

Математические проблемы динамики неоднородных систем

Структура вероятностной макросистемной демо-экономической модели (часть I)*

А. С. Алиев, А. Ю. Попков, Ю. С. Попков

Аннотация. Разработана структура демографического блока вероятностной демо-экономической модели, построены модели рождаемости, смертности и миграции, использующие принцип максимизации энтропии.

Ключевые слова: *макросистема, энтропийные модели, оптимизация, демографическая динамика, пространственная экономика, рождаемость, смертность, миграция.*

Введение

Моделирование демо-экономических процессов преследует цель обнаружить некоторые состояния в этих процессах, возникающие в результате взаимодействия процессов пространственно-временной эволюции населения и экономики в терминах ее макропоказателей [2, 3, 7, 13]. При изучении этих процессов предполагается, что население экономически мотивировано, т. е. решения индивидов в основном определяются экономическими индексами. Строго говоря, это не общее правило, и существует много примеров, когда экономическая мотивация сосуществует и с другими мотивационными факторами: культурологическими, экологическими, религиозными и др. Обилие мотивационных факторов и невозможность многие из них измерить порождает довольно высокий уровень неопределенности, затрудняющий надежное прогнозирование (даже кратко-

срочное) демо-экономических процессов. В рассматриваемой здесь макросистемной демо-экономической модели («MSDEM») на экономический мотивационный слой наложены некоторые из упомянутых мотивационных факторов [14, 16, 24]. Параметры, характеризующие эти факторы, представляют собой случайные величины с заданными функциями распределения вероятностей. Тем самым «MSDEM» превращается в вероятностную макросистемную демо-экономическую модель — «PMSDEM» [21].

Разработка «PMSDEM» проводилась в рамках исследовательской программы Научного Фонда Нидерландов «European Population beyond 2000», и потому ориентирована на европейское системное пространство и структуру статистической информации. Цель разработки состояла в создании инструмента для прогнозирования динамики европейского населения (population projection) в кратко-, средне- и долгосрочной перспективе при различных сценариях социально-экономического развития Европейского Союза.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 07-11-00092).

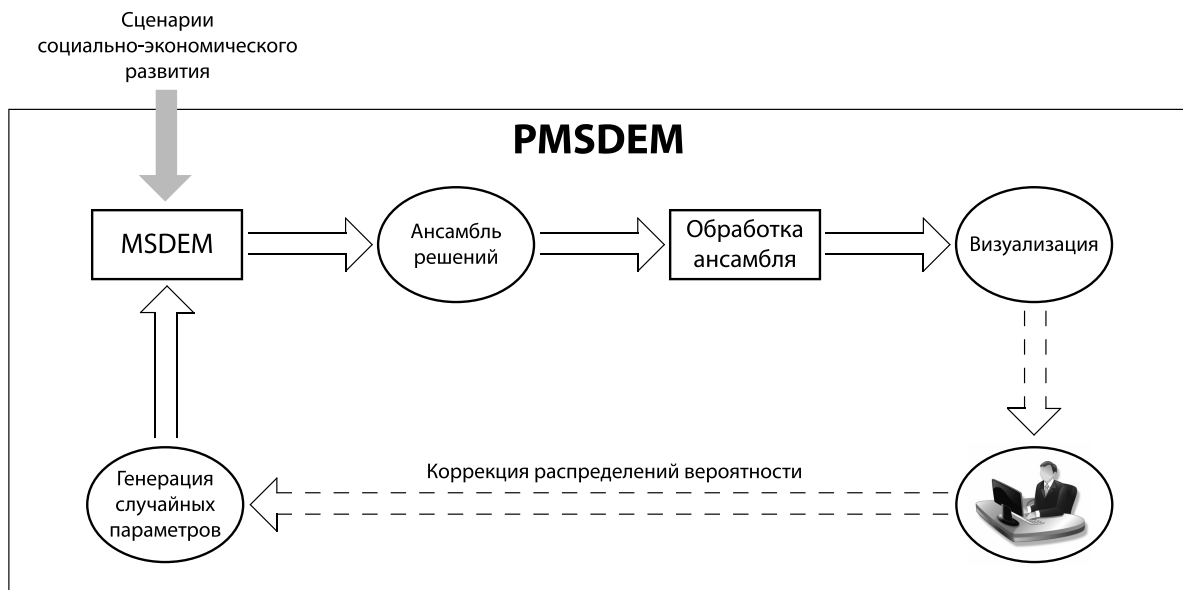


Рис. 1. Структура PMSDEM

1. Агрегированная структура «PMSDEM» и ее пространственно-временные характеристики

Следуя общей концепции вероятностного макросистемного демо-экономического моделирования, структура «PMSDEM» состоит из модельного ядра «MSDEM», погруженного в интерфейс вероятностных технологий, базирующихся на методе Монте Карло.

Напомним, что вероятностные технологии позволяют генерировать ансамбль моделей и получать соответствующий ансамбль решений (траекторий пространственно-временной эволюции демо-экономической системы). Он дает представление о возможных процессах (или режимах) в системе при различных возможных комбинациях параметров «MSDEM». Поскольку «MSDEM» — существенно нелинейная динамическая система, то ее траектории, генерируемые при средних значениях параметров, принципиально отличаются от средних по упомянутому ансамблю траекторий. Поэтому вероятностные технологии позволяют выявить новые режимы вместе с их вероятностными характеристиками, что делает «PMSDEM» полезным инструментальным средством демо-экономического прогнозирования.

Структура «PMSDEM» показана на рис. 1. Она включает «MSDEM» в качестве ядра и основные блоки вероятностной технологии: генераторы случайных параметров, ансамбль решений, генерируемых моделью, статистическую обработку этого ансамбля, представление результатов обработки в агрегированном, но информативном виде. Важным блоком технологии является интерактивная обратная связь, которая предоставляет возможность коррек-

тировать функции плотности распределений вероятностей, заложенные в генераторах случайных параметров.

В агрегированном виде структура «MSDEM» (см. рис. 2) может быть представлена двумя подсистемами — «НАСЕЛЕНИЕ» и «ЭКОНОМИКА», и вспомогательной подсистемой, условно названной «ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ», которая моделирует прямые « $P \rightarrow E$ » и обратные « $P \leftarrow E$ » связи между населением и экономикой. Из рис. 2 следует, что подсистемы «MSDEM» включены в замкнутый контур, и поэтому обозначение прямых и обратных связей в нем зависит от приоритета, который придается подсистеме «НАСЕЛЕНИЕ» по отношению к подсистеме «ЭКОНОМИКА».

