

# Метод разметки стохастического временного ряда\*

С. И. КОЛЕСНИКОВА, А. Н. МЕРТВЕЦОВ

**Аннотация.** В работе рассматривается задача распознавания состояний сложного динамического объекта (без точного аналитического описания). Дается метод разметки стохастического временного ряда, приводится алгоритм разметки, реализующий метод. Метод разметки используется для формирования признаков формы состояний динамического объекта и распознавания состояний. Представлены результаты программного моделирования и решения прикладной задачи.

**Ключевые слова:** стохастический временной ряд, разметка временного ряда, авторегрессионная зависимость, структурная идентификация, качество алгоритма.

## Введение

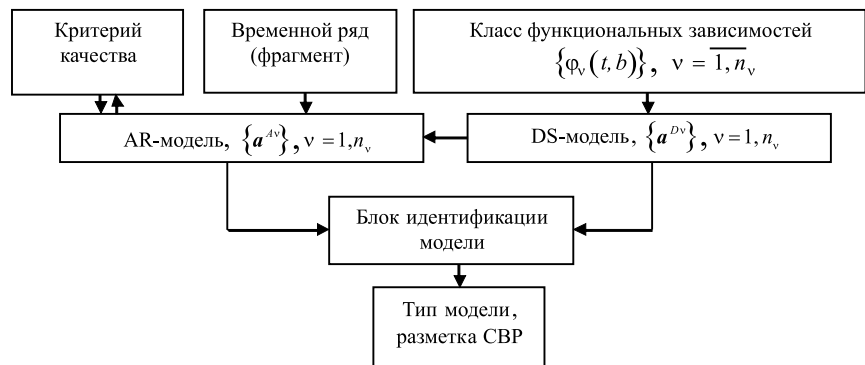
Целью работы является исследование подхода к решению задачи распознавания состояний сложного объекта управления, динамика которого описывается сопровождающим его функционирование стохастическим временным рядом (СВР), на основе решения задачи разметки СВР [1]. Под сложным объектом будем понимать динамический объект (ДО), не имеющий строгого аналитического описания и/или имеющий сложную нелинейную модель с неизвестными возмущениями.

Задача актуальна в системах управления, в системах автоматического обнаружения знаний в базах данных, в системах принятия решения при сравнении и классификации слабоформализованных динамических объектов.

В работе [1] изложен алгебраический подход [2] к задаче построения обучаемых алгоритмов выделения трендов как задаче синтеза алгоритмов, описывающих отображения из пространства начальных информации (значения стохастического временного ряда) в пространство финальных информации (множество конечных наборов меток), метки интерпретируются как слова в заданном алфавите. В его основе лежит идея разметки точек временного ряда аксиомами (условиями) или некоторыми правилами, которым должны удовлетворять одна или более точек ряда.

Если набор точек  $\{y_i\}$  удовлетворяет аксиоме  $A$ , то говорят, что аксиома  $A$  выполняется для этих точек.

Алгебраический подход для анализа временных рядов изучался также в [3–5], однако общий формализованный подход к решению задачи распознавания образов на стохастических временных рядах отсутствует. В работе [5] на ряде модельных примеров по-



**Рис. 1.** Структурная схема установления соответствия между ФЗ, коэффициентами разностных схем и коэффициентами AR-модели, построенной по скользящему окну СВР

казано, что доля верно распознанных образов на основе генетического алгоритма с ростом показателя  $\gamma$ , равного отношению максимальной амплитуды шума к максимальной амплитуде сигнала, постепенно снижается (с 96,1 % при  $\gamma=0,025$  до 66,8 % при  $\gamma=0,25$ ).

В данной работе, являющейся продолжением исследований [1–5], предлагается метод автоматической разметки СВР, основанный на работах [10–14]. Его суть — в установлении соответствия между классами функциональных зависимостей (ФЗ), которым однозначно отвечают коэффициенты разностных схем (DS-коэффициентами) на базе Z-преобразования (рис. 1), и коэффициентами авторегрессионной за-

\* Работа поддержана РФФИ (проект № 09-01-99014-р\_офи).

висимости (AR-коэффициентами), построенной по скользящему окну СВР. Метод и реализующий его алгоритм названы в [6] методом ARADS (Auto-Regression, Adaptive algorithm, Difference Scheme).

### 1. Основные определения и понятия

**Определение 1.** Стохастический временной ряд — множество выборочных значений случайного процесса  $\{y_k = y(t_k), t_k \in T\}$  [10]. Будем полагать в работе  $T = \{0, \Delta, 2\Delta, \dots\}$ , или  $t_k = k\Delta, \Delta > 0$ .

Исходная выборка представлена объектами  $s = (t, y)$  и вектор-объектами [1]  $S_n = ((t_1, y_1), \dots, (t_n, y_n)), t, y \in \mathbb{R}, n \geq 1$ .

Обозначим алфавит как набор меток  $M = \{l_1, \dots, l_m\}$ .

Алгоритм разметки СВР — решающая процедура, сопоставляющая каждому объекту (или вектор-объекту как отрезку значений СВР) символ (метку, аксиому [1]) из заданного алфавита (словаря разметки) — конечного множества  $M = \{l_1, \dots, l_m\}$  символов (меток аксиом).

При сопоставлении объекту  $s$  символа  $l$  из заданного алфавита объект  $(s, l)$  называется размеченным; вектор-объект  $S_n$  размечен при сопоставлении ему последовательности символов  $a_n = (l_{i_1}, \dots, l_{i_n}), l_j \in M$ .

Обозначим алфавит как набор «первичных» меток  $M_\alpha = \{l_1, \dots, l_m\}$ , сформированных экспертно или на обучающей выборке. Пусть  $B_i \subseteq \{1, \dots, m\}, i = \overline{1, I}$  — подмножества номеров меток, соотнесенных с состояниями динамического объекта  $\Omega_1, \dots, \Omega_I$ , геометрические ограничения которых получены на обучающей выборке и/или на основе экспертного анализа. Введем алфавит  $M_\beta = \{l_B \mid B \in \mathbb{B} = (B_1, \dots, B_I)\}$ , полагая  $M_\alpha \subseteq M_\beta$ . Соответствующие алфавитам  $M_\alpha, M_\beta$  разметки СВР будем называть  $\alpha$ -разметкой и  $\beta$ -разметкой.

