университета. Д. ф.-м. н. Окончил Уфимский авиационный институт в 1968 г. Количество печатных работ: свыше 250, в том числе одна монография. Область научных интересов: выпуклый анализ, финансовая математика, оптимизация, теория риска, задачи маршрутизации. E-mail: bro-efim@yandex.ru

Муслимова Галия Рамилевна. Аспирант кафедры Уфимского государственного авиационного технического университета. Окончила Уфимский государственный авиационный технический университет в 2006 г. Количество печатных работ: 6. Область научных интересов: финансовая математика, дискретная оптимизация. E-mail: galikhanova_gr@mail.ru