Методы и модели в экономике

Модели фондообразования*

Ю. Н. Иванов, Р. А. Сотникова, Е. С. Волонтырец

Аннотация. В предыдущих работах авторов считалось, что накопленная прибыль или заемные средства сразу, без задержки, могут стать действующим капиталом. В данной работе рассматривается фондообразование, при котором учитывается ненулевой срок строительства. Определяются потери от задержки ввода в действие капитала.
Ключевые слова: *инвестиции, основной и оборотный капитал, процессы фондообразования, потери от дискретности вводов капитала.*

Введение

В наших работах [1–3] исследовалась упрощенная схема образования новых основных и оборотных фондов предприятия. (Заметим, что упрощение позволило привести дело к конечным формулам и вывести качественные свойства оптимальных решений, а в этой работе, как и в планируемых последующих, учитываются реальные черты процессов и определяются отличия от идеальной схемы). Итак, на протяжении каждого шага прибыль аккумулируется и в конце шага направляется на увеличение основных и оборотных фондов; в момент присоединения эти аккумулированные средства сразу становятся действующими фондами. Так происходит на участке накопления капитала, а на участке потребления прибыль направляется только на дивиденды. Когда развитие происходит за счет заемных средств, то (тоже по упрощенной схеме) полученный кредит сразу присоединяется к капиталу и сразу становится действующими основными и оборотными средствами. Превращение только что полученных денежных средств в действующие производственные мощности и доступные для использования запасы товарно-материальных ценностей возможно, но это далеко не общий случай.

Вот пример, когда это возможно. Если предприятие представляет собой уличную палатку, торгующую хлебобулочными изделиями или молочными продуктами, фруктами и овощами и тому подобными продуктами повседневного спроса, то временна́я дистанция между деньгами и готовым производством минимальная: утром получил деньги в банке, днем привез палатку и подключил ее к электроснабжению, вечером на своей машине завез продукты и завтра продавщица готова торговать и зарабатывать прибыль. Правда, еще должны быть подготовительные этапы (уговорить банк, найти продавца палаток, найти оптовика и т. д.), но они не в счет — счет начинается от получения денег в банке. Еще примерами могут послужить парикмахерское дело, ремонтные услуги и некоторые другие «малые» дела (малый бизнес).

Как трактовать теоретические построения [1–3] в примере с «палатками»? Согласно теории, оптимальный участок развития (участок накопления капита-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект № 10–02–00221а «Теория многопродуктовых производств»).

ла) представляет собой цепочку аккумулирований-вложений: в конце первого шага прибыль капитализируется (присоединяется к действующему капиталу), и на втором шаге капитал больше, чем на первом, и, следовательно, прибыль второго шага больше прибыли первого, а прибыль третьего шага больше прибыли второго. Прибыли первого шага может хватить на покупку второй палатки, но может и не хватить. Если хватает, то остаток отправляется в накопитель и переносится на покупку третьей палатки; если не хватает, то вся прибыль первого шага отправляется в тот же накопитель и вторая палатка покупается по достижении необходимой суммы. Так или иначе, прибыль увеличивается только после покупки палатки или палаток. Отличие от теоретической схемы здесь в том, что увеличение капитала может происходить только квантами, равными цене палаток вместе с запасами товаров. Понятно, что дискретность уменьшает (не увеличивает) итоговый капитал участка развития.

Теперь обратимся к главной теме этой работы — «лагам» или «запаздываниям», или «задержкам», или еще времен́ным промежуткам от момента инвестирования денежных средств до ввода в действие мощностей и запасов оборотных фондов.

Самый «тяжелый» вариант таков: вся стоимость стройки должна быть готова к началу работ, эти денежные средства инвестируются, и отдача от них проявляется только по окончании стройки. «Тяжелым» этот вариант оказывается потому, что денежные средства на исполнение строительных и монтажных работ используются постепенно и, следовательно, на начальном этапе значительная их часть лежит без движения; происходит то, что финансисты называют «омертвлением финансовых средств». Средний по «тяжести» вариант: часть стоимости стройки оплачивается в начальный момент, остальное — по мере надобности. В этом варианте омертвление также происходит, но в меньших объемах, и потери, следовательно, меньше. И, наконец, наименее «тяжелый» вариант: вместе с распределенным инвестированием имеет место также распределенный ввод в действие. Это значит, что проектом строительства предусматривается несколько очередей ввода, наподобие того как строился ВАЗ: сначала первая «нитка» по производству ВАЗ-2101, затем вторая и третья.

Таковы модели фондообразования, рассматриваемые в настоящей работе. Будут также выведены математические модели фондообразования и даны результаты расчетов, имеющих отношение к капитальному строительству. Представляется полезным краткое обсуждение основных положений экономики строительства; эти сведения дадут правильную ориентацию в выборе моделей фондообразования.

Экономическая статистика ведет учет «Воспроизводственной структуры капитальных вложений». Здесь фиксируются объемы капитальных вложений по отчетным годам, направленные на «техническое перевооружение и реконструкцию», на «расширение действующих предприятий», на «новое строительство» и на «отдельные объекты действующих предприятий». Доля капитальных вложений на «отдельные объекты…» растет с течением времени, но не выходит за пределы единиц процентов; доли на «новое строительство» и на «расширение…» падают по годам; доля на «техническое перевооружение…» растет по годам; в последние годы существования централизованной экономики эта доля превосходила 50 %.

В нашей работе будет рассматриваться только «новое строительство», другие направления будут исследоваться позже.

Экономическая статистика ведет также учет «Технологической структуры капитальных вложений». В этой части даются объемы капитальных вложений, направляемых на «строительно-монтажные работы», на «оборудование, инструменты и инвентарь» и на «прочие капитальные работы и затраты». Доля строительно-монтажных работ имеет тенденцию к уменьшению, доли «оборудования…» и «прочих…» — к увеличению. За 15 лет (1976–1990) по объектам производственного назначения первая доля была в диапазоне 48–34 %, вторая — 42–49 %, третья — 10–17 %.

Строительно-монтажные работы состоят [5] из строительных работ (~90 %) и работ по монтажу оборудования (~10 %). К основным строительным работам относятся земляные и каменные работы; монтаж строительных конструкций, устройство полов и кровель, отделочные работы, тепло- и гидроизоляция, инженерное оборудование зданий и сооружений. К работам по монтажу оборудования относятся: сборка и установка технологического, энергетического, подъемно-транспортного и другого оборудования, подвод воды, воздуха, пара, охлаждающей жидкости, монтаж кабелей и проводов, изоляция и окраска установленного оборудования и трубопроводов. Монтажные работы в отличие от монтажа оборудования представляют собой монтаж зданий и сооружений из узлов и деталей заводского изготовления.

В состав «оборудования, инструментов и инвентаря» включаются рабочие и силовые машины, измерительные и регулирующие приборы и устройства, лабораторное оборудование, вычислительная

Таблица 1

Продолжительность строительства и распределение капитальных вложений

Наименование объекта	Характеристика	Продолжительность строительства, мес.	Распределение капитальных вложений по годам, в % к сметной стоимости			
			1-й год	2-й год	3-й год	4-й год
Угольная шахта	Мощность 300 000 т/год	36	20	40	40	–
Автомобильная дорога	Протяженность 250 км	30	35	40	25	–
Тепловая электростанция	Мощность 100 000 кВт	40/30*	14	37	39	10
Стале-, чугуно-, цветно-литейные цехи	Площадь 20 000 м^2	36	40	50	10	–

* В числителе — общая продолжительность, в знаменателе — до ввода в действие первого агрегата.

техника, транспортные средства, инструменты и хозяйственный инвентарь.

В «прочие капитальные работы и затраты» входит подготовка строительного проекта вместе с расчетом его сметной стоимости. Проект подготавливается проектной организацией по заказу застройщика; застройщик покрывает расходы на изучение топографических, геологических, гидрогеологических, метеорологических условий стройки, а также на разработку материалов проекта.

Расходы на проектно-изыскательские работы «открывают» капитальные вложения; расходы на оборудование и его монтаж и расходы на оборотные фонды «закрывают» их.

Приведем фактические данные из книг [6–8], касающиеся продолжительности строительства и распределения капитальных вложений по годам строительства.

В табл. 1 интерес представляют не сами конкретные числа (хотя их источник не вызывает сомнений), а факт их существования в экономике строительства и, следовательно, возможность использовать такие параметры в моделях фондообразования.

Во введении уже описывалась схема фондообразования, принятая в [1–3]; будем ее называть «идеальной». Сейчас будет повторен необходимый для последующего в этой работе вывод формул для капитала в конце участка накопления при инвестировании из прибыли и при инвестировании из кредита.

Итак Φ^t — сумма основных и оборотных средств на конец периода t (измеряется в денежных единицах), ρ — рентабельность основных и оборотных средств (измеряется в долях единицы за период); $\Pi^t = \rho\Phi^{t-1}$ — прибыль за период t (измеряется в денежных единицах за период). На участке накопления капитала вся прибыль направляется на инвестиции:

$$\Phi^t = \Phi^{t-1} + \rho\Phi^{t-1} = \Phi^{t-1}(1+\rho);$$
$$\Phi^t = \Phi^0(1+\rho)^t \ \rightarrow\ \Phi^\tau = \Phi^0(1+\rho)^\tau. \qquad (1)$$

Первая запись читается так: капитал на конец периода t равняется капиталу на конец предыдущего периода плюс прибыль за период t. Прибыль немедленно капитализируется и становится новыми работающими основными и оборотными фондами; при этом правиле капитал наращивается по формуле сложных процентов и к концу участка накопления ($t=\tau$) равняется величине, данной последним выражением (1).

Кредит Q^{0+0} сразу присоединяется к первоначальному капиталу Φ^0 и, как и в предыдущем случае, становится новыми действующими основными и оборотными средствами. После присоединения кредита капитал равняется $\Phi^0 + Q^{0+0}$; прибыль — $\Pi^t = \rho(\Phi^0 + Q^{0+0})$; она направляется только на погашение долга, поэтому капитал на всем участке накопления не изменяется. Динамика остатка на ссудном счете такова:

$$Q^t = Q^{t-1} + \alpha Q^{t-1} - \rho\left(\Phi^0 + Q^0\right);$$
$$t = 1; 2; \ldots; \tau. \qquad (2)$$

Это конечно-разностное уравнение читается так: остаток на конец шага t равняется остатку на конец предыдущего шага плюс проценты, начисленные на шаге t, минус погасительный платеж. Решение (2) выглядит следующим образом:

$$Q^t = Q^0(1+\alpha)^t - \rho(\Phi^0 + Q^0)\frac{(1+\alpha)^t - 1}{\alpha}. \qquad (3)$$

На последнем шаге участка накопления $t=\tau$ остаток на счете должен быть нулевым: $Q^\tau = 0$; из этого условия получается выражение для кредита Q^{0+0}, который может быть погашен за τ шагов при кредитной ставке α и рентабельности ρ:

$$Q^{0+0} = \Phi^0 \frac{\rho \frac{1-(1+\alpha)^{-\tau}}{\alpha}}{1-\rho \frac{1-(1+\alpha)^{-\tau}}{\alpha}};$$

$$\Phi^\tau = \Phi^0 \frac{1}{1-\rho \frac{1-(1+\alpha)^{-\tau}}{\alpha}}. \qquad (4)$$

Вторым в (4) дано выражение для финального значения капитала: $\Phi^\tau = \Phi^0 + Q^{0+0}$.

В работе [3] показано, что заимствование банковских средств выгодно при соблюдении условия

$$\rho > \alpha. \qquad (5)$$

В противном случае следует использовать в качестве инвестиций собственную прибыль.