**Определение 2.** Алгоритм  $\beta$ -разметки (далее — разметки) назовем корректным регуляризатором, если выполнены условия:

$$P(l_B / l_j) = 0, j \notin B; P(l_B / l_j) > 0, j \in B; P(l_{B=\{j\}} / l_j) > 0 \tag{1}$$

Последнее неравенство содержательно означает положительную вероятность разметки в случае одноэлементного подмножества  $B = \{j\}$ .

Отметим, что, условия (1) задают на основе  $M_\alpha$  новую систему аксиом на основе  $M_\beta$  как регуляризирующую систему аксиом с приоритетами [4]: аксиома  $l_j$  выполняема, если выполняема аксиома  $l_B, j \in B$ .

Система аксиом, являющаяся основой алгебраического подхода к разметке, должна удовлетворять дополнительным ограничениям [1] — требованиям полноты и однозначности.

Система аксиом полна, если для любой точки исследуемого СВР найдется аксиома из системы аксиом, её размечающая; система аксиом удовлетворяет условию однозначности, если любая точка любого временного ряда может быть размечена лишь одной аксиомой.

### 2. Постановка задачи

Пусть  $L$  — линейное нормированное пространство всевозможных числовых последовательностей. Рассмотрим СВР  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , где  $y_k$  — аддитивная смесь некоторой изменяющейся со временем детерминированной составляющей  $x_k$  и белого шума  $\xi_k$  с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma_\xi^2$ :

$$y_k = x_k + \xi_k, k \geq 0. \tag{2}$$

Будем полагать, что для каждого  $i$ -го фрагмента СВР (2) (интерпретируемого как состояние динамического объекта) динамический процесс описывается моделью

$$y_k^i = x_k^i + \xi_k^i, k \geq 0, i = \overline{1, I}, \tag{3}$$

где  $x_k^i = f_k^i = f^i(k\Delta), \Delta > 0, f^i(t)$  — некоторая функция, описывающая поведение неслучайной составляющей  $x_k^i$  в  $i$ -м фрагменте СВР.

Зафиксируем множество элементарных функциональных зависимостей  $F = \{f^v(k)\}, v = \overline{1, n_f}$ , которое будет являться основой (доменом) системы аксиом; обучающую выборку (прецедентов) типа «разметка-состояние ДО».

Метка аксиомы на основе  $M_\beta$   $B_i = \{j_1, \dots, j_{n_i}\}$  — набор номеров ФЗ, в совокупности являющихся признаками состояний ДО  $\Omega_i = \{f_{j_1}, \dots, f_{j_{n_i}}\}$ ,  $P(l_B / l_j)$  — вероятность появления метки  $l_B$ , если размечиваемая точка принадлежит элементарной ФЗ с меткой (номером)  $l_j$ .

Используя формализм работы [1], поставим задачу выделения тренда как задачу классификации, в которой каждой точке СВР  $y$  сопоставлялся метка из фиксированного словаря разметки  $M_\alpha(M_\beta)$  (интерпретируемая как номер класса из определенного множества классов).

### 3. Решение задачи

Рассмотрим сначала решение задачи моделирования неслучайной составляющей  $x_k, k \geq 0$ , для СВР (2)

на основе заданного множества  $F = \{f^\nu(t), \nu = \overline{1, m}\}$  возможных ФЗ, принадлежащих классу функций, Z-преобразование которых есть дробно-рациональная функция [11, 12, 13].

**Пример.** Пусть исследуется зависимость  $x = A \exp(\alpha t)$ , соответствующая последовательность  $x_k = A \exp(\alpha t_k) = A \exp(\alpha \Delta k)$ ,  $k$  — номер отсчета. Применяем к последовательности отсчетов  $x_k = A \exp(\alpha \Delta k)$  Z-преобразование, получим в области изображений:

$$X(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} A \exp(\alpha \Delta k) z^{-k} = A \sum_{k=0}^{\infty} \exp(k(\alpha \Delta - \ln z)) = A(1 - \exp(\alpha \Delta - \ln z))^{-1} = A(1 - \exp(\alpha \Delta) z^{-1})^{-1},$$

$$X(Z)(1 - \exp(\alpha \Delta) z^{-1}) = A.$$

Для последнего уравнения выполняем обратное Z-преобразование, в области оригиналов получим разностную схему:  $x_k = \exp(\alpha \Delta) x_{k-1} + A \delta(k)$ , где  $\delta(k)$  — символ Кронекера, откуда следует  $x_k = \exp(\alpha \Delta) x_{k-1}$ ,  $k \geq 2$ , так как  $\delta(k) = 0, k \geq 2$ . Осуществив замену переменной  $z_k = \ln x_k$ , получим уравнение  $z_k = 2z_{k-1} - z_{k-2}$  с DS-коэффициентами  $(a_1, a_2) = (2, -1)$ .

Аналогично, для зависимости  $y = A + Bt + Ct^2$  получим разностную схему в виде:  $x_k = 3x_{k-1} - 3x_{k-2} + x_{k-3}$ . Используя замену переменных  $z_k = x_k - x_{k-1}$ , получаем разностное уравнение вида  $z_k = 2z_{k-1} - z_{k-2} = a_1 z_{k-1} + a_2 z_{k-2}$ , с DS-коэффициентами  $(a_1, a_2) = (2, -1)$ . В данном случае разностная схема представляет собой процесс авторегрессии порядка 2 с нулевым шумом (отсутствие ошибок измерения).

### 3.1. Структурная идентификация модели

Общая схема распознавания модели детерминированной основы процесса (2) представлена по шагам в виде алгоритмического описания.

#### Алгоритм 1. Распознавание структуры модели окна наблюдения

*Вход:* фрагмент (окно) наблюдения  $y'_1, \dots, y'_n$ ; множество ФЗ  $F = \{f^\nu(t), \nu = \overline{1, m}\}$ .

*Выход:* признак формы фрагмента наблюдения  $u$ ,  $f^u$  и вектор коэффициентов разностной схемы  $a_u(p^u) = (a_1^u, \dots, a_{p^u}^u)$ .