Пространство локализации демо-экономической системы имеет одноуровневую структуру, а именно, это пространство состоит из стран, которые индексируются целочисленной переменной n , где $n = 1, \dots, N$. Рассматривается пространство Европейского Союза.

Поскольку рассматриваемая демо-экономическая система погружена в метасистему, то пространственную организацию последней также необходи-

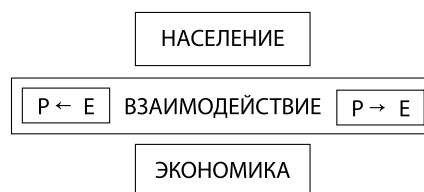


Рис. 2. Агрегированная структура MSDEM

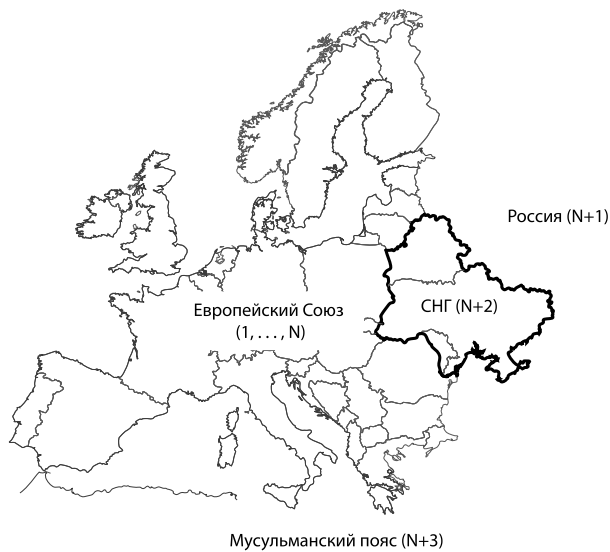


Рис. 3. Условная карта ЕС

мо сформировать. Здесь принято также одноуровневое описание пространства, которое состоит из неких кластеров (иногда больших, чем страна). Здесь будет рассматриваться три таких кластера: Россия ($N+1$), СНГ ($N+2$), мусульманский «пояс» ($N+3$).

Условная карта, изображенная на рис. 3, иллюстрирует пространственную структуру на примере Европейского Союза и метасистемы, состоящей из стран мусульманского пояса, стран СНГ и, отдельно, России.

Рассмотрим структуру «MSDEM» более детально (рис. 4). Блок «POPULATION» моделирует биологическое воспроизводство населения (модуль «Reproduction (R)») и миграцию (модуль «Migration (M)'). Процесс воспроизводства складывается из процессов рождаемости (модуль «Fertility (FRT)») и смертности (модуль «Mortality (MRT)'). И тот, и другой процессы имеют пространственную структуру. Это означает, что вводятся группировка населения по стандартам рождаемости (West-South, West-North, East).

Миграционные процессы существенно связаны со структурой системного пространства. Различают три класса миграционных потоков, каждый из которых моделируется в соответствующем модуле. Миграционные потоки между странами n и i моделируются в модуле «InterCountries (InterC)». И наконец, миграционные потоки между странами и ареалами метасистемы моделируются в модуле «InterMC».

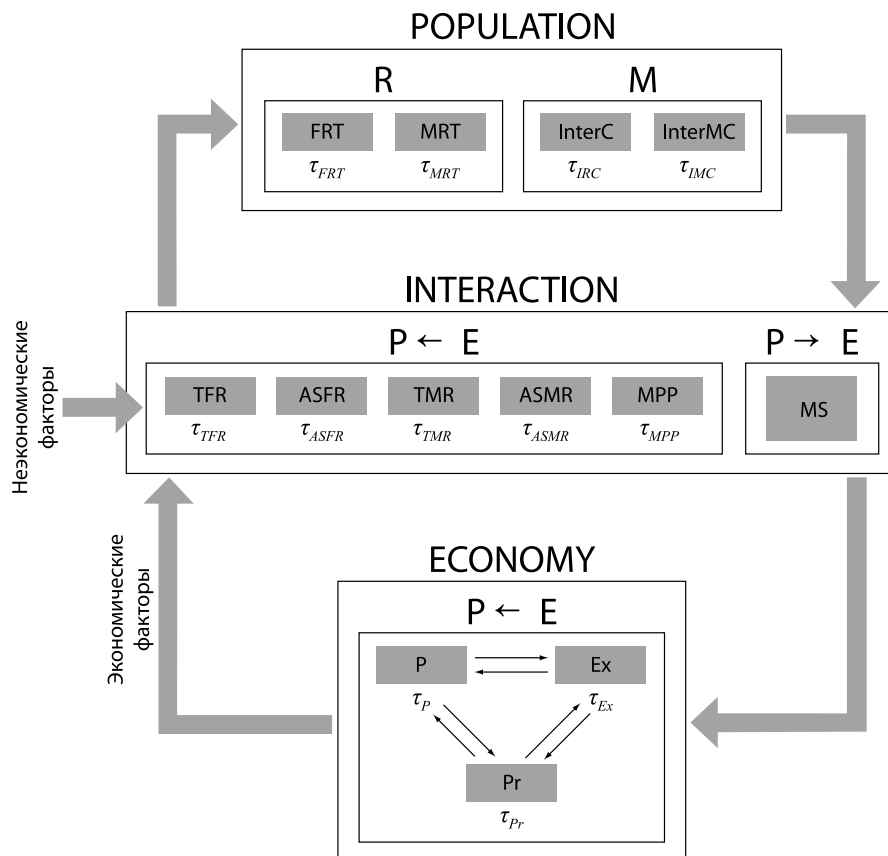


Рис. 4. Структура MSDEM

Выходом блока «POPULATION» является пространственно — временная эволюция распределения населения по полу и возрасту.

Обратимся теперь к блоку «ECONOMY». Модули, входящие в этот блок, имеют пространственную и отраслевую структуры. Это означает, что каждый элемент любого из модулей привязан к пространственной единице (стране n) и к соответствующей отрасли $k = 1, \dots, K$.