В работе [1] в качестве критерия оптимальности принято так называемое суммарное богатство акционеров:

$$K = \chi\Phi^T + \sum_{t=1}^{T} D^t \left(1+\beta\right)^{T-t}. \qquad (6)$$

Это сумма рыночной стоимости акций в конце интервала планирования и наращенных дивидендов; χ — отношение рыночной стоимости акций к их номинальной стоимости в конце интервала планирования; D^t — дивиденды на шаге t; β — ставка наращения.

Два заключительных замечания. Первое: как и в работах [1–3], здесь будет исследоваться однопродуктовое предприятие; это проще, чем предприятие многопродуктовое, но для сравнения с (1), (4) требуется именно однопродуктовое предприятие. Второе: в варианте автономного развития конечное значение капитала (1) получается в результате цепочки инвестирований: первая прибыль присоединяется к капиталу и на втором шаге прибыль больше, чем на первом; она тоже присоединяется к капиталу; на третьем шаге прибыль больше, чем на втором, и т. д. В рассматриваемых здесь моделях фондообразования также будут рассматриваться цепочки инвестирований для сравнимости с идеальным случаем [1–3].

1. Потери от дискретности приростов капитала

Можно купить одну палатку, можно купить две палатки, но полторы нельзя! Это ограничение, как и любое ограничение, уменьшает критериальное значение.

1.1. Источник инвестиций — собственная прибыль

Далее будет исследован вариант с инвестированием заемных средств. В этом разделе источником инвестиций выступает собственная прибыль.

Сначала рассмотрим пример. Значение капитала, с которого начинает бизнесмен: $\Phi^0 = 100$ ден. ед., рентабельность производства $\rho = 0{,}3$ ден. ед. за период, следовательно, в конце первого периода полученная прибыль составит $\Pi^1 = \rho\Phi^0 = 0{,}3 \cdot 100 = 30$ ден.ед. за период. Палатка стоит 15 ден. ед и еще запас оборотных ценностей («Марсов», «Сникерсов», «пива ПИТ» и др.) стоит 7 ден. ед.; итого квант капитала равняется 15 + 7 = 22 ден. ед., и с меньшей суммой денег ничего сделать нельзя (q_u — quantum). Бизнесмен затрачивает первые 22 ден. ед. и получает первый дополнительный капитал в виде палатки — основных фондов и запасов — оборотных фондов. Его капитал в начале второго периода равняется $\Phi^1 = 122$ ден. ед. и неиспользованные средства за первый период $G^1 = 30 - 22 = 8$ ден. ед. На втором периоде прибыль составит $\Pi^2 = \rho\Phi^1 = 0{,}3 \cdot 122 = 36{,}6$ ден. ед. Вместе с неиспользованными средствами первого периода оказывается: $G^1 + \Pi^2 = 8 + 36{,}6 = 44{,}6$ ден. ед. Этой суммы хватает на две палатки и два объема запасов. Тогда в начале третьего периода действующий капитал — $\Phi^2 = 122 + 2 \cdot 22 = 166$ ден. ед. и неиспользованный остаток — $G^2 = 44{,}6 - 2 \cdot 22 = 0{,}6$ ден. ед. Прибыль за третий период — $\Pi^3 = 0{,}3 \cdot 166 = 49{,}8$ ден. ед. Ее вместе с остатком, $G^2 + \Pi^3 = 0{,}6 + 49{,}8 = 50{,}4$ ден. ед., хватает на две палатки и еще остается запас. Остаток за третий период — $G^3 = 0{,}6 + 49{,}8 - 2 \cdot 22 = 6{,}4$ ден. ед., и действующий капитал на начало четвертого периода равняется $\Phi^3 = 166 + 2 \cdot 22 = 210$ ден. ед. Дальнейшая картина вплоть до пятого периода представлена в табл. 2. Расчеты проведены для следующих значений параметров:

$$\Phi^0 = 100 \text{ ден. ед.}; \ \rho = 0{,}3; \ T = 5. \qquad (7)$$

В табл. 2 приведены следующие данные: t — номер периода (шага); Φ^{t-1} — действующий капитал на конец $t-1$ (т. е. на начало t); G^{t-1} — неиспользованные средства на конец $t-1$ (т. е. начало t);

Таблица 2

Динамика переменных, при том что неиспользованные средства направляются на инвестиции следующих шагов

t	Φ^{t-1}	G^{t-1}	Π^t	$G^{t-1}+\Pi^t$	Δn^t	Φ^t	G^t
$q_u = 0$							
1	100,0	0	30,0	30,0	∞	130,0	0
2	130,0	0	39,0	39,0	∞	169,0	0
3	169,0	0	50,7	50,7	∞	219,7	0
4	219,7	0	65,9	65,9	∞	285,6	0
5	285,6	0	85,7	85,7	∞	371,3	0
$q_u = 7$							
1	100,0	0	30,0	30,0	4	128,0	2
2	128,0	2	38,4	40,4	5	163,0	5,4
3	163,0	5,4	48,9	54,3	7	212,0	5,3
4	212,0	5,3	63,6	68,9	9	275,0	5,9
5	275,0	5,9	82,5	88,4	12	359,0	4,4
$q_u = 22$							
1	100,0	0	30,0	30,0	1	122,0	8
2	122,0	8	36,6	44,6	2	166,0	0,6
3	166,0	0,6	49,8	50,4	2	210,0	6,4
4	210,0	6,4	63,0	69,4	3	276,0	3,4
5	276,0	3,4	82,8	86,2	3	342,0	20,2

$\Pi^t = \rho\Phi^{t-1}$ — прибыль на периоде t; $G^{t-1}+\Pi^t$ — ресурс средств в конце периода t; Δn^t — число комплектов (палаток + запасов), покупаемых в конце периода t; Φ^t — капитал в конце t; G^t — неиспользуемые средства в конце t; q_u — квант капитала.

Динамика капитала и неиспользованных денежных средств описывается следующей системой соотношений:

$$\Delta n^t = \left[\frac{G^{t-1}+\Pi^t}{q_u}\right];$$

$$\Phi^t = \Phi^{t-1} + q_u \cdot \Delta n^t\ ;\ G^t = G^{t-1} + \rho\Phi^{t-1} - q_u \cdot \Delta n^t\ . \quad (8)$$

Первое соотношение определяет прирост комплектов на шаге t: надо вычислить прибыль на шаге t, $\Pi^t = \rho\Phi^{t-1}$, добавить к ней неиспользованные средства предыдущего шага G^t и найти наибольшее число комплектов, которые можно купить на эти средства; символом [...] обозначается операция нахождения целой части числа, заключенного в квадратные скобки. Следующая формула определяет капитал на шаге t: к капиталу предыдущего шага надо добавить стоимость приобретенных на шаге t комплектов. Наконец, последнее соотношение дает значение оставшихся неиспользованными средств на шаге G^t.

В табл. 2 приведены три динамики капитала при разных стоимостях комплекта (квантах капитала): $q_u = 0;\ 7;\ 22$. Первая таблица соответствует идеальному случаю: квант бесконечно малый, поэтому неиспользованных средств не остается ни на одном шаге процесса. За пять шагов капитал возрастает до значения $\Phi^5 = 371{,}3$ ден. ед. В двух оставшихся случаях ($q_u = 7;\ q_u = 22$) капитал меньше: $\Phi^5 = 359{,}0$ и $\Phi^5 = 342{,}0$ ден. ед., соответственно. Нельзя сказать, что чем больше квант, тем потери больше; например, при $q_u = 7$ и $q_u = 22$, соответственно, $\Phi^2 = 163{,}0$ и $\Phi^2 = 166{,}0$; $\Phi^4 = 275{,}0$ и $\Phi^4 = 276{,}0$. Отметим, что во второй и третьей таблицах на каждом шаге остаются неиспользованные средства, они находят применение, если развитие продолжается на следующем шаге. А если шаг последний?

Естественно, ресурсы, не использованные для роста капитала, следует направить на дивиденды. В нашей работе [1] были установлены такие оптимальные свойства распределения прибыли между инвестициями и дивидендами:

- прибыль направляется либо на инвестиции, либо на дивиденды; участок, где инвестиции положительные, а дивиденды нулевые, назван участком накопления; участок с положительными дивидендами и нулевыми инвестициями — участком потребления;
- интервал планирования может содержать: только участок накопления; только участок потребления, участок накопления и за ним участок потребления; участок потребления и за ним участок накопления; конкретный выбор определяется областью в пространстве параметров ρ, β, χ, T (см. Введение);
- в работе [1] выделена так называемая «рабочая» область параметров; эта область ограничена неравенством $\chi < 1$, что означает: план рассчитывается в предположении (пессимистическом), что фондовый рынок недооценит акции предприятия в конце планового интервала; второе неравенство отделяет область, где инвестору выгодно вкладывать свои средства в акционерное общество, от области, где предпочтение отдается банку;
- в «рабочей» области интервал планирования открывается участком накопления, за которым следует участок потребления; еще раз подчеркнем, что на первом участке дивиденды нулевые, а на втором — инвестиции нулевые.

В нашем случае дискретность прироста капитала оставляет неиспользованными средства на последнем шаге участка накопления, и никакого иного применения этому остатку нет, кроме направления его на дивиденды. Доказательства оптимальности этого решения тоже нет. Вообще, когда речь идет о дискретности и, соответственно, о целочисленных переменных, рассчитывать на доказательство оптимальности предложенного решения не приходится. Примем это решение и обратимся к распределению прибыли между инвестициями и дивидендами при условии дискретности приращения капитала.

Каждая строка табл. 2 может считаться последней на участке накопления; каждая строка характеризуется неиспользованными средствами. Символом τ в [1] обозначалась продолжительность участка накопления (только накопления!); сейчас τ — последний шаг, на котором еще увеличивается капитал, но на котором одновременно остаток G^τ направляется на дивиденды; начиная с шага $\tau+1$ прибыль направляется только на дивиденды.

Если накопление капитала заканчивается на шаге τ и после этого вся прибыль направляется на дивиденды, то это канонический случай, рассмотренный в [1] и отмеченный во Введении — (6); если же на шаге τ к дивидендам добавляется остаток G^τ, то выражение для суммарного богатства принимает такой вид:

$$K = \chi\Phi^\tau + \rho\Phi^\tau \sum_{t=\tau+1}^{T} \left(1+\beta\right)^{T-t} + G^\tau (1+\beta)^{T-\tau} =$$

$$= \Phi^\tau \left[\chi + \rho \frac{(1+\beta)^{T-\tau} - 1}{\beta} \right] + G^\tau (1+\beta)^{T-\tau} . \qquad (9)$$

Следующие отличия (9) от (6) требуют пояснений: во-первых, на шагах $\tau+1$; …; T капитал не меняется, поэтому $\Phi^T = \Phi^\tau$; во-вторых, на тех же шагах дивиденды не меняются и равняются постоянной прибыли, поэтому $D^{\tau+1} = \ldots = D^T = \rho\Phi^\tau$, и постоянный член D^t может быть вынесен из-под знака суммы; в-третьих, под знаком суммы оказываются члены убывающей геометрической прогрессии, и эта сумма равняется конечному выражению — см. вторую запись в (9); в-четвертых, в (9) дан новый член $G^\tau (1+\beta)^{T-\tau}$ — остаток средств на шаге τ, направляемых на дивиденды.

Расчеты по формуле (9) приводят к табл. 3; значения параметров взяты из (7).