1: Сопоставляем ФЗ  $f^\nu(t)$  из заданного множества  $F = \{f^\nu(t), \nu = \overline{1, m}\}$  на основе Z-преобразования разностную схему

$$x_k^v = \sum_{j=1}^{p^v} a_j^v x_{k-j}^v \quad \forall k \geq p^v, \quad x_k^v = f^v(t_k) = f^v(k\Delta)$$

и набор векторов  $a^v(p^v) = (a_1^v, \dots, a_{p^v}^v)$ , полагаем

$$p = \max_{\nu} p^v, \quad a^v(p) = (a_1^v, \dots, a_{p^v}^v, a_{p^v+1}^v, \dots, a_p^v),$$

$$a_j^v = 0 \quad \forall j = \overline{p^v+1, p}.$$

2: Выдвигаем  $m$  гипотез относительно вида ФЗ неслучайной составляющей  $x_k = f_k$  в модели (2) по наблюдаемому фрагменту  $y'_1, \dots, y'_n$  ряда  $y$ , для проверки которых осуществляем построение  $m$  AR-моделей (число точек  $n$ , зависящее от заданной пороговой точности аппроксимации и порядка разностной схемы [10], является параметром алгоритма):

$$(a_1^{Av}, \dots, a_{p^v}^{Av}) = \arg \min_{a_j^i \in R} \sum_{l \in \{1, \dots, n\}} \phi \left( \left| y'_l - \sum_{j=1}^{p^v} a_j^i y'_{l-j} \right| \right), \quad (4)$$

где  $y'_j \in (y_1, \dots, y_n)$ ,  $\phi$  — некоторая монотонно возрастающая на  $(0, \infty)$  функция,  $\phi(0) = 0, \phi'(x) < 0$  для любого  $x > 0, \sup_{x \in R^+} |x^2 \phi'(x)| < \infty$ .

3: Определяем тип ФЗ  $f^u$  в смысле близости векторов AR-коэффициентов  $a^{Av}(p)$  и  $a^v(p)$  по заданной норме  $u = \arg \min_{\nu=1, n_f} \|a^v - a^{Av}\|$ , например евклидовой:

$$u = \arg \min_{\nu=1, m} \sqrt{\sum_{j=1}^p (a_j^v - a_j^{Av})^2}. \quad (5)$$

#### Замечания.

1. Схема распознавания модели детерминированной основы процесса (2) не предполагает структурную идентификацию модели в традиционном смысле, под которой понимается параметрическая определенность.

2. Стартовые догадки для значения параметра алгоритма — числа точек  $n$  для построения AR-моделей (п. 2 алгоритма 1) — могут быть взяты из известной рекомендации [10] о том, что приемлемые результаты по точности в авторегрессионных моделях дает выборка значений, в 3–4 раза большая порядка авторегрессии. Например, для параметризации экспоненциальной модели ( $y_k = a_1 y_{k-1}, p = 1$ ) достаточно 3–4 наблюдений. Пусть  $n = \max_{\nu} n_{\nu}$ , где  $n_{\nu}$  —

число точек, требуемое для построения  $v$ -й модели,  $n_v > 3p^v$ , уточняемое на обучающей выборке.

**Утверждение 1.** Оценки AR-коэффициентов  $(a_1^{Av}, \dots, a_p^{Av})$  AR-моделей, полученные по формуле (4) с монотонно возрастающей на  $(0, \infty)$  функцией потерь  $\phi$ , обладающей свойствами:  $\phi(0) = 0, \phi'(x) < 0$  для любого  $x > 0$ , являются устойчивыми к большим ошибкам [14].

Примеры устойчивых к большим выбросам функций:  $\phi(x) = \text{arctg}(|x|), \phi(x) = 1 - \exp(-|x|)$ ; неустойчивых:  $\phi(x) = |x|^\lambda, \lambda > 0, \phi(x) = \ln(|x| + 1)$ .

### 3.2. Правило разметки СВР

Зададим следующую систему аксиом  $\{A_u\}$ .

Аксиома  $A_u$  задается на  $(k'' - k')$  точках; точка  $x_l \forall l \in [k', k'']$  является точкой с меткой  $f^u$  для интервала  $[x_k, x_{k''}]$ , если в условиях моделей (2), (3) имеет место (4), (5), где  $a^{Av} = a^{Av}[k', k'']$  — вектор AR-коэффициентов, восстановленный по интервалу  $[k', k'']$ ,  $a^v$  — коэффициенты разностной схемы, соответствующей ФЗ  $f^v$ .

*Замечание.* Аналогично аксиома  $A_u$  может задаваться для одной точки ряда по фиксированной системе окрестностей (скользящая разметка), нахождение которой связано с задачей обеспечения корректности алгоритма разметки.

При фиксированных множествах ФЗ  $F = \{f^v(k)\}$ , обучающей выборки (прецедентов), для сформулированной системы аксиом  $\{A_u\}$  выполнение условий полноты и однозначности (как аналога статистической эквивалентности) обеспечивается условием (1) и следующими утверждениями.

**Утверждение 2.** При соблюдении условий постановки задачи (2) и принадлежности функции  $f(k\Delta)$  классу с дробно-рациональным Z-преобразованием ( $p' \leq q' < \infty$ )

$$X(z) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j z^{-j} = P(z)/Q(z), R(z) = \sum_{j=0}^{p'} p_j z^{-j}, Q(z) = \sum_{j=0}^{q'} q_j z^{-j}$$

последовательности  $x = \{x_k: x_k = f(k\Delta), k \geq 0\}$  однозначно соответствует разностная схема  $x_n =$

$$= \sum_{j=1}^p a_j x_{n-j} \forall n \geq p.$$

**Утверждение 3.** Множество  $F = \{f^v(k)\}, v \in J (J —$  множество индексов), последовательностей непрерывных, ограниченных снизу функций  $\{f^v(k)\} (k = 1, 2, \dots)$ , одной переменной упорядочено в смысле близости по норме к заданной функции  $f$ .

Действительно, в нормированном пространстве два элемента равны, если норма их разности равна нулю. Нетрудно проверить, что функция  $r(x, y) = \|x - y\|, x, y \in X \subset L$ , удовлетворяет всем аксиомам метрики, т. е. линейное нормированное пространство является метрическим, и поэтому в нём всегда можно (по отношению порядка) упорядочить величины  $r(f, f_1), r(f, f_2), \dots, r(f, f_n)$ , где  $r(f, f_v) = \|f - f_v\| : r(f, f_{j_1}) \leq r(f, f_{j_2}) \leq \dots \leq r(f, f_{j_n})$ .

Таким образом, выбор «лучшей» аппроксимирующей функции для  $f$  связан с нахождением функции  $f_{j_1}$ , расстояние до которой минимально; в случае равенства расстояний выбирается модель, наиболее «простая», ранжирование элементарных ФЗ по степени сложности («простоты») проводится экспертами.