В модуле «Production (P)» моделируются процессы собственного странового производства товаров и услуг в условиях рыночной экономики. Последние предполагают наличие страновых и межстрановых товарных рынков, где происходят межстрановые обмены товарами и услугами, и, следовательно, формируются цены. Для моделирования указанных процессов предназначены модули «Exchanges (Ex)», «Prices (Pr)».

Важной компонентой экономической деятельности является рабочая сила, которая необходима для производства товаров и услуг. Предложение рабочей силы формируется подсистемой «НАСЕЛЕНИЕ» и моделируется блоком «POPULATION». Потребность и предложение рабочей силы конкурируют на рынке труда, в результате чего формируется индекс безработицы.

Выходом блока «ECONOMY» являются индексы душевых ВВП и дохода, уровень безработицы.

Обратимся теперь к блоку «INTERACTION» (рис. 4). Прямая связь « $P \rightarrow E$ » на схеме рис. 2 предназначена для передачи информации о пространственно-временной эволюции поло-возрастного распределения населения и для формирования пространственно-временной эволюции предложения рабочей силы (модуль «Manpower Supply (MS)»).

Обратная связь « $P \leftarrow E$ » содержит модули, в которых моделируются зависимости между параметрами процессов рождаемости, смертности и миграции и экономическими и неэкономическими факторами. Модули «Total Fertility Rate (TFR)» и «Age Specific Fertility Rate (ASFR)» моделируют стационарные и динамические зависимости общего коэффициента рождаемости и специфицированного по возрасту коэффициента рождаемости от указанных факторов.

Влияние этих же факторов на миграционные потоки моделируется в модуле «Migration Prior Probabilities (MPP)», где воспроизводятся зависимости априорных вероятностей миграционных решений для межстрановой и метасистемной миграции.

Зависимость общего коэффициента смертности и его распределения по возрасту от макропоказателей экономического статуса пространственной еди-

ницы моделируется в модулях «Total Mortality Rate (TMR)» и «Age Specific Mortality Rate (ASMR)».

Процессы, которые моделируются в подсистемах «MSDEM», протекают с различной скоростью, и учет этого обстоятельства является принципиальным при построении модели. На структурной схеме «MSDEM» (рис. 4) обозначены максимальные времена релаксации процессов, моделируемых в соответствующих модулях [19, 20].

Для того, чтобы установить некоторую иерархию между временами релаксации, необходимо учитывать соотношение скоростей процесса и его параметров и соотношения между скоростями различных процессов.

Будем полагать, что времена релаксации в подсистеме «НАСЕЛЕНИЕ»

$$\tau_{FRT} = \tau_{MRT} = \tau_R, \tag{1}$$

и

$$\tau_{IRC} = \tau_{IMC} = \tau_M; \tag{2}$$

в подсистеме «ЭКОНОМИКА»

$$\tau_{EX} = \tau_{PR} = \tau_E; \tag{3}$$

и в подсистеме «ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ»

$$\tau_{TFR} = \tau_{ASFR} = \tau_{TMR} = \tau_{ASMR} = \tau_{MPP} = \tau_{RM}. \tag{4}$$

В этих выражениях обозначены времена релаксации процессов: воспроизводства τ_R и миграции τ_M , установления параметров воспроизводства и миграции τ_{RM} , товарных и ценовых обменов τ_E .

Иерархия времен релаксации имеет вид:

$$\tau_{RM} \gg \tau_R > \tau_P \gg \tau_M > \tau_E. \tag{5}$$

Из этой цепочки неравенств следует, что «медленным» является процесс формирования параметров основного процесса пространственно-временной эволюции численности населения, а «быстрым» — процесс обмена и ценообразования.

Примем следующие значения времен релаксации [год]:

$$\begin{aligned} \tau_{RM} = 20, \quad \tau_R = 9, \quad \tau_P = 5, \\ \tau_M = 2, \quad \tau_E = 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Эти значения приняты на основании анализа данных EuroStat¹.

Важной проблемой для «PMSDEM» с вектором случайных параметров a является генерация случайных величин с заданной функцией плотности распределения $P(a)$. Если компоненты вектора a предполагаются *независимыми*, то

$$P(a) = \prod_{k=1}^m p_k(a_k), \quad a \in A, \tag{7}$$

¹ <http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/statistics/themes>

где $p_k(a_k)$ — плотность вероятностей параметра $a_k \in I_k = [a_k^-, a_k^+]$, A — область определения функции $P(a)$, которая представляет собой многомерный параллелепипед, образованный прямым произведением интервальных множеств I_k :

$$A = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_m. \tag{8}$$

В силу независимости параметров для генерации случайной точки в множестве A (8) необходимо m независимых генераторов случайных чисел с равномерной плотностью распределения $p_0(\eta)$, где случайная величина $\eta \in [0, 1]$.

Рассмотрим произвольный случайный параметр a_k , плотность распределения вероятностей которого $p_k(a_k)$. Один из способов генерации значений этого параметра основан на использовании функции распределения вероятностей

$$W_k(a_k) = \int_{a_k^-}^{a_k} p_k(x) dx, \tag{9}$$

которая принимает значения на интервале $[0, 1]$. Рассмотрим уравнение

$$W_k(a_k) = \eta, \tag{10}$$

где η — случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[0, 1]$. Известно, что случайная величина a_k , являющаяся решением этого уравнения, имеет плотность распределения вероятностей $p_k(a_k)$.

Более сложной оказывается задача генерации случайных точек a , когда параметры a_1, \dots, a_m *зависимы*. Одна из форм зависимости может быть описана условными плотностями распределения вероятностей, например, в следующем виде: $p_1(a_1), p_2(a_2|a_1), \dots, p_m(a_m|a_1, \dots, a_{m-1})$. Тогда совместная плотность распределения

$$p(a) = p_1(a_1)p_2(a_2|a_1) \dots p_m(a_m|a_1, \dots, a_{m-1}). \tag{11}$$

Введем условные распределения вероятностей

$$W_i(a_i|a_1, \dots, a_{i-1}) = \int_{a_i^-}^{a_i} p_i(x|a_1, \dots, a_{i-1}) dx, \tag{12}$$

$i \in [1, m]$

и рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} W_1(a_1) &= \eta_1, \\ W_2(a_2|a_1) &= \eta_2, \\ &\dots\dots\dots \\ W_m(a_m|a_1, \dots, a_{m-1}) &= \eta_m. \end{aligned} \tag{13}$$

Если η_1, \dots, η_m — независимые случайные величины, равномерно распределенные на интервале $[0, 1]$, то совокупность случайных параметров a_1, \dots, a_m имеет совместную плотность $p(a)$ (11).