Таблица 3 нужна для определения оптимального значения τ. В левом столбце приведены значения K для идеального случая — квант капитала $q_u = 0$. Здесь максимальное значение достигается при $\tau = 3$ и равно $\Phi_{\max}$ = 320,762; оно уже фигурировало в [1]. Когда кванты равны $q_u = 7$ и $q_u = 22$, то в расчете участвуют данные табл. 2, а именно Φ^τ и G^τ — см. (9). Здесь максимум достигается при $\tau = 2$ и $\tau = 3$, соответственно, и максимальные значения равны: $K_{\max}$ = 317,727 и $K_{\max}$ = 315,816 — тоже соответственно. Вывод, который следует из этих данных, таков: дискретность прироста капитала мало влияет на максимальное значение — в пределах единиц процентов. Других определенных выводов нет.

Таблица 3

Зависимости $K(\tau)$; оставшиеся неиспользованными средства направляются на инвестиции последующих шагов, кроме последнего шага, где остаток направляется на дивиденды

τ	$q_u = 0$	$q_u = 7$	$q_u = 22$
0	303,248	303,248	303,248
1	313,352	312,678	310,658
2	319,748	**317,727**	315,109
3	**320,762**	317,152	**315,816**
4	314,171	309,580	307,680
5	297,034	219,600	293,800

Отметим, что для определения оптимального целочисленного значения τ в [1] предлагались три метода: с использованием производной $dK/d\tau$, с использованием конечной формулы метода одношаговой разности и, наконец, прямым расчетом функции K при всех целых значения τ. Сейчас остается только третий метод, и это — следствие дискретной природы задачи — см. первую формулу из (8), где фигурирует операция […].

Рассмотрим еще один вариант использования неиспользованных средств: они не переносятся на следующие шаги, чтобы стать там инвестициями, а направляются на дивиденды текущего шага. Таким образом, дивиденды поступают не только на участке потребления, но и на участке накопления, и если в предыдущем рассмотрении только на последнем шаге участка накопления остаток направлялся на дивиденды, то теперь это на каждом шаге. Отметим, что вариантов использования неиспользованных средств неограниченно много; например: на инвестиции следующего шага — 30 % от остатка, на текущие дивиденды — 70 %; на инвестиции — 40 %, на дивиденды — 60 % и т. д. Однако остановимся на сделанном предположении.

Проблема опять в определении оптимальной продолжительности τ: опять не удается вывести конечную формулу и опять надо рассчитывать динамики переменных для всех τ из промежутка 0; 1; … ; T и для двух значений квантов: $q_u = 7$ и $q_u = 22$. При $T = 5$ получается 12 таблиц. Две таблицы из 12 показаны ниже; значения параметров такие, как в (7).

В табл. 4 нет переменной G^t (ср. табл. 2); остаток G^t равен нулю на каждом шаге, потому что неиспользованные средства направляются на дивиденды этого шага. В табл. 4 появляется новая переменная S^t — накопленные и наращенные в банке дивиденды. Связи между переменными табл. 4 таковы (ср. (8)):

$$\Delta n^t = \left[\frac{\Pi^t}{q_u}\right];\ \Phi^t = \Phi^{t-1} + q_u\ \Delta n^t;\ D^t = \Pi^t - q_u\ \Delta n^t;$$
$$S^t = (1+\beta)\, S^{t-1} + D^t. \qquad (10)$$

Техника расчета таблиц типа табл. 4 такова. До $t = \tau$ (включая этот шаг) прибыль Π^t первоочередно направляется на покупку дополнительных комплектов Δn^t, и их число определяется первой формулой (10). По второй формуле определяется капитал Φ^t на конец периода t. Неиспользованные средства передаются на дивиденды текущего периода — см. третью запись в (10), а они, в свою очередь, передаются механизму наращения (банку) — см. четвертую запись (10). Начиная с шага $t = \tau + 1$ вся прибыль направляется только на дивиденды, и в строках $t = \tau + 1$; …; T изменяется только величина наращенных в банке средств. Суммарное богатство K рассчитывается по (6).

В деле определения оптимального τ 12 таблиц типа табл. 4 являются промежуточным материалом; из них выбираются две зависимости $K(\tau)$ для $q_u = 7$ и $q_u = 22$ (см. табл. 5).

Сравним данные табл. 3 и 5. При $q_u = 7$ максимум в первой таблице составляет $K_{\max} = 317{,}727$; во вто-

Таблица 4

Динамики переменных в варианте направления неиспользованных средств на дивиденды текущего шага

$q_u = 7$; $\tau = 4$; $K = 313{,}658$							
t	Φ^{t-1}	S^{t-1}	Π^t	Δn^t	D^t	Φ^t	S^t
1	100	0	30	4	2	128	2
2	128	2	38,4	5	3,4	163	5,8
3	163	5,8	48,9	6	6,9	205	13,86
4	205	13,86	61,5	8	5,5	261	22,132
5	261	22,132	78,3	0	78,3	261	104,858
$q_u = 22$; $\tau = 3$; $K = 314{,}706$							
t	Φ^{t-1}	S^{t-1}	Π^t	Δn^t	D^t	Φ^t	S^t
1	100	0	30	1	8	122	8
2	122	8	36,6	1	14,6	144	24,2
3	144	24,2	43,2	1	21,2	166	50,24
4	166	50,24	49,8	0	49,8	166	110,088
5	166	110,088	49,8	0	49,8	166	181,906

Таблица 5

Зависимость $K(\tau)$; оставшиеся неиспользованными средства направляются на дивиденды текущего шага

τ	$q_u = 7$	$q_u = 22$
0	303,248	303,248
1	312,678	310,658
2	318,418	314,266
3	**319,258**	**314,706**
4	313,658	310,306
5	298,258	301,506

рой $K_{\max} = 319{,}258$, т. е. во второй больше, чем в первой. При $q_u = 22$ в первой таблице — $K_{\max} = 315{,}816$, во второй — $K_{\max} = 314{,}706$ — в первой больше, чем во второй. При $q_u = 7$ выгоднее отдавать неиспользованные средства на дивиденды; при $q_u = 22$ — наоборот. Из чего можно заключить, что нет приоритетного использования неиспользованных средств: дискретность прироста капитала делает непредсказуемым результаты анализа. Одно положительное свойство все же может быть отмечено: разница мала и отличие от идеального случая не превосходит единиц процентов.

Причиной интереса к дивидендному направлению было такое соображение: направленный на инвестиции остаток дожидается один период, прежде чем включится в действие механизм сложных процентов с темпом ρ, а направленный на дивиденды — включается на том же периоде, правда, в менее эффективный механизм — β. Предполагаемое преимущество не обнаружилось!

1.2. Источник инвестиций — кредит

Кредит непосредственно направляется на инвестиции и погашается из прибыли, так что кредит — непосредственный, а прибыль — опосредованный источник инвестиций.

В [3] установлены правила оптимального кредитования:

- в момент $t = 0$ кредит Q^0 поступает на предприятие, сразу превращается в действующие мощности и наличные запасы, становясь, таким образом, действующим капиталом;
- объем Q^0 и срок предоставления кредита τ должны быть согласованными: в конце срока τ остаток на ссудном счете предприятия должен быть нулевым, что является основанием для связи (4).

Дискретность приростов капитала вносит дополнения в эти правила: кредит предоставляется на срок τ, который равен целому числу периодов; объем кредита, естественно, не получается кратным целому числу квантов капитала (можно сделать объем кратным, но тогда получится нецелое число периодов); после выделения целого числа квантов n, неиспользованные средства немедленно направляются на дивиденды D^0. Объем кредита выражается так: $Q^0 = q_u\, n^0 + D^0$; работающая на производство прибыли часть есть $q_u\, n^0$.

Уравнение (3) на последнем шаге погашения τ выглядит следующим образом:

$$Q^\tau = (\,q_u\, n^0 + D^0\,)\,(1+\alpha)^\tau - \\ -\rho\,(\,\Phi^0 + q_u\, n^0\,)\,\frac{(1+\alpha)^\tau - 1}{\alpha} = 0. \qquad (11)$$

В первом члене фигурирует объем заимствования: $q_u\, n^0 + D^0$; во втором в составе действующего капитала — дополнительный капитал $q_u\, n^0$.

Представим дивиденды D^0 в таком виде (см. (11)):

$$D^0 = q_u \left\{1 - \rho\frac{1-(1+\alpha)^{-\tau}}{\alpha}\right\} \times \\ \times \left\{ \frac{\Phi^0}{q_u} \frac{\rho\dfrac{1-(1+\alpha)^{-\tau}}{\alpha}}{1-\rho\dfrac{1-(1+\alpha)^{-\tau}}{\alpha}} - n^0 \right\}. \qquad (12)$$

Определим число квантов (целое число) n^0 следующим выражением (см. (8), (10)):

$$n^0 = \left[\frac{\Phi^0}{q_u} \frac{\rho\dfrac{1-(1+\alpha)^{-\tau}}{\alpha}}{1-\rho\dfrac{1-(1+\alpha)^{-\tau}}{\alpha}} \right] = \left[\frac{Q^0}{q_u} \right]. \qquad (13)$$

Надо объем кредита Q^0 (4), который рассчитывался без условия дискретности, разделить на стоимость комплекта q_u и взять целое от результата деления. После подстановки (13) в (12) получается такая формула для D^0:

$$D^0 = q_u \left\{1 - \rho\frac{1-(1+\alpha)^{-\tau}}{\alpha}\right\} \times \\ \times \left\{ \frac{\Phi^0}{q_u} \frac{\rho\dfrac{1-(1+\alpha)^{-\tau}}{\alpha}}{1-\rho\dfrac{1-(1+\alpha)^{-\tau}}{\alpha}} - \left[\frac{\Phi^0}{q_u} \frac{\rho\dfrac{1-(1+\alpha)^{-\tau}}{\alpha}}{1-\rho\dfrac{1-(1+\alpha)^{-\tau}}{\alpha}} \right] \right\} = \\ = q_u \left\{1 - \rho\frac{1-(1+\alpha)^{-\tau}}{\alpha}\right\} \left\{ \frac{Q^0}{q_u} - \left[\frac{Q^0}{q_u}\right] \right\}. \qquad (14)$$

Разность во вторых фигурных скобках не больше единицы, потому что это — разность между числом и его целой частью. Величина в первых фигурных скобках есть знаменатель в (4). Эта величина также не больше единицы, но к тому же, и это существенно, она должна быть положительной и достаточно далекой от нуля. Когда знаменатель из (4) прибли-

Таблица 6

Зависимости $\Phi^T(\tau)$, $n^0(\tau)$, $D^0(\tau)$, $K(\tau)$; оставшиеся неиспользованными кредитные средства направляются на дивидендный остаток в начальный момент

	$q_u = 0$		$q_u = 7$				$q_u = 22$			
τ	Φ^T	K	n^0	Φ^T	D^0	K	n^0	Φ^T	D^0	K
0	100	273,3	0	100	0	273,3	0	100	0	273,3
1	131,6	277,7	4	128	2,7	276,9	1	122	7,3	275,6
2	176,1	**280,3**	1	170	3,4	279,2	3	166	5,7	278,5
3	241,3	279,9	20	240	0,5	**279,8**	6	232	3,9	**278,7**
4	343,1	274,4	34	338	1,5	274,1	11	342	0,3	274,3
5	519,8	259,9	59	513	1,3	259,8	19	518	0,3	257,4

жается к нулю, то объем кредита Q^0 неограниченно возрастает, и вступает банковское ограничение на объем предоставляемого кредита. Этот вопрос подробно обсуждается в [3]. Итак, одна и другая фигурные скобки не больше единицы и их произведение тоже не больше единицы, поэтому D^0 — неиспользованные для роста средства — не превышают стоимость комплекта q_u. Если бы было не так, то из D^0 можно было бы выделить квант или кванты для дополнительного увеличения капитала. Число комплектов n^0 определяется по (13), дивидендный остаток D^0 — по (14); финальный капитал:

$$\Phi^T = \Phi^\tau = \Phi^0 + q_u\, n^0. \qquad (15)$$

Напомним, что финальный капитал Φ^T совпадает с капиталом в конце участка накопления-погашения, потому что после него инвестиции равны нулю.