По построению системы аксиом существует принципиальная возможность получения любой метки (аксиомы) при заданных параметрах процедуры разметки (утверждения 2, 3). Ниже будет показано, что в пределах предположений и ограничений (1) возможно построение последовательности приближений вероятности  $\alpha$ -разметки (как случайного процесса), обладающей свойством сходимости к единственному максимально-правдоподобному решению при фиксированной регуляризирующей системе приоритетов на основе  $M_\beta$ . Такой анализ отвечает оцениванию обобщающей способности рассматриваемого алгоритма разметки.

### 3.3. Максимально-правдоподобная оценка распределения $\alpha$ -разметки

Пусть на вход алгоритма разметки подаются  $n$  значений СВР  $y_n = (y_1, \dots, y_n)$ . В предположении существования для СВР  $\alpha$ -разметки в виде  $\alpha$ -последовательности с вероятностным распределением  $\alpha$ -символов  $P_\alpha = (p_{\alpha 1}, \dots, p_{\alpha m})$ , на выходе алгоритма разметки будем иметь последовательность  $\beta$ -символов  $b_n = (l_{B_1}, \dots, l_{B_n})$  с оценкой вероятностного распределения  $Q_\beta = (q_{\beta 1}, \dots, q_{\beta l})$ , где  $q_{\beta i} = P_n(l_{B_i}) = \sum_{j \in B_i} p_{\alpha j} P(l_{B_i} / l_j)$ . Вероятность последовательности  $b_n$  в предположении статистической независимости появления меток  $l_B (n_B —$  число появлений в последовательности  $b_n \beta$ -символов  $l_B)$  будет равна

$$P_n(P_\alpha) = \prod_{B \in B} \left( \sum_{j \in B} p_{\alpha j} P(l_B / l_j) \right)^{n_B}. \quad (6)$$

Параметры распределения  $P_\alpha = (p_{\alpha 1}, \dots, p_{\alpha m})$  можно найти из условия максимума величины  $P_n(P_\alpha)$  или, что эквивалентно, минимума величины  $-\log_2 P_n(P_\alpha)$ :

$$-\log_2 P_n(P_\alpha) = -n \sum_{B \in B} \frac{n_B}{n} \log_2 \left( \sum_{j \in B} p_{\alpha j} P(l_B / l_j) \right) = -n \sum_{B \in B} \hat{p}_B \log_2 \sum_{j \in B} p_{\alpha j} P(l_B / l_j),$$

где

$$\hat{p}_B = \frac{n_B}{n}.$$

Обозначим  $H(P_\alpha, Q_\beta) = -\log_2 P_n(P_\alpha) / n$ . Условие для определения набора  $P_\alpha = (p_{\alpha 1}, \dots, p_{\alpha m})$  содержится в теореме 1, доказательство которой следует из результатов, полученных в [15, 16].

**Теорема 1.** При выполнении условия 1):  $P_\alpha : \exists j = \overline{1, m} : p_{\alpha j} > 0$  (не все компоненты  $P_\alpha$  одновременно равны нулю) существует единственный набор вероятностей  $P_\alpha = (p_{\alpha 1}, \dots, p_{\alpha m})$ , максимизирующий вероятность последовательности наблюдений  $P_n(P_\alpha)$ ; при выполнении условия 2):  $P_\alpha : \forall j = \overline{1, m} : p_{\alpha j} > 0$  единственный набор вероятностей  $P_\alpha = (p_{\alpha 1}, \dots, p_{\alpha m})$  максимизирует вероятность последовательности наблюдений  $P_n(P_\alpha)$  тогда и только тогда, когда для каждого  $i = \overline{1, m}$  имеет место соотношение

$$\sum_{B \in B, i \in B} \hat{p}_B P(l_B / l_i) = \sum_{j \in B} p_{\alpha j} P(l_B / l_j). \quad (7)$$

Аналитически уравнение (7) не разрешимо, ниже излагается процедура (оформленная в виде алгоритма 2), позволяющая с заданной точностью итеративно определить набор  $\hat{P}_\alpha = (\hat{p}_{\alpha 1}, \dots, \hat{p}_{\alpha m})$ , максимизирующий вероятность  $P_\alpha$  по наблюдениям  $y_n$ .

Для объекта  $y_n$  итеративно строим ММП-оценку  $\hat{P}_\alpha = (\hat{p}_{\alpha 1}, \dots, \hat{p}_{\alpha m})$  распределения  $P_\alpha = (p_{\alpha 1}, \dots, p_{\alpha m})$  на основе преобразования  $P'_\alpha = \varphi(P_\alpha) = (p'_{\alpha 1}, \dots, p'_{\alpha m})$  [15]:

$$p'_{\alpha j} = \sum_{B \in B, j \in B} \frac{\hat{p}_B p_{\alpha j} P(l_B / l_j)}{\sum_{k \in B} p_{\alpha k} P(l_B / l_k)}, j = \overline{1, m}. \quad (8)$$

**Лемма 1.** Преобразование  $P'_\alpha = \varphi(P_\alpha)$  (8) таково, что  $p'_{\alpha 1} \geq p_{\alpha 1}, \dots, p'_{\alpha m} \geq p_{\alpha m}, \sum_{j=1}^m p'_{\alpha j} = 1$ , и если

$P_\alpha : \forall j = \overline{1, m} : p_{\alpha j} > 0$ , то набор  $P_\alpha = (p_{\alpha 1}, \dots, p_{\alpha m})$  из (8) — единственный и является ММП-оценкой распределения  $\hat{P}_\alpha = (\hat{p}_{\alpha 1}, \dots, \hat{p}_{\alpha m})$ .

**Алгоритм 2. Получение оценки  $\hat{P}_\alpha = (\hat{p}_{\alpha 1}, \dots, \hat{p}_{\alpha m})$  распределения  $\alpha$ -разметки**

*Вход:* Наблюдения  $y(t, n) = \{y_t, y_{t+1}, \dots, y_{t+n-1}\}$ .

*Выход:*  $\hat{P}_\alpha = (\hat{p}_{\alpha 1}, \dots, \hat{p}_{\alpha m})$  — вектор оценок вероятностей  $P_\alpha = (p_{\alpha 1}, \dots, p_{\alpha m})$ .

1: Формируем начальное приближение  $\hat{P}_\alpha^0 : \forall j = \overline{1, m} : \hat{p}_{\alpha j}^0 > 0$ . Полагаем  $l = 1$ .