2. Блок «POPULATION»

2.1. Классификация населения

1. В данной модели население характеризуется следующими признаками:

- пространственной локализацией,
- полом,
- возрастом,
- стандартом рождаемости,
- пространственным статусом мигрантов,
- мотивацией внешних иммигрантов.

2. Рассматривается население, состоящее из половозрастных групп. Введем индекс s для характеристики половых групп: $s = M$ — мужское население, $s = F$ — женское население; и индекс a для характеристики возрастных групп ($a = 0, 1, \dots, A$). В нулевую группу входят новорожденные, в группу A входят люди возраста A лет и выше. Группы длиной в один год. Здесь принято $A = 85$. Среди возрастных групп женского населения выделяют подгруппы фертильных возрастов a_f^-, a_f^+ , в которые входят женщины, теоретически способные рожать детей. Здесь принято $a_-^f = 15, a_+^f = 45$.

3. Интенсивность процесса рождаемости определяется желанием и возможностью женщины иметь определенное количество детей. На протяжении длительного интервала времени сложились определенные «стандарты» в сфере деторождения. Из условно можно разделить на две группы. Один из — «западный» (W) — 1–2 ребенка, и «восточный» (E) — 4–6 детей. Эта группировка основывается на весьма осредненных показателях и применена в данной модели, чтобы продемонстрировать возможность количественного учета этого очень важного фактора.

Нужно иметь в виду, что сообщества с западным и восточным стандартами рождаемости перемешиваются в результате миграции и склонности к деторождению членов этих сообществ могут меняться. В данной модели предполагается обратное: новорожденные девочки сохраняют стандарт деторождения матерей.

4. Миграционная компонента играет существенную роль в динамике населения. Будем различать миграционные потоки между странами ЕС, и потоки между пространственными кластерами метасистемы и странами ЕС. Таковых кластеров три — Россия, СНГ, и мусульманский пояс. Эти потоки в основном иммиграционные по отношению к ЕС.

5. Миграционные потоки имеют неоднородную структуру с точки зрения миграционных мотиваций. Будем различать две группы мигрантов по виду

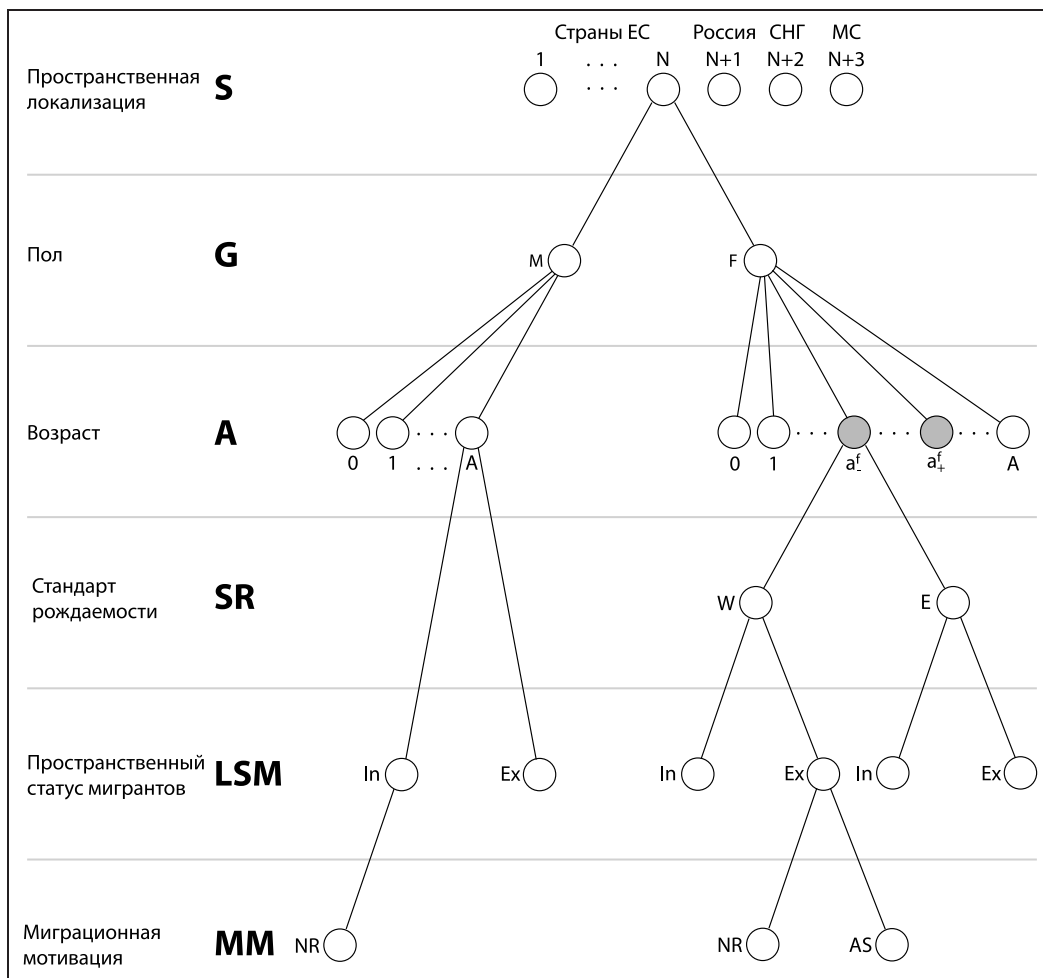


Рис. 5. Классификационный граф

их миграционных мотиваций. К первому отнесем экономически мотивированных мигрантов, т. е. тех, которые стремятся попасть в ту страну, где более высокие экономические показатели. Будем обозначать членов этой группы NR . Вторую группу образуют иммигранты, которые иммигрируют с целью «воссоединения семей». Членов этой группы будем обозначать AS . Предполагается, что у них на первом месте желание воссоединиться, а на втором экономическая статус страны.