Выражение для K, аналогичное (9), таково:

$$K = \Phi^\tau \left[\chi + \rho \frac{(1+\beta)^{T-\tau} - 1}{\beta} \right] + D^0 (1+\beta)^T. \quad (16)$$

Суммарное богатство K складывается из рыночной стоимости капитала в конечный момент планового периода ($\chi\Phi^T = \chi\Phi^\tau$) и наращенных на участке потребления дивидендов, равных всей прибыли $D^t = \rho\Phi^\tau$ — ср. (9); последним в (16) выступает наращенный дивидендный остаток $D^0(1+\beta)^T$. Он направляется в банк в момент $t = 0 + 0$, поэтому число периодов его наращения равняется T. Расчеты по формулам (13)–(16) приведены в табл. 6.

Расчеты проведены для значений параметров (7), но вместо $\chi = 0{,}8$ взято $\chi = 0{,}5$.

Под надписью $q_u = 0$ даны Φ^T и K для «идеального» случая — квант капитала — нулевой.

Выводы, следующие из табл. 6, повторяют заключение после табл. 3: примеры дискретности капитала мало (в пределах единиц процентов) влияют на результат: в идеальном случае критериальный показатель равняется 280,3, при $q_u = 7$ — 279,8, а при $q_u = 22$ — 278,7. В нашем примере бóльшая величина кванта соответствует меньшему значению критерия.

2. Одномоментное инвестирование — одномоментный ввод в действие — источник инвестиций — прибыль

Весь объем инвестиций поставляется в начальный момент строительства, по истечении срока строительства весь вложенный объем средств превращается в действующий капитал.

2.1. Автономный (т. е. без привлечения заемных средств) рост капитала

На первом шаге прибыль аккумулируется и в конце шага вся направляется на строительство. Сейчас считается, что квант капитала равняется нулю и что любое малое количество средств может превращаться в действующий капитал. В течение второго шага инвестиции осваиваются строительной организацией и в конце шага возникает действующий капитал, равный объему прибыли, аккумулированной на первом шаге. Это случай продолжительности, равной одному периоду. Сначала рассмотрим именно такой случай, а затем перейдем к бóльшим продолжительностям.

Таблица 7

Продолжительность строительства

	$\xi = 0$	$\xi = 1$	$\xi = 2$
	$\Phi^t = \Phi^{t-1} + \rho\Phi^{t-1}$	$\Phi^t = \Phi^{t-1} + \rho\Phi^{t-2}$	$\Phi^t = \Phi^{t-1} + \rho\Phi^{t-3}$
$t = 1$	$\Phi^1 = \Phi^0 + \rho\Phi^0 = (1+\rho)\Phi^0$	$\Phi^1 = \Phi^0$	$\Phi^1 = \Phi^0$
$t = 2$	$\Phi^2 = \Phi^1 + \rho\Phi^1 = (1+\rho)^2\Phi^0$	$\Phi^2 = \Phi^1 + \rho\Phi^0 = (1+\rho)\Phi^0$	$\Phi^2 = \Phi^0$
$t = 3$	$\Phi^3 = \Phi^2 + \rho\Phi^2 = (1+\rho)^3\Phi^0$	$\Phi^3 = \Phi^2 + \rho\Phi^1 = (1+2\rho)\Phi^0$	$\Phi^3 = \Phi^2 + \rho\Phi^0 = (1+\rho)\Phi^0$
$t = 4$	$\Phi^4 = \Phi^3 + \rho\Phi^3 = (1+\rho)^4\Phi^0$	$\Phi^4 = \Phi^3 + \rho\Phi^2 = (1+3\rho+\rho^2)\Phi^0$	$\Phi^4 = \Phi^3 + \rho\Phi^1 = (1+2\rho)\Phi^0$
$t = 5$	$\Phi^5 = \Phi^4 + \rho\Phi^4 = (1+\rho)^5\Phi^0$	$\Phi^5 = \Phi^4 + \rho\Phi^3 = (1+4\rho+3\rho^2)\Phi^0$	$\Phi^5 = \Phi^4 + \rho\Phi^3 = (1+3\rho)\Phi^0$

Итак, в конце второго периода появляется первый дополнительный действующий капитал. Его производит подрядчик — строительная организация — и передает в конце второго периода заказчику — предприятию. Однако на протяжении второго периода предприятие тоже работает, производя прибыль при том значении капитала, которое было в начале первого периода; за второй период предприятие нарабатывает такую же прибыль, которая была аккумулирована в конце первого периода.

В конце первого периода капитал равен стартовому значению; в конце второго периода — стартовому значению плюс прибыль первого периода; в конце третьего периода — значению в конце второго периода плюс прибыль за второй период; далее прибыль уже начисляется от стартового значения и прибылей предыдущих периодов.

Далее будут использоваться привычные обозначения: Φ^t — капитал на конец периода t, Φ^0 — стартовое значение капитала, $\Pi^t = \rho\Phi^{t-1}$ — прибыль за период t; новое обозначение ξ — продолжительность строительства.

В конце первого периода капитал равен $\Phi^1 = \Phi^0$ и аккумулированная прибыль $\Pi^1 = \rho\Phi^0$; в конце второго периода $\Phi^2 = \Phi^1 + \Pi^1 = \Phi^0 + \rho\Phi^0$ и аккумулированная прибыль $\Pi^2 = \rho\Phi^0$; в конце третьего периода $\Phi^3 = \Phi^2 + \Pi^2 = \Phi^0 + 2\rho\Phi^0$; в конце периода t:

$$\Phi^t = \Phi^{t-1} + \Pi^{t-1} = \Phi^{t-1} + \rho\Phi^{t-2}. \qquad (17)$$

Если запаздывания нет и аккумулированная за период прибыль в конце периода превращается в действующий капитал, то рекуррентная формула, которая фигурировала, напримерю, в [1], имеет вид:

$$\Phi^t = \Phi^{t-1} + \Pi^t = \Phi^{t-1} + \rho\Phi^{t-1} \;\rightarrow\; \Phi^t = (1+\rho)^t\,\Phi^0. \qquad (18)$$

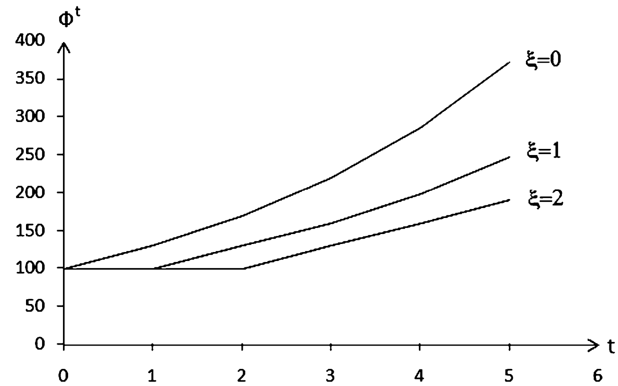

Рис. 1. Динамика капитала при разных продолжительностях строительства: ξ = 0; 1; 2 (Φ^0=100; ρ = 0,3)

Последним в (18) дано конечное выражение для капитала на шаге t через начальное значение Φ^0 и номер шага t — известная формула сложных процентов. В табл. 7 представлены три последовательности: без запаздывания ($\xi = 0$), с запаздыванием в один период ($\xi = 1$) и в два периода ($\xi = 2$).

Вообще, динамика капитала Φ^t при продолжительности ξ периодов подчиняется следующему конечноразностному уравнению:

$$\Phi^t = \Phi^{t-1} + \Pi^{t-\xi} = \Phi^{t-1} + \rho\Phi^{t-\xi-1};$$

$$\Phi^1 = \ldots = \Phi^{\xi} = \Phi^0. \qquad (19)$$

В конце периода t в действие вступает прибыль, порожденная капиталом на шаге $t-\xi-1$; на первых ξ шагах капитал равняется стартовому значению.

На рис. 1 представлены три динамики капитала: ξ = 0; 1; 2. В идеальном случае ($\xi = 0$) капитал растет как показательная функция времени. При задержке, равной одному периоду ($\xi = 1$), на первом шаге капитал остается таким же, как на старте, а потом увеличивается, но медленнее, чем в идеальном случае. Когда продолжительность строительства составляет два периода ($\xi = 2$), капитал остается на стартовом уровне в течение двух шагов, а потом растет, еще более уступая идеальному случаю. На пятом шаге

$$\Phi^5\Big|_{\xi=1}\Big/\Phi^5\Big|_{\xi=0} = 0{,}66;\ \Phi^5\Big|_{\xi=2}\Big/\Phi^5\Big|_{\xi=0} = 0{,}51 \qquad (20)$$

потери от издержек оказываются весьма значительными ($\rho = 0{,}3$).

Еще одним показателем потерь, увеличивающихся с ростом задержки ξ , являются так называемые эквивалентные рентабельности — те рентабельности ρ_ξ при задержке ξ , которые приводят к тому же капиталу, что и в идеальном случае при рентабельности ρ_0 . Например, если капиталы совпадают при $t = 5$, то эквивалентные рентабельности показаны в табл. 8.

Таблица 8

Эквивалентные рентабельности ($t = 5$)

ρ_0	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
ρ_1	0	0,138	0,303	0,495	0,713	0,958
ρ_2	0	0,203	0,496	0,904	1,459	2,198

В верхней строке даны значения рентабельности ρ_0 , с которой растет капитал в идеальном случае ($\xi = 0$); во второй строке рентабельность ρ_1, которая должна была бы быть, чтобы на пятом шаге ($t = 5$) капитал при задержке $\xi = 1$ совпал бы с капиталом идеального случая; в третьей строке эквивалентные рентабельности для $\xi = 2$. Рентабельности ρ_1 и ρ_2 являются решениями уравнений, представленных в табл. 7:

$$1 + 4\rho_1 + 3\rho_1^{\,2} = (1+\rho_0)^5\ ;\ \ 1 + 3\rho_2 = (1+\rho_0)^5 . \qquad (21)$$

Видно, что эквивалентные рентабельности на пятом шаге в разы́ превышают исходные рентабельности.

Вернемся к формулам табл. 7. Левая запись (с конечной формулой) удобнее для операций, где требуются значения Φ^t не только в дискретных точках. Для нахождения оптимального целочисленного момента перехода с накопления на потребление в [1] определялась точка (нецелочисленная), где производная равнялась нулю, затем рассчитывались значения функции в соседних целочисленных точках, и выбиралась та, в которой значение больше. В другом методе, методе одношаговой разности (см. также [1]), находился корень уравнения (нецелочисленный) и затем ближайшее к нему старшее (или младшее) целое число.

Успех обоих методов обусловлен тем, что уравнения, к которым приводятся оба метода, решаются в аналитическом виде, т. е. искомые моменты времени выражаются в явном виде через параметры задачи. В нашем случае также может быть представлена формула, явно выражающая Φ^t через t . Однако уравнение, корень которого должен быть определен, в аналитическом виде не решается. Тем не менее далее приводится вывод формулы Φ^t для $\xi = 1$ (17).