2: К приближению  $\hat{P}_\alpha^{l-1} = \{\hat{p}_{\alpha j}^{l-1}, j = \overline{1, m}\}$  применим преобразование (7), получаем

$$\hat{p}_{\alpha j}^l = \sum_{B \in B, j \in B} \frac{\hat{p}_B \hat{p}_{\alpha j}^{l-1} P(l_B / l_j)}{\sum_{k \in B} p_{\alpha k} P(l_B / l_k)}, j = \overline{1, m}.$$

3: Вычисляем величину

$$h(\hat{P}_\alpha^l, \hat{P}_\alpha^{l-1}) = \left| H(\hat{P}_\alpha^l, Q_\beta) - H(\hat{P}_\alpha^{l-1}, Q_\beta) \right|.$$

Если значение  $h(\hat{P}_\alpha^l, \hat{P}_\alpha^{l-1}) < \varepsilon$ , то полагаем  $\hat{P}_\alpha = \hat{P}_\alpha^l$ .

В противном случае выполняем шаг 2.

*Вернуть*  $\hat{P}_\alpha = (\hat{p}_{\alpha 1}, \dots, \hat{p}_{\alpha m})$ .

Свойство алгоритма сформулировано в теореме 2.

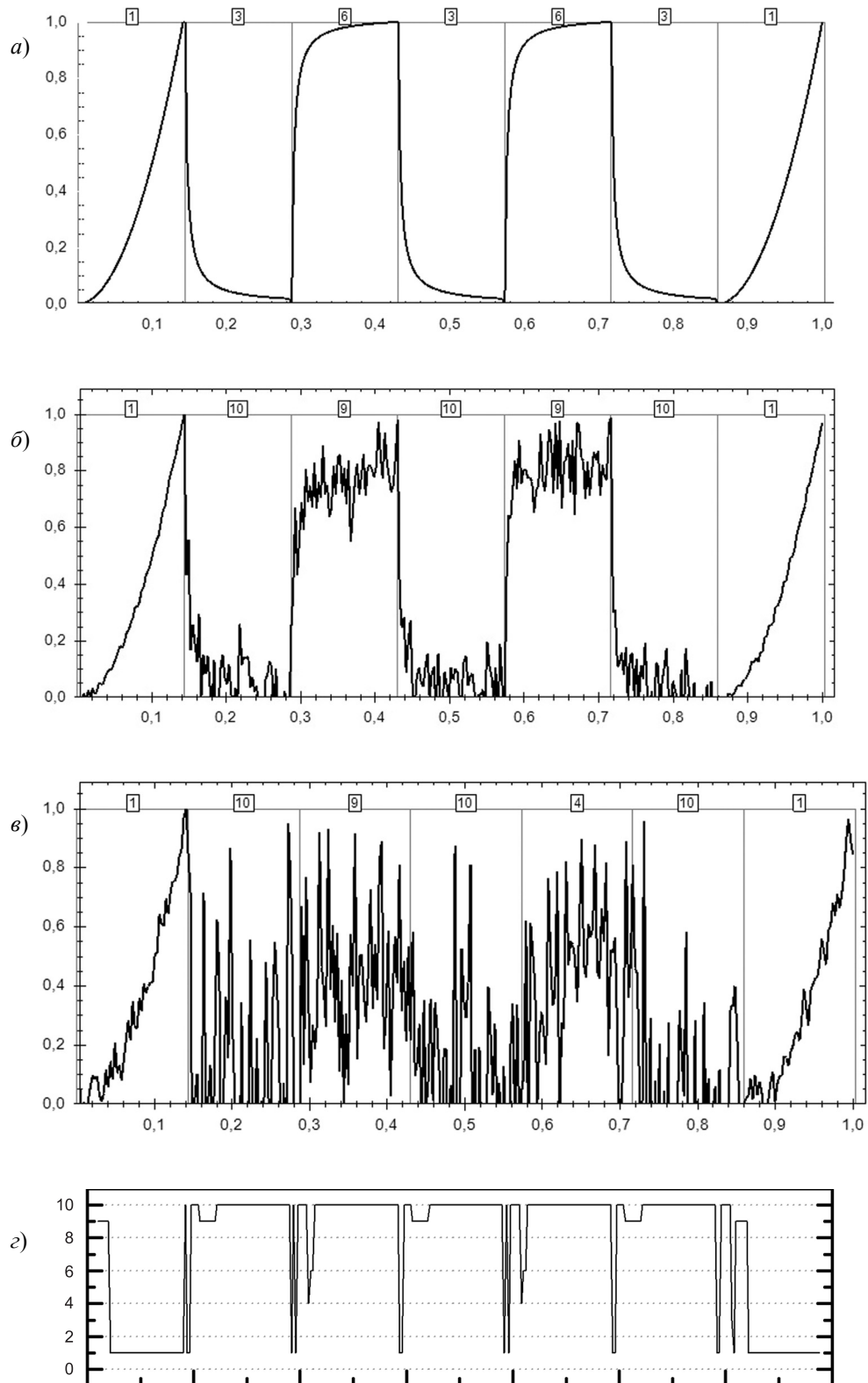
**Лемма 2.** Функция  $H(\hat{P}_\alpha^l, Q_\beta)$  не возрастает по  $l$ , или  $h(\hat{P}_\alpha^l, \hat{P}_\alpha^{l-1}) \leq 0$ .

**Теорема 2.** Последовательность  $\{\hat{P}_\alpha^l, l \geq 1\}$ , определяемая по алгоритму 2 и формуле (8), сходится к ММП-оценке (7).

Доказательство лемм 1, 2 и теорем 1, 2 идейно опирается на работы [15, 16] и здесь не приводится.

#### 4. Иллюстративный пример численного моделирования

Рассмотрим пример, где представлен модельный фрагмент ряда, значения которого получены таблицей 3-х ФЗ из заданного набора, включающего 14 ФЗ. На рисунке 2 а, б проставлены присвоенные АР номера ФЗ (метки): а) для исходного фрагмента ряда; б) для зашумленного ряда с нормальным шумом  $N(0; 0,05)$  и интервальной разметкой. На рис. 2 в, г представлены результаты скользящей разметки с величиной окна, равной 5 по ряду без шума (е)



**Рис. 2.** Модельные ряды: а) эталонный ряд с  $\alpha$ -разметкой; б) размеченный ряд с аддитивным  $N(0;0.01)$ -шумом; в) размеченный ряд с аддитивным  $N(0;0.05)$ -шумом; г) «хронология» размечивания ряда (по вертикальной оси – номера моделей) в скользящем режиме с длиной окна, равной 10 отсчетам для зашумленного ряда с шумом  $N(0;0.001)$

и по ряду с нормальным шумом  $N(0;0.05)$  ( $z$ ). По оси ординат — номера ФЗ (метки), для наглядности они соединены кривыми на графике.