На рис. 5 показан граф, иллюстрирующий данную классификацию. Элементы подсистемы «НАСЕЛЕНИЕ» участвуют в процессе биологического воспроизводства населения и миграции, в результате чего состояние демо-экономической системы непрерывно меняется во времени. Однако поскольку наблюдение за этим состоянием происходит только в дискретные моменты времени, то имеет смысл моделировать его также в дискретные моменты времени с определенным временным интервалом. Учитывая, что возрастные группы — одногодичные, удоб-

но выбрать дискретные моменты времени с интервалом в 1 год, т. е. $t = 0, 1, 2, \dots$

Состояние демо-экономической системы в момент времени t характеризуется численностью населения в комплексной группе, в описание которой входят следующие атрибуты (см. рис. 5): S, G, SR .

Состояние мужской части населения характеризуется вектором

$$K^M(n, t) = \{K^M(n, 0, t), \dots, K^M(n, A, t)\}, \quad n \in [1, N]. \tag{14}$$

Поскольку женская часть населения состоит из двух групп с существенно разными стандартами рождаемости, то ее состояние будем характеризовать двумя векторами для «западного» и «восточного» стандартов:

$$K^{FW}(n, t) = \{K^{FW}(n, 0, t), \dots, K^{FW}(n, A, t)\},$$

$$K^{FE}(n, t) = \{K^{FE}(n, 0, t), \dots, K^{FE}(n, A, t)\}, \tag{15}$$

$$n \in [1, N].$$

Итак, состояние населения как целого характеризуется N векторов

$$\mathbf{K}(n, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^M(n, t) \\ \mathbf{K}^{FW}(n, t) \\ \mathbf{K}^{FE}(n, t) \end{pmatrix}, \quad n \in [1, N]. \quad (16)$$

Заметим, что компоненты вектора состояния представляют собой распределения численностей населения по пространству демо-экономической системы, полу и возрасту.

2.2. Биологическое воспроизводство населения (модуль «R»)

Биологическая компонента изменения состояния системы обусловлена комбинацией трех процессов: рождаемости, старения и смертности. Процесс рождаемости осуществляется женской частью населения, находящейся в интервале фертильных возрастов $I_f = [a_-^f, a_+^f]$. Он характеризуется распределением коэффициентов рождаемости по возрастам из интервала I_f . Причем эти распределения различны для «западного» и «восточного» стандартов рождаемости [5].

Введем вектора

$$b^W(n, t) = \{0, \dots, 0, b^W(n, a_-^f, t), \dots, b^W(n, a_+^f, t), 0, \dots, 0\}, \quad n \in [1, N], \quad (17)$$

$$b^E(n, t) = \{0, \dots, 0, b^E(n, a_-^f, t), \dots, b^E(n, a_+^f, t), 0, \dots, 0\}, \quad n \in [1, N], \quad (18)$$

компонентами которых являются коэффициенты рождаемости.

Заметим, что интервалы фертильности предполагаются одинаковыми для обоих стандартов рождаемости, и коэффициенты рождаемости меняются во времени, но с наибольшим временем релаксации τ_{RM} (5).

Процесс старения характеризуется так называемой «передвижкой возрастов», в результате которой все члены всех возрастных групп к концу очередного одногодичного интервала переходили бы в более старшие возрастные группы. Однако переходят не все, так как имеет место смертность. Она характеризуется распределениями коэффициентов смертности по возрасту, вообще говоря, разными для мужской и женской частей населения.

Введем вектора

$$d^M(n, t) = \{d^M(n, 0, t), \dots, d^M(n, A, t)\}, \quad n \in [1, N], \quad (19)$$

$$d^F(n, t) = \{d^F(n, 0, t), \dots, d^F(n, A, t)\}, \quad n \in [1, N], \quad (20)$$

компонентами которых являются коэффициенты смертности. Предполагается, что коэффициенты смертности одинаковые для женщин с «западным» и «восточным» стандартами рождаемости. Коэффициенты смертности так же зависят от времени с временем релаксации τ_{RM} .

Итак, имеются три агрегированные группы населения: мужское, женское с «западным» стандартом рождаемости и женское с «восточным» стандартом рождаемости. Для характеристики процессов рождения, старения и смертности в каждой из этих групп и взаимного влияния этих групп определим матрицы воспроизводства $G(n, t)$, $n \in [1, N]$ следующего вида:

$$G(n, t) = \begin{pmatrix} G^{11}(n, t) & G^{12}(n, t) & G^{13}(n, t) \\ G^{21}(n, t) & G^{22}(n, t) & G^{23}(n, t) \\ G^{31}(n, t) & G^{32}(n, t) & G^{33}(n, t) \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$n \in [1, N].$$

Элементы-матрицы этой блочной матрицы имеют размер $(A + 1) \times (A + 1)$ и характеризуют:

- старение мужской части населения $G^{11}(n, t)$, рождение мальчиков от женщин с «западным» $G^{12}(n, t)$ и «восточным» $G^{13}(n, t)$ стандартами рождаемости;
- $G^{21}(n, t) = G^{23}(n, t) = 0$;
- рождение и старение женской части населения с «западным» стандартом рождаемости $G^{22}(n, t)$;
- $G^{31}(n, t) = G^{32}(n, t) = 0$;
- рождение и старение женской части населения с «западным» стандартом рождаемости $G^{33}(n, t)$.

Матрица

$$G^{11}(n, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ (1-d^M(n, 0, t)) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (1-d^M(n, 1, t)) & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & (1-d^M(n, (A-1), t)) & 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Считается, что количество новорожденных мальчиков и девочек примерно одинаковое. Матрицы $G^{12}(n, t)$, $G^{13}(n, t)$ имеют вид:

$$G^{12}(n, t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}b^W(n, a_-^f, t) & \dots & \frac{1}{2}b^W(n, a_+^f, t) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}; \quad (23)$$

$$G^{13}(n, t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}b^E(n, a_-^f, t) & \dots & \frac{1}{2}b^E(n, a_+^f, t) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Поскольку предполагается, что девочки, рожденные женщинами определенного стандарта рождаемости, не меняют свой стандарт в будущем, то матрица

$$G^{22}(n, t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}b^W(n, a_-^f, t) & \dots & \frac{1}{2}b^W(n, a_+^f, t) & 0 \\ (1-d^F(n, 0, t)) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & (1-d^F(n, 1, t)) & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & (1-d^F(n, (A-1), t)) & 0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Аналогично матрица

$$G^{33}(n, t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}b^E(n, a_-^f, t) & \dots & \frac{1}{2}b^E(n, a_+^f, t) & 0 \\ (1-d^F(n, 0, t)) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & (1-d^F(n, 1, t)) & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & (1-d^F(n, (A-1), t)) & 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Обозначим

$$\mathbf{R}(n, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^M(n, t) \\ \mathbf{R}^{FW}(n, t) \\ \mathbf{R}^{FE}(n, t) \end{pmatrix} \quad (27)$$