Решение однородного конечноразностного уравнения (17) ищется в виде:

$$\Phi^t = f^t , \qquad (22)$$

где f — основание степени, а t — показатель степени. После подстановки (22) в (17) получается следующее уравнение для f :

$$f^t = f^{t-1} + \rho f^{t-2} \to\ f^2 = f + \rho \to\ f_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \rho}\ ;$$

$$f_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \rho}\ . \qquad (23)$$

Решение принимает такой вид:

$$\Phi^t = C_1\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \rho}\right)^t + C_2\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \rho}\right)^t , \qquad (24)$$

где C_1, C_2 — константы, подлежащие определению из начальных условий (19):

$$\Phi^t\Big|_{t=0} = \Phi^0;\ \Phi^t\Big|_{t=1} = \Phi^0 . \qquad (25)$$

Окончательное решение таково:

$$\Phi^t = \frac{\Phi^0}{\sqrt{1+4\rho}}\left[\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \rho}\right)^{t+1} - \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \rho}\right)^{t+1}\right] . \qquad (26)$$

Если $\xi = 2$, то вместо квадратного уравнения из (23) придется решать кубическое; если $\xi = 3$, то — уравнение четвертой степени. Одним словом, единственным методом для определения оптимального момента перемены режимов остается последовательный перебор этих моментов.

2.2. Структура оптимального решения

В этом разделе устанавливается оптимальная структура решения: что раньше — потребление или накопление, и при каких условиях один режим предшествует другому. Выводы делаются для продолжительности строительства, равной одному периоду $\xi = 1$. В нашем случае оптимизационная задача записывается так (ср. [1]):

$$\max_{\Phi^t, U^t, D^t \geq 0} K = \chi\Phi^T + \sum_{t=1}^{T} D^t (1+\beta)^{T-t} \Big/ \rho\Phi^{t-1} = U^t + D^t;$$

$$\Phi^t = \Phi^{t-1} + U^{t-1};\ t = 1; 2; \ldots; T; \tag{27}$$

$$\Phi^t\Big|_{t=0} = \Phi^0;\ \Phi^t\Big|_{t=1} = \Phi^0.$$

Первая запись — уже комментировавшееся выражение для суммарного богатства; затем — уравнение распределения прибыли $\rho\Phi^{t-1}$ между инвестициями U^t и дивидендами D^t и уравнение роста капитала Φ^t. Эти два уравнения записываются для всех периодов интервала планирования — от первого ($t = 1$) до последнего ($t = T$). Начальные условия выглядят так: стартовое значение капитала и значение капитала в конце первого периода совпадают и равняются Φ^0. Различие между нашей задачей (27) и той, которая рассматривается в [1], в том, что на шаге t превращаются в действующий капитал те средства, которые направляются на инвестиции в конце шага $t-1$ — один период отдается на строительство. Поэтому капитал на шаге $t = 1$ не меняется по сравнению со стартовым значением.

Далее составляется функция Лагранжа:

$$L = \chi\Phi^T + \sum_{t=1}^{T}\Big[D^t(1+\beta)^{T-t} + p^t\left(-\Phi^t + \Phi^{t-1} + U^{t-1}\right) +$$
$$+ r^t\left(\rho\Phi^{t-1} - U^t - D^t\right)\Big] =$$
$$= (\chi - p^T)\Phi^T + \sum_{t=1}^{T-1}(-p^t + p^{t+1} + \rho r^{t+1})\Phi^t + \tag{28}$$
$$+ \sum_{t=1}^{T}\Big\{\left(p^{t+1} - r^t\right)U^t + \left[(1+\beta)^{T-t} - r^t\right]D^t\Big\} +$$
$$+ (p^1 + \rho r^1)\Phi^0 = (\chi - p^T)\Phi^T + \sum_{t=1}^{T-1}\left(-p^t + p^{t+1} + \rho r^{t+1}\right)\Phi^t +$$
$$+ \sum_{t=1}^{T}\left(\varphi^t U^t + \psi^t D^t\right) + (p^1 + \rho r^1)\Phi^0$$
$$(\varphi^t = p^{t+1} - r^t;\ \psi^t = (1+\beta)^{T-t} - r^t).$$

Согласно формализму Лагранжа следует найти такие переменные Φ^t, U^t, D^t, которые доставляют абсолютный максимум (т. е. без учета исходных связей) функции L; искомые переменные таковы:

$$p^t = p^{t+1} + \rho r^{t+1}\ (t = 1; 2; \ldots; T);\ p^T = \chi;$$
$$U^t \geq 0 \text{ при } \varphi^t = 0;$$
$$U^t = 0 \text{ при } \varphi^t < 0\ (t = 1; 2; \ldots; T); \tag{29}$$
$$D^t \geq 0 \text{ при } \psi^t = 0;\ D^t = 0$$
$$\text{при } \psi^t < 0\ (t = 1; 2; \ldots; T).$$

Все комментарии, даваемые в [1] по поводу канонической задачи, действительны в нашем случае; единственное отличие — формула для φ^t; там — $\varphi^t = p^t - r^t$, здесь — $\varphi^t = p^{t+1} - r^t$; отличие связано с тем, что здесь капитал прирастает не за счет средств текущего шага, а за счет средств предыдущего шага.

Теперь можно обратиться к вопросу о свойствах оптимального решения. Во-первых, не может быть, чтобы инвестиции и дивиденды в оптимальном развитии одновременно обращались в ноль, тогда прибыль бы производилась и никуда не распределялась; поэтому не может быть одновременно $\varphi^t < 0$ и $\psi^t < 0$. Во-вторых, не может быть, чтобы при оптимальном развитии две переменные U^t и D^t были положительными одновременно (не считая одного исключительного случая, который прямо сейчас будет рассмотрен). Действительно, если $U^t > 0$, то $\varphi^t = 0$ и если $D^t > 0$, то $\psi^t = 0$; но когда U^t и D^t одновременно положительные, то одновременно равны нулю φ^t и ψ^t и для двух переменных p^t и r^t по условиям оптимальности (29) получаются три условия:

$$p^t = p^{t+1} + \rho r^{t+1};\ p^{t+1} = r^t;$$
$$r^t = (1+\beta)^{T-t} \text{ при } p^T = \chi. \tag{30}$$

Значит, как и в каноническом случае, прибыль направляется либо на инвестиции, либо на дивиденды. По-прежнему, часть планового интервала, где прибыль направляется на инвестиции, будет называться участком накопления, часть, на которой прибыль отдается на дивиденды — участком потребления.

Исключение таково:

$$\rho = \beta(1+\beta),\ \chi = (1+\beta). \tag{31}$$

Отметим, что в каноническом случае таким исключением является $\rho = \beta$; $\chi = 1$. При таком совпадении выполняются три равенства (30) и граничное условие. Действительно:

$$r^t=(1+\beta)^{T-t};\ p^t=r^{t-1}=(1+\beta)^{T-t+1}\to$$
$$\to(1+\beta)^{T-t+1}=(1+\beta)^{T-t}+\rho(1+\beta)^{T-t-1}\to$$
$$\to(1+\beta)^2=1+\beta+\rho\to\rho=\beta(1+\beta),$$
$$p^T=\chi=1+\beta. \tag{32}$$

Последние две записи подтверждают (31).

Обратимся к задаче в прямых переменных (27), чтобы истолковать исключительное решение (32). Воспользуемся переменной S^t — накопленной и наращенной суммой на депозите, а также K^t — текущим суммарным богатством. Система (27) с этими переменными имеет следующий вид:

$$K^t=(1+\beta)\ \Phi^t+S^t;$$
$$\beta(1+\beta)\ \Phi^{t-1}=U^t+D^t;$$
$$\Phi^t=\Phi^{t-1}+U^{t-1};\ S^t=(1+\beta)\ S^{t-1}+D^t;$$
$$K^0=(1+\beta)\ \Phi^0;\ U^0=0. \tag{33}$$

Здесь уже сделаны замены (31).

В первое выражение (33) подставим Φ^t и S^t из третьей и четвертой записей:

$$K^t=(1+\beta)\,(\Phi^{t-1}+U^{t-1})+(1+\beta)\ S^{t-1}+D^t=$$
$$=(1+\beta)\,(\Phi^{t-1}+S^{t-1}+U^{t-1})+\beta(1+\beta)\ \Phi^{t-1}-U^t=$$
$$=(1+\beta)\left[(1+\beta)\Phi^{t-1}+S^{t-1}+U^{t-1}\right]-U^t\to \tag{34}$$
$$\to K^t+U^t=(1+\beta)\,(K^{t-1}+U^t)\to K^t+U^t=$$
$$=(1+\beta)^{t+1}\ \Phi^0.$$

Сначала заменяется D^t по второй формуле (33); затем после первой стрелки переносится U^t в левую часть и получается конечноразностное уравнение относительно суммы K^t+U^t с начальными условиями из (2.18). Решение его дается последней формулой (34).

При $t=T$ прибыль не направляется на инвестиции: $U^T=0$, потому что эти инвестиции скажутся на Φ^{T+1}, а величина Φ^{T+1} не входит в зачет, поэтому:

$$K^T=(1+\beta)^{T+1}\ \Phi^0. \tag{35}$$

Получается, что распределение прибыли между инвестициями и дивидендами не влияет на величину критерия. Подчеркнем, что вывод действителен при исключительных значениях параметров ρ и χ (31).

В [1] значения $\rho=\beta$, $\chi=1$ названы точкой М. Миллера и Ф. Модильяни. Там и здесь (там — без задержки ввода, здесь — с одношаговой задержкой) действительно высказывание: «Величина пирога равняется тому, что съедено, и она не изменяется в результате разрезания его на куски».

Третье свойство оптимального решения относится к взаимному расположению участка накопления и участка потребления. Выразим p^t и r^t через φ^t и ψ^t по формулам (28):

$$r^t=(1+\beta)^{T-t}-\psi^t;\ p^{t+1}=r^t+\varphi^t=(1+\beta)^{T-t}-\psi^t+$$
$$+\varphi^t\to p^t=(1+\beta)^{T-t+1}-\psi^{t-1}+\varphi^{t-1}; \tag{36}$$

и подставим в верхнее уравнение (29):

$$p^t-p^{t+1}+\rho r^{t+1}=0\to\psi^{t-1}-\psi^t-\rho\psi^{t+1}-\varphi^t+\varphi^{t-1}=$$
$$=(1+\beta)^{T-t-1}\left[\rho-\beta(1+\beta)\right]. \tag{37}$$

Вывод, сделанный в [1] из аналогичного соотношения, таков: участок накопления один (или не одного), участок потребления тоже один (или его нет); при $\rho>\beta$ накопление предшествует потреблению, при $\rho<\beta$ — наоборот. В нашем случае действительна лишь «половина» подобного утверждения: при $\rho>\beta(1+\beta)$ участок потребления, на котором двойственная переменная ψ равна нулю в трех последовательно идущих точках: $\psi^{t-1}=\psi^t=\psi^{t+1}=0$, не сменится участком накопления:

$$\varphi^t-\varphi^{t-1}-(1+\beta)^{T-t-1}\left[\rho-\beta(1+\beta)\right]<0. \tag{38}$$

Бывшая отрицательной в точке $t-1$ переменная φ в следующий момент t станет «более отрицательной»; следовательно, режим потребления не сменится режимом накопления. Доказать, что при $\rho<\beta(1+\beta)$ порядок следования режимов обратный, не получается.

В этой работе предлагается метод перебора для построения полной картины последовательностей режимов.