#### Выводы по результатам моделирования

1. Ширина окна влияет на величину задержки обнаружения момента разладки (смены модели описания фрагмента временного ряда).
2. Признаком разладки может служить рост энтропии номеров (меток) ФЗ.
3. Из рис. 2  $z$  следует, что для слабозашумленного ряда (приведены данные моделирования для аддитивного шума со среднеквадратическим отклонением до 0,001) момент разладки определяется с удовлетворительной точностью.
4. Результаты экспериментальных исследований свидетельствуют, что изложенные алгоритмы при наблюдении определенных условий и подборе параметров алгоритмов позволяют уверенно распознавать смену состояний динамических объектов с неопределенностью.

### 5. Решение прикладной задачи

Актуальны исследования по обнаружению предвестников разрушения горных пород по характеристикам их сигналов электромагнитной эмиссии (ЭМЭ), в основе которых лежит экспериментально доказанное явление увеличения электромагнитной активности на этапе предразрушения, что соответствует определенной нагрузке ( $P_{\text{пред}} \sim 0,8-0,9$  [17]). Известно, что случайный процесс (как естественное следствие неоднородности горных пород, наличия флюидов и существование трещин (блоков) различных уровней) разрушения горных пород — не внезапный акт, а заключительный этап процесса, характеризующегося определенной длительностью и проходящего в своем развитии несколько стадий. Экспериментально установлено, что в зависимости от этапа (или типа) деформирования наблюдается изменение характеристик электромагнитной эмиссии, являющейся следствием механоэлектрических преобразований [18]. В зависимости от этапа деформирования в характеристиках электромагнитной эмиссии присутствуют свои особенности.

Поскольку локальные напряжения, возникающие в горных породах, являются случайными функциями

координат и времени, то случайной функцией координат в неоднородном теле является и локальная прочность. Микротрещины появляются там, где локальные напряжения превышают локальную прочность. Такая достаточно сложная иерархическая структура горных пород приводит к тому, что на протяжении всего процесса деформирования изменяются параметры регистрируемого ЭМЭ. Вследствие этого основной задачей прогноза является оценка связи параметров ЭМЭ с определенными этапами напряженно-деформированного состояния и выявление параметра, являющегося прогностическим признаком разрушения.

Одним из способов выявления основных закономерностей механоэлектрических преобразований в массиве горных пород является физическое моделирование в лабораторных условиях [19].

Применение предложенного алгоритма разметки СВР, в качестве которого выступает серия значений регистрируемого ЭМЭ, с целью анализа процессов деформирования и разрушения лабораторного образца, заключается в следующем.

Для анализа рядов была взята библиотека функций, представленная на рис. 3.

**Экспериментальные данные.** Для тестирования алгоритма был выбран ряд показаний электромагнитной эмиссии на 100 кГц определенного образца. Экспертом ряд разделен на 14 «характерных» сегментов S1–S14 (аналогов состояний (рис. 4)).

Из рис. 4 следует, что моменты разладки (как смены модели состояний) возникают практически в соответствии с указанными экспертом границами.

### Заключение

Рассмотрен метод разметки стохастического временного ряда на основе установления соответствия между классами функциональных зависимостей, соотношенными с ними векторами коэффициентов разностных схем и коэффициентами авторегрессионной зависимости, построенной по скользящему окну ряда.

Из рис. 4 следует, что моменты разладки (как смены модели состояний) возникают практически в соответствии с указанными экспертом границами.

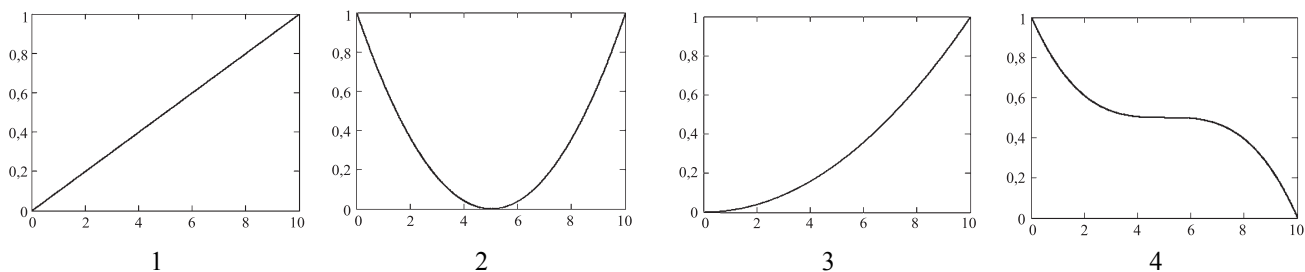
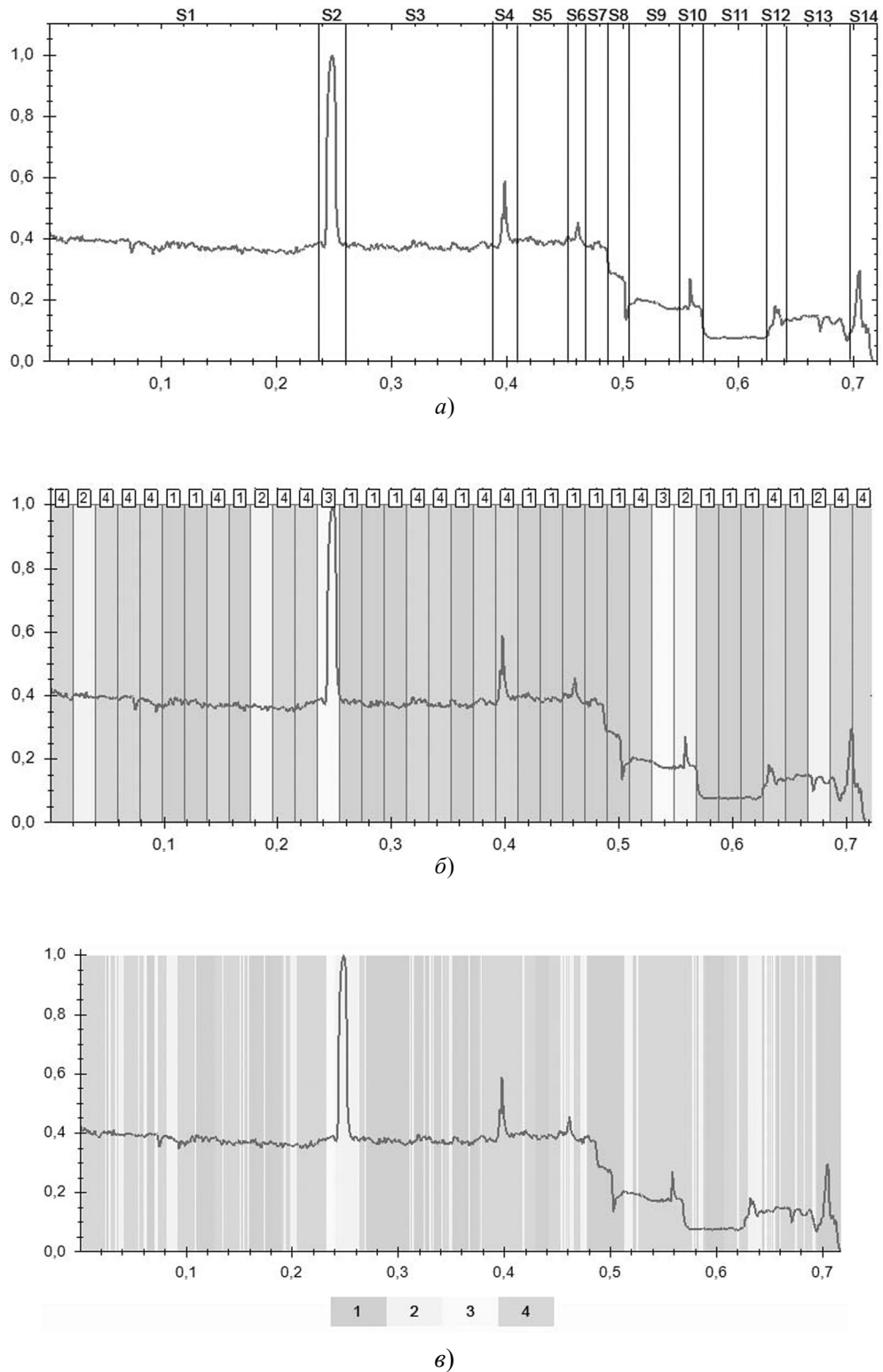