— вектор состояния процесса биологического воспроизводства. Используя матрицу воспроизводства (21) и вектор состояния населения (16), получим:

$$\mathbf{R}(n, t) = G(n, t)\mathbf{K}(n, t). \quad (28)$$

Таким образом, входной информацией модуля «R» является:

- интервал фертильности $[a_-^f, a_+^f]$;
- ASFR для стандарта W — $b^W(n, a_-^f, t), \dots, b^W(n, a_+^f, t)$,
и стандарта E — $b^E(n, a_-^f, t), \dots, b^E(n, a_+^f, t)$;
- ASMR для M — $d^M(n, 0, t), \dots, d^M(n, A, t)$,
и для F — $d^F(n, 0, t), \dots, d^F(n, A, t)$;

- вектор состояния населения в момент t

$$\mathbf{K}(n, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^M(n, t) \\ \mathbf{K}^{FW}(n, t) \\ \mathbf{K}^{FE}(n, t) \end{pmatrix}.$$

Выходом модуля «R» является вектор

$$\mathbf{R}(n, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^M(n, t) \\ \mathbf{R}^{FW}(n, t) \\ \mathbf{R}^{FE}(n, t) \end{pmatrix}.$$

2.3. Миграция (модуль «M»)

Согласно классификации, приведенной на рис. 5, мигранты разделяются по пространственному статусу и миграционной мотивации. Обычно внутренняя (межстрановая) миграция («In») принадлежит к мотивации типа «NR», т. е. экономически мотивирована, тогда как внешняя миграция, а точнее иммиграция, имеет оба мотивационных типа («NR», «AS») [28].

Внутренняя миграция, как правило, экономически мотивирована, т. е. принадлежит мотивационному типу «NR» и состоит из групп «M», «FW», «FE». Внешняя иммиграция, происходящая из России ($N + 1$) и СНГ ($N + 2$), также имеет экономическую мотивацию, т. е. принадлежит типу «NR» и состоит из групп «M», «FW». Иммиграция из стран мусульманского пояса ($N + 3$) имеет два потока иммигрантов — «NR» и «AS» и состоит из групп «M», «FE». Рис. 6 иллюстрирует данную классификацию. Заметим, что все миграционные потоки специфицированы по возрасту.

Обозначим миграционные потоки x, z, y, v в соответствующих классах миграции (рис. 6). Внутренняя миграция характеризуется потоками

$$x^M(n, j, a, t), \quad x^{FW}(n, j, a, t), \quad x^{FE}(n, j, a, t), \\ (n, j) \in [1, N], \quad a \in [0, A].$$

Здесь и далее принято, что первый индекс (n) обозначает страну назначения, а второй (j) — страну — источник потока. Поэтому, например, $x^M(n, j, a, t)$ обозначает иммиграционный поток для страны n и эмиграционный поток для страны j для возрастной группы a в момент времени t .

Внешние иммиграционные потоки для стран ($N + 1$), ($N + 2$) метасистемы имеют вид:

$$z^M(n, N + 1, a, t), \quad z^{FW}(n, N + 1, a, t), \\ n \in [1, N], \quad a \in [0, A]; \\ z^M(n, N + 2, a, t), \quad z^{FW}(n, N + 2, a, t), \\ n \in [1, N], \quad a \in [0, A].$$

Внешние иммиграционные потоки для стран ($N + 3$) метасистемы с миграционной мотивацией «NR»

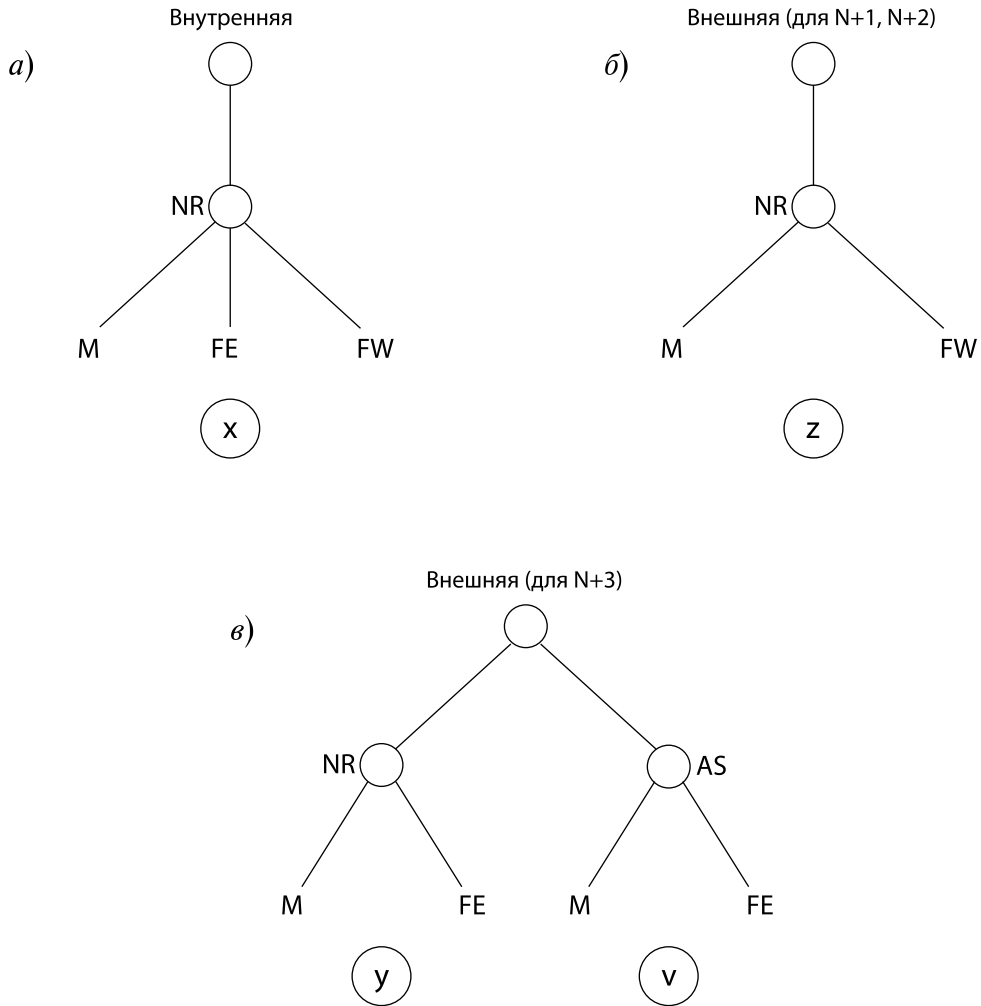


Рис. 6. Классификация мигрантов

имеют вид:

$$y^M(n, N+3, a, t), \quad y^{FE}(n, N+3, a, t), \\ n \in [1, N], \quad a \in [0, A].$$