2.3. Картина последовательностей режимов — двойственная задача

Сначала рассматривается задача в двойственных переменных, после чего — в прямых. Конечная цель предлагаемого перебора состоит в том, чтобы для каждой четверки значений параметров ρ, β, χ, T установить оптимальный порядок следования режимов и оптимальный момент перехода с режима на режим. Технически решается обратная задача: задается порядок и задается номер шага, на котором происходит смена режимов, и определяется область в пространстве ρ, β, χ, T, где этот вариант реализуется. Такой подход возможен при фиксированной и небольшой продолжительности планового интервала T: в последующих расчетах принято $T = 5$. Если окажется, что вся область параметров плотно и без повторов покрыта нашими вариантами, то подход оправдан.

Введем следующие обозначения: $\langle \tau = \ldots,\ \eta = \ldots \rangle$ и $\langle \eta = \ldots,\ \tau = \ldots \rangle$, где вместо многоточий будут фигурировать числа от «0» до «5». В обоих обозначениях, как обычно, τ — продолжительность накопления, η — продолжительность потребления. В первом обозначении τ на первом месте, и это означает, что интервал планирования открывает накопление; во втором — η на первом месте, и здесь потребление в начале процесса. Представленные далее расчеты проведены для $T = 5$, значит, $\tau + \eta = 5$. Как уже отмечалось, последний шаг во всех вариантах отдается на потребление, потому что прибыль, отданная на накопление на пятом шаге, превратится в действующий капитал на шестом шаге, т. е. вне интервала планирования. Возможны следующие варианты при $T = 5$ и $\eta \geq 1$:

накопление $\rightarrow$ *потребление*: $\langle \tau = 0,\ \eta = 5 \rangle$;

$$\langle \tau = 1,\ \eta = 4 \rangle;$$

$$\langle \tau = 2,\ \eta = 3 \rangle; \langle \tau = 3,\ \eta = 2 \rangle;$$

$$\langle \tau = 4,\ \eta = 1 \rangle; \qquad (39)$$

потребление $\rightarrow$ *накопление*: $\langle \eta = 1,\ \tau = 4 \rangle$;

$$\langle \eta = 2,\ \tau = 3 \rangle;$$

$$\langle \eta = 3,\ \tau = 2 \rangle; \langle \eta = 4,\ \tau = 1 \rangle; \langle \eta = 5,\ \tau = 0 \rangle.$$

Первый вариант в случае *накопление* $\rightarrow$ *потребление* совпадает с последним вариантом в случае *потребление* $\rightarrow$ *накопление*: весь интервал планирования отдается только на потребление. Последний вариант в первом случае совпадает с первым вариантом во втором случае: на последнем шаге — обязательное потребление, предшествующие четыре шага — накопление.

Другие варианты помимо (39) не рассматриваются: считается, что на интервале планирования может быть не более одного участка накопления и не более одного участка потребления, не считая обязательного потребления на последнем шаге интервала. Это весьма сильное предположение, и оно будет оправдано, если вся область параметров ρ, β, χ будет покрыта вариантами (39) — об этом говорилось только что.

Сейчас задача состоит в том, чтобы найти области существования последовательностей (39) в пространстве параметров ρ, β, χ, для чего потребуется определить переменные двойственной задачи p^t, r^t, φ^t, ψ^t на каждом из пяти временны́х шагов — $t = 1 \div 5$. Как следует из условий оптимальности (28), (29):

на участке накопления: $\varphi^t = 0$, $\psi^t < 0$;

на участке потребления: $\psi^t = 0$, $\varphi^t < 0$; (40)

на обоих участках: $p^t = p^{t+1} + \rho r^{t+1}$, $\varphi^t = p^{t+1} - r^t$,

$$\psi^t = (1+\beta)^{5-t} - r^t,\ p^5 = \chi.$$

Рассмотрим подробно определение области существования для последовательности $\langle \tau = 2,\ \eta = 3 \rangle$: первые два шага отдаются на накопление, завершающие три шага — на потребление. Далее, приводятся пошаговые значения p^t, r^t, φ^t, ψ^t, после этого делаются комментарии:

$$t = 5:\ \psi^5 = 0;\ r^5 = 1;\ p^5 = \chi;$$

$$t = 4:\ \psi^4 = 0;\ r^4 = (1+\beta);\ p^4 = \chi + \rho;$$

$$\varphi^4 = \chi - (1+\beta);$$

$$t = 3:\ \psi^3 = 0;\ r^3 = (1+\beta)^2;\ p^3 = \chi + \rho\frac{(1+\beta)^2 - 1}{\beta};$$

$$\varphi^3 = \chi + \rho - (1+\beta)^2;$$

$$t = 2:\ \varphi^2 = 0;\ p^2 = \chi + \rho\frac{(1+\beta)^3 - 1}{\beta};$$

$$r^2 = \chi + \rho\frac{(1+\beta)^2 - 1}{\beta}; \qquad (41)$$

$$\psi^2 = (1+\beta)^3 - \rho\frac{(1+\beta)^2 - 1}{\beta} - \chi;$$

$$t = 1:\ \varphi^1 = 0;\ p^1 = \chi(1+\rho) + \rho\frac{(1+\beta)^3 - 1}{\beta} + \rho^2\frac{(1+\beta)^2 - 1}{\beta};$$

$$r^1 = \chi + \rho\frac{(1+\beta)^3 - 1}{\beta};$$

$$\psi^1 = (1+\beta)^4 - \rho\frac{(1+\beta)^3 - 1}{\beta} - \chi.$$

Вычисления начинаются с последнего шага $t = 5$ и ведутся в направлении, обратном течению времени, и это потому, что в двойственной задаче именно на последнем шаге задается краевое условие $p^5 = \chi$.

На пятом шаге действует режим потребления $\psi^5 = 0$, поэтому $r^5 = 1$, кроме того, согласно (30) $p^5 = \chi$ (см. также (40)); таким образом, обе двойственные переменные r^5 и p^5 определены. Что касается комбинации двойственных переменных φ^5, то она не определяется на этом шаге, потому что неизвестно значение p^6.

Четвертый шаг также относится к потреблению, поэтому $\psi^4 = 0$ (41), откуда $r^4 = (1+\beta)$; переменная p^4 определяется по (40) и (41): $p^4 = p^5 + \rho r^5 = \chi + \rho$; переменная φ^4 по условиям оптимальности должна быть отрицательной; ограничения на параметры на четвертом шаге таковы: $\varphi^4 = p^5 - r^4 = \chi - (1+\beta) < 0$ и

$$\chi < (1+\beta)\,. \tag{42}$$

Третий шаг еще принадлежит потреблению: $\psi^3 = 0$ и $r^3 = (1+\beta)^2$; опять по первой формуле из третей строки (40) находится p^3:

$$p^3 = p^4 + \rho r^4 = \chi + \rho + \rho(1+\beta) = \chi + \rho\frac{(1+\beta)^2 - 1}{\beta}\,.$$

Переменная φ^3 по второй формуле из третей строки (40) определяется так: $\varphi^3 = p^4 - r^3 = \chi + \rho - (1+\beta)^2$ и ограничение на третьем шаге выглядит следующим образом:

$$\chi < (1+\beta)^2 - \rho\,. \tag{43}$$

На втором шаге действует режим накопления; здесь $\varphi^2 = 0$, откуда

$$r^2 = p^3 = \chi + \rho\frac{(1+\beta)^2 - 1}{\beta}\,,$$

p^2 и ψ^2 на этом шаге таковы:

$$p^2 = p^3 + \rho r^3 = \chi + \rho\frac{(1+\beta)^3 - 1}{\beta}$$

$$\text{и } \psi^2 = (1+\beta)^3 - r^2 = (1+\beta)^3 - \rho\frac{(1+\beta)^2 - 1}{\beta} - \chi\,.$$

На режиме накопления должно быть $\psi^t < 0$, и ограничения на параметры, доставляемые вторым шагом, имеют вид:

$$\chi > (1+\beta)^3 - \rho\frac{(1+\beta)^2 - 1}{\beta}\,. \tag{44}$$

Последний шаг при движении от конца к началу — $t = 1$ принадлежит также накоплению; на этом шаге

$$r^1 = p^2 = \chi + \rho\frac{(1+\beta)^3 - 1}{\beta}\,;$$

$$p^1 = p^2 + \rho r^2 = \chi(1+\rho) + \rho\frac{(1+\beta)^3 - 1}{\beta} + \rho^2\frac{(1+\beta)^2 - 1}{\beta}$$

$$\text{и } \psi^1 = (1+\beta)^4 - r^1 = (1+\beta)^4 - \rho\frac{(1+\beta)^3 - 1}{\beta} - \chi\,.$$

Ограничение последнего шага таково:

$$\chi > (1+\beta)^4 - \rho\frac{(1+\beta)^3 - 1}{\beta}\,. \tag{45}$$

Чтобы реализовалась последовательность $\langle \tau = 2, \eta = 3\rangle$, необходимо выполнение четырех неравенств (42)–(45). Определим область в пространстве ρ, β, χ, где одновременно выполняются эти неравенства. Введем обозначения:

$$\chi_1(\rho,\beta) = (1+\beta)^4 - \rho\frac{(1+\beta)^3 - 1}{\beta}\,;$$

$$\chi_2(\rho,\beta) = (1+\beta)^3 - \rho\frac{(1+\beta)^2 - 1}{\beta}\,; \tag{46}$$

$$\chi_3(\rho,\beta) = (1+\beta)^2 - \rho\,;\ \chi_4(\rho,\beta) = (1+\beta)\,.$$

С этими обозначениями неравенства (42)–(45) записываются так:

$$\chi > \chi_1(\rho,\beta)\,,\ \chi > \chi_2(\rho,\beta)\,,$$
$$\chi < \chi_3(\rho,\beta)\,,\ \chi < \chi_4(\rho,\beta)\,. \tag{47}$$

Два неравенства ограничивают параметр χ снизу и два — сверху. Из двух ограничений снизу надо оставить запись «больше большего»; из двух ограничений сверху — «меньше меньшего».

Выясним отношения между функциями $\chi_1(\rho,\beta)$, $\chi_2(\rho,\beta)$, $\chi_3(\rho,\beta)$, $\chi_4(\rho,\beta)$, для чего составим и вычислим разности:

$$\chi_2(\rho,\beta)\ -\ \chi_1(\rho,\beta)=$$
$$=(1+\beta)^3-\rho\frac{(1+\beta)^2-1}{\beta}-(1+\beta)^4+\rho\frac{(1+\beta)^3-1}{\beta}=$$
$$=(1+\beta)^2\left[\rho-\beta(1+\beta)\right];$$
$$\chi_4(\rho,\beta)\ -\ \chi_3(\rho,\beta)=$$
$$=(1+\beta)-(1+\beta)^2+\rho=\rho-\beta(1+\beta); \qquad (48)$$
$$\chi_3(\rho,\beta)\ -\ \chi_2(\rho,\beta)=$$
$$=(1+\beta)^2-\rho-(1+\beta)^3+\rho\frac{(1+\beta)^2-1}{\beta}=$$
$$=(1+\beta)\left[\rho-\beta(1+\beta)\right].$$

Отношения между четырьмя функциями $\chi_1(\rho,\beta)$, $\chi_2(\rho,\beta)$, $\chi_3(\rho,\beta)$, $\chi_4(\rho,\beta)$ существенно зависят от знака разности $\rho-\beta(1+\beta)$:

$$\rho>\beta(1+\beta):\ \chi_1(\rho,\beta)<$$
$$<\chi_2(\rho,\beta)<\chi_3(\rho,\beta)<\chi_4(\rho,\beta); \qquad (49)$$
$$\rho<\beta(1+\beta):\ \chi_1(\rho,\beta)>$$
$$>\chi_2(\rho,\beta)>\chi_3(\rho,\beta)>\chi_4(\rho,\beta). \qquad (50)$$

Сначала рассмотрим случай (50) как неперспективный. Нижний предел χ определяется двумя первыми неравенствами (47): $\chi>\chi_1(\rho,\beta)$, $\chi>\chi_2(\rho,\beta)$. Поскольку в (50) $\chi_1(\rho,\beta)>\chi_2(\rho,\beta)$, то нижний предел χ есть: $\chi>\chi_1(\rho,\beta)$. Верхний предел выбирается из второй пары неравенств (47): $\chi<\chi_3(\rho,\beta)$, $\chi<<\chi_4(\rho,\beta)$ и при $\chi_3(\rho,\beta)>\chi_4(\rho,\beta)$ получается ответ: $\chi<\chi_4(\rho,\beta)$. Но верхний предел $\chi_4(\rho,\beta)$ согласно (50) меньше нижнего $\chi_1(\rho,\beta)$. Поэтому неравенства (47) при порядке (50) несовместны и поэтому при $\rho<\beta(1+\beta)$ последовательность $<\tau=2,\ \eta=3>$ не существует.