Рис. 3. Библиотека функций



**Рис. 4.** а) Исследуемый ряд, разделенный на сегменты экспертом; б) разметка ряда с равными размерами величин окна и сдвига ; в) разметка ряда со скользящим окном шириной 20 и величиной сдвига, равной 1; градациями серого цвета отмечены номера моделей: 1,2,3,4



## Заключение

Рассмотрен метод разметки стохастического временного ряда на основе установления соответствия между классами функциональных зависимостей, соотнесенными с ними векторами коэффициентов разностных схем и коэффициентами авторегрессионной зависимости, построенной по скользящему окну ряда.

На модельных данных показана возможность распознавания состояний динамического объекта по признаку формы детерминированной составляющей по значениям коэффициентов авторегрессионной модели, построенной по стохастическому временному ряду.

Апробация предложенного подхода и реализующих его метода и алгоритмов разметки осуществлена на решении актуальной прикладной задачи обнаружения предвестников разрушения горных пород по характеристикам их сигналов электромагнитной эмиссии.

Целесообразно дальнейшее исследование данного подхода на предмет указания и уточнения границ его применимости в зависимости от вида шума и его числовых характеристик, а также правил выбора минимального числа признаков — функциональных зависимостей, обладающих «хорошими» дискриминирующими свойствами, аналогичных гипотезе компактности.

## Литература

1. Рудаков К. В., Чехович Ю. В. Алгебраический подход к проблеме синтеза обучаемых алгоритмов выделения трендов // Доклады РАН. 2003. Т. 388. № 1. С. 33–36.
2. Журавлёв Ю. И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Проблемы кибернетики. 1978. Т. 33. С. 5–68.
3. Ивахненко А. А., Каневский Д. Ю., Рудева А. В., Стрижов В. В. Выявление групп объектов, описанных набором многомерных временных рядов // Математические методы распознавания образов (ММРО-13): сб. докладов 13-й Всеросс. конф. М.: МАКС Пресс, 2007. С. 134–137.
4. Васин Е. А., Костенко В. А., Коваленко Д. С. Автоматическое построение алгоритмов, основанных на алгебраическом подходе, для распознавания предаварийных ситуаций динамических систем // Искусственный интеллект. 2006. № 2. С. 130–134.
5. Коваленко Д. С., Костенко В. А., Васин Е. А. Исследование применимости алгебраического подхода к анализу временных рядов // Методы и средства обработки информации. М.: Изд-во ВМиК МГУ, 2005. С. 553–559.
6. Букреев В. Г., Колесникова С. И., Янковская А. Е. Выявление закономерностей во временных рядах в задачах распознавания состояний динамических объектов. Томск: Изд-во ТПУ, 2010. 254 с.
7. Михайлов Ю. Б. Математические основы повышения точности прогнозирования количественных характеристик процессов (в технике, экономике, экологии, социологии, бизнесе). М.: ООО «Издательство „Науцтехлитиздат“», 2000. 206 с.