Внешние иммиграционные потоки для стран $(N+3)$ метасистемы с миграционной мотивацией «AS» имеют вид:

$$v^M(n, N+3, a, t), \quad v^{FE}(n, N+3, a, t), \\ n \in [1, N], \quad a \in [0, A].$$

Миграционная компонента пространственно-временной эволюции населения характеризуется сальдо миграции (разностью между иммиграцией и эмиграцией). Введем вектора

$$\mathbf{S}^M(n, t) = \{s^M(n, 0, t), \dots, s^M(n, A, t)\}, \\ \mathbf{S}^{FW}(n, t) = \{s^{FW}(n, 0, t), \dots, s^{FW}(n, A, t)\}, \\ \mathbf{S}^{FE}(n, t) = \{s^{FE}(n, 0, t), \dots, s^{FE}(n, A, t)\},$$

характеризующие возрастное распределение сальдо миграции в стране n в момент времени t для групп «M», «FW», «FE». Учитывая приведенные выше обозначения потоков, получим:

$$s^M(n, a, t) = \sum_{j=1}^N (x^M(n, j, a, t) - x^M(j, n, a, t)) + \\ + z^M(n, N+1, a, t) + z^M(n, N+2, a, t) + \\ + y^M(n, N+3, a, t) + v^M(n, N+3, a, t); \\ s^{FW}(n, a, t) = \sum_{j=1}^N (x^{FW}(n, j, a, t) - x^{FW}(j, n, a, t)) + \\ + z^{FW}(n, N+1, a, t) + z^{FW}(n, N+2, a, t); \\ s^{FE}(n, a, t) = \sum_{j=1}^N (x^{FE}(n, j, a, t) - x^{FE}(j, n, a, t)) + \\ + y^{FE}(n, N+3, a, t) + v^{FE}(n, N+3, a, t). \quad (29)$$

Введем блочные вектора

$$S(n, t) = \begin{pmatrix} S^M(n, t) \\ S^{FW}(n, t) \\ S^{FE}(n, t) \end{pmatrix}, \quad n \in [1, N], \quad (30)$$

которые характеризуют миграционную компоненту динамики населения.

1. Модель внутренней (межстрановой) миграции. Для моделирования внутренних, т. е. межстрановых, потоков миграции M, FW, FE используются методы, основанные на гипотезе о стохастической природе миграции, но с определенными априорными вероятностными характеристиками, специфическими для указанных классом мигрантов. Иными словами говоря, если потенциальный (\bullet)-мигрант из возрастной группы a собирается переместиться из страны i в страну n , то это событие имеет априорную вероятность $\phi^*(n, i, a, t)$. Знаку (\bullet) могут быть присвоены символы M, FW, FE . Априорная вероятность может зависеть от времени ожидаемой реализации миграционного события.

Предполагается также, что поток $x^*(n, i, a, t)$, по своему объему, существенно меньше потенциальных емкостей стран n и i . Поэтому стохастическая феноменология миграции трансформируется в принцип максимизации обобщенной информационной энтропии Больцмана:

$$H_{IntraC}(t) = - \sum_{\bullet=M,FW,FE} \sum_{n,i \in [1,N]} \sum_{a \in A} x^*(n, i, a, t) \ln \frac{x^*(n, i, a, t)}{e \phi^*(n, i, a, t)}. \quad (31)$$

Потоки, максимизирующие энтропию $H_{IntraC}(t)$ (31), должны удовлетворять

- балансовым ограничениям по суммарным эмиграционным потокам:

$$\begin{aligned} & \sum_{\bullet=M,FW,FE} \sum_{i \in [1,N]} \sum_{a \in A} x^*(n, i, a, t) \leq \\ & \leq \sum_{\bullet=M,FW,FE} \sum_{a \in A} \mu^*(n, t) K^*(n, a, t), \\ & n \in [1, N], \end{aligned} \quad (32)$$

и суммарным иммиграционным потокам:

$$\begin{aligned} & \sum_{\bullet=M,FW,FE} \sum_{n \in [1,N]} \sum_{a \in A} x^*(n, i, a, t) \leq \\ & \leq \sum_{\bullet=M,FW,FE} \sum_{a \in A} g_{in}^*(i, a, t), \\ & i \in [1, N]. \end{aligned} \quad (33)$$

В последних неравенствах $g_{in}^*(i, a, t)$ — количество внутренних \bullet -иммигрантов возраста a , которое может быть принято в стране i .

- «стоимостное» ограничение (суммарное миграционное потребление):

$$\sum_{\bullet=M,FW,FE} \sum_{(i,n) \in [1,N]} c(n, i, t) \sum_{a \in A} x^*(n, i, a, t) \leq T_{in}, \quad (34)$$

где T_{in} — предельные затраты на обеспечение внутренней (межстрановой) миграции.