Что касается случая (49), то здесь решение существует: $\rho>\beta(1+\beta)$:

$$\chi_2(\rho,\beta)<\chi<\chi_3(\rho,\beta)$$
$$\text{и}\ (1+\beta)^3-\rho\frac{(1+\beta)^2-1}{\beta}<\chi<(1+\beta)^2-\rho. \qquad (51)$$

На этом заканчивается рассмотрение варианта $\langle\tau=2,\ \eta=3\rangle$. Оставшиеся восемь вариантов последовательностей исследуются подобным образом; здесь приводятся только результаты исследований — строчки типа (51). Введем обозначения для границ областей существования:

накопление $\to$ потребление:

$$\chi_1(\rho,\beta)=(1+\beta)^4-\rho\frac{(1+\beta)^3-1}{\beta};$$
$$\chi_2(\rho,\beta)=(1+\beta)^3-\rho\frac{(1+\beta)^2-1}{\beta};$$
$$\chi_3(\rho,\beta)=(1+\beta)^2-\rho;\ \chi_4(\rho,\beta)=(1+\beta);$$

потребление $\to$ накопление:

$$\chi_5(\rho,\beta)=\frac{1}{1+2\rho}\left[(1+\beta)^4-\rho-\rho^2\right];$$
$$\chi_6(\rho,\beta)=\frac{1}{1+\rho}\left[(1+\beta)^3-\rho\right];$$
$$\chi_7(\rho,\beta)=(1+\beta)^2-\rho;\ \chi_8(\rho,\beta)=(1+\beta).$$

Области существования последовательности таковы:

$$\langle\tau=0,\ \eta=5\rangle=\langle\eta=5,$$
$$\tau=0\rangle:\ \chi<\chi_1(\rho,\beta),\ \chi<\chi_8(\rho,\beta);$$
$$\langle\tau=1,\ \eta=4\rangle:\ \chi_1(\rho,\beta)<\chi<\chi_2(\rho,\beta);$$
$$\langle\tau=2,\ \eta=3\rangle:\ \chi_2(\rho,\beta)<\chi<\chi_3(\rho,\beta);$$
$$\langle\tau=3,\ \eta=2\rangle:\ \chi_3(\rho,\beta)<\chi<\chi_4(\rho,\beta); \qquad (52)$$
$$\langle\tau=4,\ \eta=1\rangle=\langle\eta=1,$$
$$\tau=4\rangle:\ \chi>\chi_5(\rho,\beta),\ \chi>\chi_4(\rho,\beta);$$
$$\langle\eta=2,\ \tau=3\rangle:\ \chi_6(\rho,\beta)<\chi<\chi_5(\rho,\beta);$$
$$\langle\eta=3,\ \tau=2\rangle:\ \chi_7(\rho,\beta)<\chi<\chi_6(\rho,\beta);$$
$$\langle\eta=4,\ \tau=1\rangle:\ \chi_8(\rho,\beta)<\chi<\chi_7(\rho,\beta).$$

Шесть неравенств в (52) двусторонние: есть нижний предел, и есть верхний предел. Область варианта $\langle\tau=0,\ \eta=5\rangle=\langle\eta=5,\ \tau=0\rangle$ ограничена сверху двумя неравенствами, снизу и слева условиями неотрицательности: $\chi\geq 0$, $\rho\geq 0$. Область варианта $\langle\tau=4,\ \eta=1\rangle=\langle\eta=1,\ \tau=4\rangle$ ограничена снизу двумя неравенствами, верхних ограничений нет.

Области (52) показаны на рис. 2. Центром на рис. 2 является точка ММ с координатами $\rho=\beta(1+\beta)$, $\chi=(1+\beta)$ — ср. (31). Если параметры принимают эти значения, то безразлично, как распределять прибыль между инвестициями и дивидендами — критериальное значение не зависит от этого распределения. Граничные линии $\chi_1(\rho,\beta)-\chi_8(\rho,\beta)$ приходят

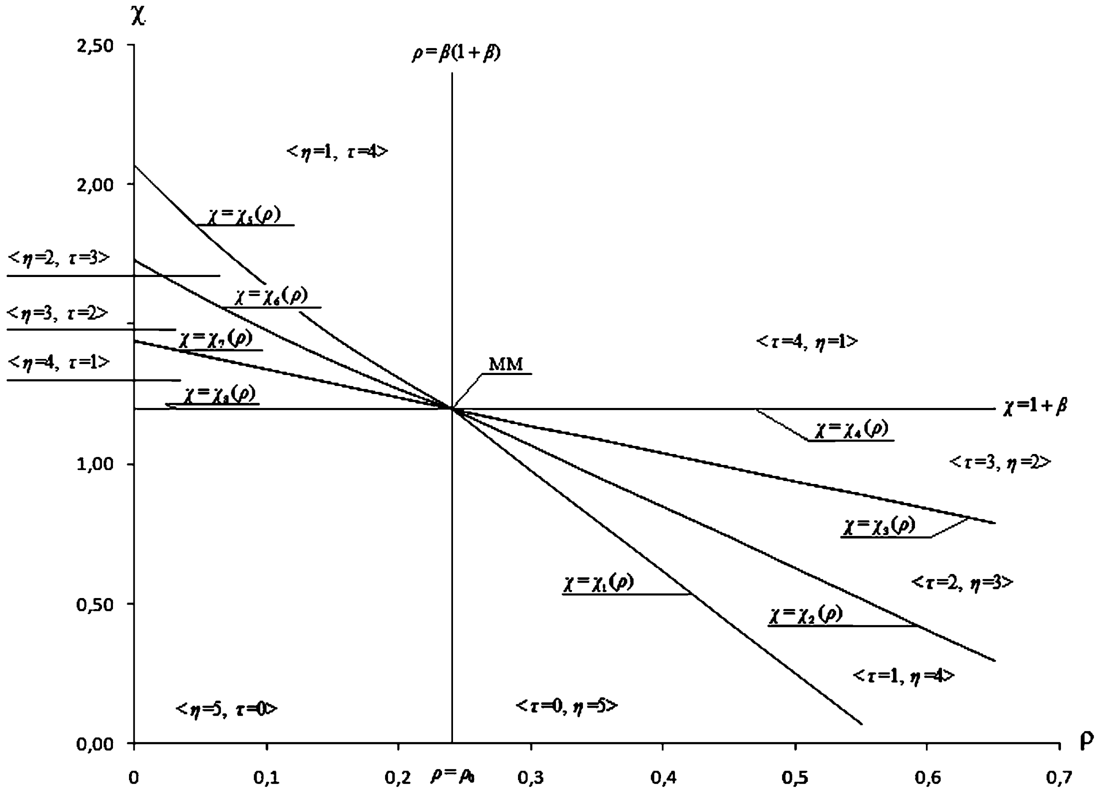

Рис. 2. Области последовательностей режимов при $\beta = 0{,}2$

в точку ММ от координатных осей; граничные линии под горизонтальной прямой — прямые, над этой прямой — выпуклые вниз; вертикальная штриховая линия $\rho = \beta(1+\beta)$ не является границей между областями: внизу она проходит внутри области $\langle \eta = 5, \tau = 0\rangle - \langle \tau = 0, \eta = 5\rangle$, наверху — внутри $\langle \eta = 1, \tau = 4\rangle - \langle \tau = 4, \eta = 1\rangle$ (верх от низа отделяет горизонтальная прямая $\chi = (1+\beta)$).

Вся плоскость плотно (без пропусков) заполнена областями существования последовательностей и нет частей плоскости, не занятых областями существования. Чем доказывается оптимальность представленной картины областей существования.

В заключение этого раздела отметим важный практический вывод из рис. 2, сокращающий предстоящую работу. В [1] было указано, что параметр χ (еще раз: χ — отношение рыночной стоимости предприятия к его номинальной стоимости) должен выбираться на основании исторических данных. Там же в [1] было указано, что выбор значения χ, превышающего единицу, представляется неоправданно оптимистическим. Если менеджер, составляющий план, принимает $\chi > 1$, то тем самым он предполагает, что за акции его предприятия на фондовом рынке заплатят больше, чем номинальная стоимость. В этой нашей работе, как и в [1], мы будем придерживаться пессимистического представления о будущем рынке и будем считать, что $\chi < 1$. Из этого следует, что последовательности режимов «потребление — накопление», области существования которых располагаются при $\chi \geq 1+\beta$, выпадают из рассмотрения, что вдвое сокращает предстоящую работу.

2.4. Критериальные выражения

Выражения для критерия могут быть получены интегрированием системы в прямых переменных, а также через двойственную систему, одно и другое выражения должны совпадать, что является необходимым условием оптимальности решения.

В конце предыдущего раздела было сказано о ненужности рассмотрения тех последовательностей, которые реализуются при $\chi > 1$. Так что остаются следующие: $\langle \tau = 0, \eta = 5\rangle$; $\langle \tau = 1, \eta = 4\rangle$; $\langle \tau = 2, \eta = 3\rangle$; $\langle \tau = 3, \eta = 2\rangle$; $\langle \tau = 4, \eta = 1\rangle$. Порядок вывода формул продемонстрируем на примере $\langle \tau = 2, \eta = 3\rangle$, который уже фигурировал ранее (41)–(51).

Первые два шага в этом примере отдаются на накопление: в конце первого шага капитал остается равным стартовому значению: $\Phi^1 = \Phi^0$, в конце второго — возрастает на величину прибыли первого шага (запаздывание равно одному шагу): $\Phi^2 = \Phi^0 + \rho\Phi^0$, в конце третьего шага — на величину прибыли второго шага $\Phi^3 = (1+2\rho)\Phi^0$ — (см. табл. 7). На третьем, четвертом и пятом шагах вся прибыль направляется на дивиденды: на третьем шаге прибыль пропорциональна капиталу второго шага: $\Pi^3 = \rho\Phi^2 = \rho(1+\rho)\Phi^0$; прибыль четвертого шага больше прибыли третьего: $\Pi^4 = \rho\Phi^3 = \rho(1+2\rho)\Phi^0$, потому что в конце третьего шага с задержкой в один шаг к капиталу присоединяется прибыль второго шага. Наконец, прибыль пятого шага равняется прибыли четвертого шага — на четвертом и пятом шагах капитал не меняется: $\Pi^5 = \rho(1+2\rho)\Phi^0$.