8. Грызлова Т. П. Формализация задачи распознавания последовательности состояний сложного источника // Математические методы распознавания образов: 14-я Всероссийская конференция. Владимирская обл. г. Суздаль, 21–26 сентября 2009 г.: Сборник докладов. М.: МАКС Пресс, 2009. С. 333–337.
9. Колесникова С. И. Выявление закономерностей во временных рядах при распознавании состояний сложных объектов управления // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2010. № 5. С. 66–71.
10. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. М.: Мир, 1971. Вып. 1. 406 с.
11. Езекиэл М., Фокс К. Методы анализа корреляций и регрессий. М.: Статистика, 1966. 559 с.
12. Семёнычев В. К. Идентификация экономической динамики на основе моделей авторегрессии. Самара: АНО «Изд. СНЦ РАН», 2004. 243 с.
13. Тырсин А. Н. Идентификация нестационарных экономических процессов на основе дискретно-совпадающих моделей авторегрессии // Известия Уральского государственного экономического университета. 2004. № 9. С. 44–51.
14. Болдин М. Б., Симонова Г. И., Тюрин Ю. Н. Знаковый статистический анализ линейных моделей. М.: Физматлит, 1997. 288 с.
15. Шоломов Л. А. О собственной информации нечетких текстов // Нелинейная динамика и управление. М.: Физматлит, 2008. Вып. 6. 340 с.
16. Галлагер Р. Теория информации и надежная связь. М.: Советское радио, 1974. 720 с.
17. Указания по безопасному ведению горных работ на месторождениях Горной Шории, склонных к горным ударам. Новокузнецк: ВостНИГРИ; ВНИМИ, 1991. 93 с.
18. Еременко А. А., Гайдин А. П., Ваганова В. А., Еременко В. А. О критерии удороопасности массива горных пород // ФТПРПИ. 1999. № 6. С. 43–48.
19. Беспалько А. А., Яворович Л. В., Колесникова С. И., Букреев В. Г., Мертвецов А. Н., Федотов П. И. Исследование изменений характеристик электромагнитных сигналов при одноосном сжатии образцов горных пород Таштагольского рудника // Изв. вузов. Физика. 2011. Т. 54. № 1, 2. С. 78–75.

## Приложения

**Доказательство утверждения 1.** Покажем, что истинность утверждения 1 непосредственно следует из работы [14]. Необходимым условием минимальности

функции  $\sum_{l=1}^{\kappa_l} \phi \left( \left| y'_l - \sum_{j=1}^{p_l} a_j^i y'_{l-j} \right| \right)$  по искомым оценкам

параметров является выражение

$$\sum_{l=1}^{\kappa_l} \phi(\lambda_l) \operatorname{sign} \left( y'_l - \sum_{j=1}^{p_l} a_j^i y'_{l-j} \right) \left( - \sum_{j=1}^{p_l} y'_{l-j} \right) = 0,$$

$$\lambda_l = \left| y'_l - \sum_{j=1}^{p_l} a_j^i y'_{l-j} \right|.$$

Отсюда следует, что задача поиска оценок  $(a_1^i, \dots, a_{p_i}^i)$  эквивалентна задаче поиска решений системы

$$\sum_{j=1}^{p_i} \sum_{l=1}^{K_i} \dot{\phi}(\lambda_l) y'_{l-j} \text{sign} \left( y'_l - \sum_{j=1}^{p_i} a_j^i y'_{l-j} \right) = 0. \quad (\text{П1})$$

Из работы [14] следует, что оценки  $(a_1^i, \dots, a_{p_i}^i)$ , получаемые решением системы (П1) при условии  $\sup_{y \in R^p} |y^T \varphi(y)| < \infty$ :

$$\sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^K \varphi(y_{l-1}, \dots, y_{l-p}) y_{l-j} \text{sign} \left( y_l - \sum_{j=1}^p a_j y_{l-j} \right) = 0,$$

являются устойчивыми к большим ошибкам. Отсюда следует, что оценки  $(a_1^i, \dots, a_{p_i}^i)$ , получаемые решением системы (П1) при условии  $\sup_{x \in R^+} |x^2 \phi'(x)| < \infty$ , обладают таким же свойством.

Утверждение 1 доказано.

**Доказательство утверждения 2.** Представим Z-преобразование функции  $x_k = f(k\Delta)$  дробно-рациональной функцией:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\sum_{j=0}^{p'} p_j z^{-j}}{\sum_{j=0}^{q'} q_j z^{-j}}, \quad p' \leq q' < \infty. \quad (\text{П2})$$

Преобразуем равенство (П2):  $X(z) \frac{Q(z)}{P(z)} = 1$ . На

основании теоремы о делении многочленов (с остатком) для любых двух многочленов  $Q(x)$  и  $P(x)$  можно найти такие многочлены  $G(x)$  и  $R(x)$ , что  $Q(x) = G(x)P(x) + R(x)$ , причем степень  $R(x)$  меньше степени  $G(x)$  или же  $R(x) = 0$ , а многочлены  $G(x)$  и  $R(x)$

определяются однозначно. Отсюда следует справедливость представления:

$$X(z) \left( \sum_{j=0}^{p'} b_{1j} z^{-j} \sum_{j=0}^{p'} b_{2j} z^{-j} + \sum_{j=0}^{r'} r_j z^{-j} \right) = 1,$$

или

$$X(z) \left( \sum_{j=0}^p b_j z^{-j} + \sum_{j=0}^{r'} r_j z^{-j} \right) = 1, \quad p > r'.$$

Раскрыв скобки и, применяя к полученному выражению обратное Z-преобразование, получим на основе свойства задержки Z-преобразования:

$$\sum_{j=0}^p a_j x(k-j) = \delta(k),$$

где  $\delta(k)$  — символ Кронекера. Отсюда следует справедливость утверждения 2:  $x_k = \sum_{j=1}^p a_j x_{k-j} \quad \forall n \geq p$ .

**Следствие.** Последовательность  $y$  представляет собой процесс авторегрессии скользящего среднего ARMA(p, p).

Справедливость следствия следует из справедливости равенств для моментов наблюдений  $k, \dots, k-p+1, k \geq p$ :

$$x_k = y_k - \xi_k, \dots, x_{k-p+1} = y_{k-p+1} - \xi_{k-p+1},$$

подставив которые в  $y_k = x_k + \xi_k, \quad k \geq p$ , получим параметрическую авторегрессию:

$$\begin{aligned} y_k &= \sum_{j=1}^p a_j x_{k-j} + \xi_k = \sum_{j=1}^p a_j (y_{k-j} - \xi_{k-j}) + \xi_k = \\ &= \sum_{j=1}^p a_j y_{k-j} + \xi_k - \sum_{j=1}^p a_j \xi_{k-j}. \end{aligned}$$

Утверждение 2 доказано.

**Колесникова Светлана Ивановна.** Доцент кафедры Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. К. ф.-м. н. Окончила Томский государственный университет в 1980 г. Количество печатных работ: 65, в том числе одна монография. Область научных интересов: математическое моделирование, распознавание образов, информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений, управление слабоструктурированными объектами. E-mail: skolesnikova@yandex.ru

**Мертвецов Александр Николаевич.** Ассистент кафедры Национального исследовательского Томского политехнического университета. Окончил Томский университет систем управления и радиоэлектроники в 2007 г. Количество печатных работ: 15. Область научных интересов: математическое моделирование, распознавание образов, информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений, искусственный интеллект.