Дивидендные поступления на пяти шагах таковы:

$$D^1 = 0,\ D^2 = 0,\ D^3 = \rho(1+\rho)\Phi^0,\ D^4 = \rho(1+2\rho)\Phi^0,\ D^5 = \rho(1+2\rho)\Phi^0. \tag{53}$$

В суммарное богатство дивиденды третьего шага D^3 входят с множителем наращения $(1+\beta)^2$, четвертого шага — $(1+\beta)$, пятого шага — 1. Итого с банковского счета S в конце интервала планирования акционер может получить вознаграждение:

$$S = \rho\Phi^0\left[(1+\beta)^2(1+\rho) + (1+\beta)(1+2\rho) + 1\cdot(1+2\rho)\right]. \tag{54}$$

В конце интервала планирования, $t = T = 5$, на фондовом рынке стоимость акций составляет: $F = \Phi^0\chi(1+2\rho)$ и суммарное богатство равняется:

$$K = \Phi^0\left[\chi(1+2\rho) + \rho(1+\beta)^2(1+\rho) + \rho(1+\beta)(1+2\rho) + \rho(1+2\rho)\right] = \Phi^0\left[\chi(1+2\rho) + \rho(1+\rho)\frac{(1+\beta)^2-1}{\beta} + \rho^2\frac{(1+\beta)^2-1}{\beta}\right]. \tag{55}$$

Вывод формулы суммарного богатства для варианта $\langle \tau = 2,\ \eta = 3\rangle$ на этом заканчивается; искомая формула была получена интегрированием системы в прямых переменных.

При использовании двойственной задачи исходной является запись функции Лагранжа (28) и условий оптимальности (29). Максимальное значение $L_{\max}$ достигается при выполнении условий оптимальности — если эти условия подставить в последнюю формулу цепочки (28), то получится следующее:

$$L_{\max} = \Phi^0\ (p^1 + \rho r^1)\ . \tag{56}$$

Теперь нужно взять p^1 и r^1 на последнем шаге (41) и подставить в (56):

$$L_{\max} = \Phi^0\left[\chi(1+\rho) + \rho\frac{(1+\beta)^3-1}{\beta} + \rho^2\frac{(1+\beta)^2-1}{\beta} + \rho\chi + \rho^2\frac{(1+\beta)^3-1}{\beta}\right] = \Phi^0\left[\chi(1+2\rho) + \rho(1+\rho)\frac{(1+\beta)^3-1}{\beta} + \rho^2\frac{(1+\beta)^2-1}{\beta}\right]. \tag{57}$$

Совпадение последних выражений (55) и (57) ставит точку в доказательстве оптимальности варианта $\langle \tau = 2,\ \eta = 3\rangle$.

Интегрирование задач в прямых и двойственных переменных для всех оставленных в рассмотрении вариантов приводит к такому результату:

$$\begin{aligned}
&\langle \tau = 0,\ \eta = 5\rangle:\ K = \Phi^0\left[\chi + \rho\frac{(1+\beta)^5-1}{\beta}\right];\\
&\langle \tau = 1,\ \eta = 4\rangle:\ K = \Phi^0\left[\chi(1+\rho) + \rho(1+\beta)^3 + \rho(1+\rho)\frac{(1+\beta)^3-1}{\beta}\right];\\
&\langle \tau = 2,\ \eta = 3\rangle:\ K = \Phi^0\left[\chi(1+2\rho) + \rho(1+\rho)(1+\beta)^2 + \rho(1+2\rho)\frac{(1+\beta)^2-1}{\beta}\right];\\
&\langle \tau = 3,\ \eta = 2\rangle:\ K = \Phi^0\left[\chi(1+3\rho+\rho^2) + \rho(1+2\rho)(1+\beta) + \rho(1+3\rho+\rho^2\right];\\
&\langle \tau = 4,\ \eta = 1\rangle:\ K = \Phi^0\left[\chi(1+4\rho+3\rho^2) + \rho(1+3\rho+\rho^2\right].
\end{aligned} \tag{58}$$

Выведенные критериальные выражения (58) позволяют определить области ρ, β, χ, где варианты являются предпочтительными по сравнению с соседними областями. Для этого составляются разности:

$$K\langle\tau=0,\ \eta=5\rangle-K\langle\tau=1,\ \eta=4\rangle=$$

$$=\Phi^0\left[(1+\beta)^4-\rho\frac{(1+\beta)^3-1}{\beta}-\chi\right]=\Phi^0\left[\chi_1(\rho,\beta)-\chi\right];$$

$$K\langle\tau=1,\ \eta=4\rangle-K\langle\tau=2,\ \eta=3\rangle=$$

$$=\Phi^0\left[(1+\beta)^3-\rho\frac{(1+\beta)^2-1}{\beta}-\chi\right]=$$

$$=\Phi^0\left[\chi_2(\rho,\beta)-\chi\right];$$

$$K\langle\tau=2,\ \eta=3\rangle-K\langle\tau=3,\ \eta=2\rangle=$$

$$=\Phi^0\left[(1+\beta)^2-\rho-\chi\right]=\Phi^0\left[\chi_3(\rho,\beta)-\chi\right];\quad(59)$$

$$K\langle\tau=3,\ \eta=2\rangle-K\langle\tau=4,\ \eta=1\rangle=$$

$$=\Phi^0\left[(1+\beta)-\chi\right]=\Phi^0\left[\chi_4(\rho,\beta)-\chi\right].$$

Из этих разностей получаются еще раз области (52). Например, вариант $\langle\tau=2,\ \eta=3\rangle$ предпочтительнее варианта $\langle\tau=1,\ \eta=4\rangle$ при $\chi>\chi_2(\rho,\beta)$ и, с другой стороны, предпочтительнее варианта $\langle\tau=3,\ \eta=2\rangle$ при $\chi<\chi_3(\rho,\beta)$, что повторяет третью строку из (52).

2.5. Потери от задержки

В каноническом случае накопленная на шаге прибыль в конце этого шага направляется на инвестиции и те сразу вводятся в действие. В нашем случае направленные на инвестиции средства становятся действующим капиталом не в конце этого шага, а в конце следующего. Задержка в один шаг приводит к потерям.

Сопоставление канонического и нашего случаев является целью этого раздела; сопоставление ведется на примерах. Выберем следующие три набора параметров: $\Phi^0=100$; $\beta=0{,}2$; $T=5$ — эти значения присутствуют в каждом наборе параметров, а также: 1) $\rho=0{,}3$; $\chi=0{,}8$; 2) $\rho=0{,}3$; $\chi=1$; 3) $\rho=0{,}4$; $\chi=1$.

В каноническом случае оптимальные продолжительности накопления $\tau^{\text{opt},i}$ и потребления $\eta^{\text{opt},i}$, а также критериальные значения $K_{\text{кан}}$ («кан» — от канонического) составляют:

1) $\tau^{\text{opt},i}=3,\ \eta^{\text{opt},i}=2,\ K_{\text{кан}}=320{,}8;$

2) $\tau^{\text{opt},i}=5,\ \eta^{\text{opt},i}=0,\ K_{\text{кан}}=371{,}3;$

3) $\tau^{\text{opt},i}=5,\ \eta^{\text{opt},i}=0,\ K_{\text{кан}}=537{,}8.$

Таблица 9

Значения K

Набор / Вариант	1) $\rho=0{,}3$; $\chi=0{,}8$	2) $\rho=0{,}3$; $\chi=1$	3) $\rho=0{,}4$; $\chi=1$
$\langle\tau=0,\ \eta=5\rangle$	**303,2**	323,2	397,7
$\langle\tau=1,\ \eta=4\rangle$	297,8	**323,8**	413,0
$\langle\tau=2,\ \eta=3\rangle$	289,8	321,8	**419,0**
$\langle\tau=3,\ \eta=2\rangle$	276,5	316,3	416,8
$\langle\tau=4,\ \eta=1\rangle$	257,3	306,7	402,4

Чтобы получить аналогичные показатели для нашего случая, необходимо рассчитать значения суммарного богатства K по формулам (58) для трех наборов 1), 2), 3) для пяти вариантов в каждом наборе (табл. 9).

В таблице подчеркнуты максимальные значения K; им соответствуют $\tau^{\text{opt},i}$ и $\eta^{\text{opt},i}$; эти показатели выделены в таком виде:

$$\begin{aligned}
&1)\ \tau^{\text{opt},i}=0;\ \eta^{\text{opt},i}=5,\ K=303{,}2,\ \frac{K}{K_{\text{кан}}}=0{,}945;\\
&2)\ \tau^{\text{opt},i}=1;\ \eta^{\text{opt},i}=4,\ K=323{,}8,\ \frac{K}{K_{\text{кан}}}=0{,}872;\\
&3)\ \tau^{\text{opt},i}=2;\ \eta^{\text{opt},i}=3,\ K=419{,}0,\ \frac{K}{K_{\text{кан}}}=0{,}779.
\end{aligned}\quad(60)$$

Последний столбец в (60) занимают отношения $\frac{K}{K_{\text{кан}}}$, которые характеризуют потери от одношаговой задержки.

Выводы таковы: потери могут быть значительными; потери тем больше, чем больше участок накопления, а участок накопления тем больше, чем больше величины χ и ρ.

Литература

1. *Иванов Ю. Н., Лившиц И. Л.* Оптимальная инвестиционная и дивидендная политика (к теории оптимального предприятия) // Системные исследования. Методологические проблемы. Ежегодник 2002. М.: URSS, 2004. С. 181–210; Ежегодник 2003–2005. М.: Комкнига/URSS, 2006. С. 232–259.
2. *Иванов Ю. Н., Симунек В., Сотникова Р. А.* Оптимальная кредитная политика предприятия и банка // Экономика и математические методы. 1999. Т 35. № 4. С. 19–38.
3. *Дикусар В. В., Иванов Ю. Н., Сотникова Р. А., Хотеев В. В.* Оптимальная инвестиционная и кредитная по-

литика предприятия // Системные исследования. Методологические проблемы. Ежегодник 2006–2007. М.: Комкнига/URSS, 2007. С. 172–224.

4. Народное хозяйство СССР в 1990 г. М.: Финансы и статистика. 1991. С. 548, 549.
5. Экономическая энциклопедия. Промышленность и строительство. Гл. ред. А. Н. Ефимов. М.: Советская энциклопедия. 1965. Т. 3. С. 222–223.
6. *Иванов Н. А.* Пути ускорения строительства. М.: Госкомиздат, 1957. 176 с.
7. *Иванов Н. А.* Планирование капитальных вложений. М.: Гос. издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам. М., 1961. 94 с.
8. *Иванов Н. А.* Народнохозяйственные пропорции, фактор времени, темпы. (Вопросы экономики капитальных вложений). М.: Экономика, 1969. 182 с.

Иванов Юрий Николаевич. Гл. н. с. ИСА РАН. Д. ф.-м. н., профессор. Окончил МФТИ в 1952 г. Количество печатных работ: 119. Область научных интересов: экономика, финансы, денежное обращение, математические методы и модели, управление социально-экономическими процессами. E-mail: ivanovyu@isa.ru

Сотникова Раиса Александровна. С. н. с. ИСА РАН. К. т. н. Окончила МИНХ им. Плеханова в 1969 г. Количество печатных работ: 29. Область научных интересов: моделирование экономики, финансы, кредит, математические методы, управление, базы данных. E-mail: ivanovyu@isa.ru

Волонтырец Елена Сергеевна. Студентка МФТИ. Область научных интересов: экономика, моделирование экономики, финансы, кредит, математические методы. E-mail: ivanovyu@isa.ru