Максимизация энтропии (31) на многограннике (2.3 — 34) приводит к следующему выражению для миграционных потоков:

$$x^*(n, i, a, t) = \phi^*(n, i, a, t) \exp[-\lambda_n^* - \nu_i^* - \beta^* c(n, i, t)], \quad (35)$$

где множители Лагранжа $\bar{\lambda}^*, \bar{\nu}^*, \beta^*$ определяются отрицательным решением следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \lambda_n \nabla_{\lambda_n} L &= 0, & n \in [1, N], \\ \nu_i \nabla_{\nu_i} L &= 0, & i \in [1, N], \\ \beta \nabla_{\beta} L &= 0, & w \geq 0, \quad u \geq 0, \quad r \geq 0. \end{aligned} \quad (36)$$

В этих выражениях:

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda_n} L &= -w_n \sum_{\bullet=M,FW,FE} \sum_{i \in [1,N]} \sum_{a \in A} u_i \phi^*(n, i, a, t) r^{c(n,i,t)} + \\ & + \sum_{\bullet=M,FW,FE} \sum_{a \in A} \mu^*(n, t) K^*(n, a, t), \\ \nabla_{\nu_i} L &= -u_i \sum_{\bullet=M,FW,FE} \sum_{n \in [1,N]} \sum_{a \in A} w_n \phi^*(n, i, a, t) r^{c(n,i,t)} + \\ & + \sum_{\bullet=M,FW,FE} \sum_{a \in A} g_{in}^*(i, a, t), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\beta} L &= - \sum_{\bullet=M,FW,FE} \sum_{(i,n) \in [1,N]} c(n, i, t) \times \\ & \times \sum_{a \in A} w_n u_i r^{c(n,i,t)} \phi^*(n, i, a, t) + \\ & + T_{in}, \quad (n, i) \in [1, N]. \end{aligned} \quad (38)$$

где $w_n = \exp(-\lambda_n)$, $u_i = \exp(-\nu_i)$, $r = \exp(-\beta)$.

2. Модели внешней миграции (иммиграции). Рассматриваются иммиграционные потоки

$$z^M(n, N + 1, a, t), \quad z^{FW}(n, N + 1, a, t)$$

из России,

$$z^M(n, N + 2, a, t), \quad z^{FW}(n, N + 2, a, t)$$

из СНГ ($N + 2$) и из стран мусульманского пояса ($N + 3$). Если для первых двух регионов иммиграция мотивирована экономическими соображениями и стандарты воспроизводства в основном принадлежат западному типу, то иммиграционные потоки

из стран мусульманского пояса имеют экономическую мотивацию

$$y^M(n, N + 3, a, t), \quad y^{FE}(n, N + 3, a, t)$$

и мотивированы желанием воссоединения семей

$$v^M(n, N + 3, a, t), \quad v^{FE}(n, N + 3, a, t).$$

Иммиграционные потоки из стран $N + 1, N + 2, N + 3$ с учетом их мотивируемости определяются решением следующей задачи максимизации энтропии:

$$\begin{aligned} H_{ExC}(t) = & - \sum_{n=1}^N \sum_{a \in A} \sum_{\bullet=M,FW} \sum_{i=N+1}^{N+2} z^{\bullet}(n, i, a, t) \times \\ & \times \ln \frac{z^{\bullet}(n, i, a, t)}{e\phi^{\bullet}(n, i, a, t)} - \\ & - \sum_{n=1}^N \sum_{a \in A} \sum_{\bullet=M,FE} y^{\bullet}(n, N + 3, a, t) \times \\ & \times \ln \frac{y^{\bullet}(n, N + 3, a, t)}{e\phi^{\bullet}(n, N + 3, a, t)} - \\ & - \sum_{n=1}^N \sum_{a \in A} \sum_{\bullet=M,FE} v^{\bullet}(n, N + 3, a, t) \times \\ & \times \ln \frac{v^{\bullet}(n, N + 3, a, t)}{e\tilde{\phi}^{\bullet}(n, N + 3, a, t)} \Rightarrow \max, \end{aligned} \quad (39)$$

при условиях:

- иммиграционного баланса:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=N+1}^{N+2} \sum_{\bullet=M,FW} \sum_{a \in A} z^{\bullet}(n, i, a, t) + \\ & + \sum_{\bullet=M,FE} \sum_{a \in A} y^{\bullet}(n, N + 3, a, t) + \\ & + v^{\bullet}(n, N + 3, a, t) \leq \\ & \leq \sum_{\bullet=M,FW,FE} \sum_{a \in A} g_{ex}^{\bullet}(n, a, t), \quad n \in [1, N]; \end{aligned} \quad (40)$$

- «стоимостного» ограничения:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \sum_{a \in A} \sum_{i=N+1}^{N+2} \sum_{\bullet=M,FW} c(n, i, a, t) z^{\bullet}(n, i, a, t) + \\ & + \sum_{a \in A} \sum_{\bullet=M,FE} c(n, N + 3, a, t) \times \\ & \times [y^{\bullet}(n, N + 3, a, t) + v^{\bullet}(n, N + 3, a, t)] \leq T_{ex}. \end{aligned} \quad (41)$$

В этих равенствах $g_{ex}^{\bullet}(i, t)$ — количество \bullet -иммигрантов, которое может быть принято в стране i ; T_{ex} — суммарные затраты на иммиграцию из стран $N + 1, N + 2, N + 3$.

Стохастические механизмы выбора миграционных решений индивидами характеризуется априорными вероятностями

$$\phi^{\bullet}(n, N + 1, a, t), \quad \phi^{\bullet}(n, N + 2, a, t), \quad \phi^{\bullet}(n, N + 3, a, t)$$

для экономически мотивированных мигрантов, и априорными вероятностями $\tilde{\phi}^{\bullet}(n, N + 3, a, t)$ для мигрантов, мотивированных желанием воссоединения семей.

Энтропийно-оптимальные потоки мигрантов определяются решением задачи (39)–(2.3):

$$\begin{aligned} z^{\bullet}(n, i, a, t) &= \phi^{\bullet}(n, i, a, t) \exp(-\lambda_i + \beta c(n, i, a, t)), \\ & i = N + 1, N + 2; \\ y^{\bullet}(n, N + 3, a, t) &= \phi^{\bullet}(n, N + 3, a, t) \times \\ & \times \exp(-\lambda_i + \beta c(n, N + 3, a, t)); \\ v^{\bullet}(n, N + 3, a, t) &= \tilde{\phi}^{\bullet}(n, N + 3, a, t) \times \\ & \times \exp(-\lambda_i + \beta c(n, N + 3, a, t)), \\ & n \in [1, N]. \end{aligned} \quad (42)$$

Множители Лагранжа определяются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \lambda_n \nabla_{\lambda_n} L &= 0, \quad n \in [1, N], \\ \beta \nabla_{\beta} L &= 0, \quad \lambda_n \geq 0, \quad n \in [1, N]; \quad \beta \geq 0, \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda_n} L &= -w_n \sum_{i=N+1}^{N+2} \sum_{a \in A} \sum_{\bullet=M,FW} \phi^{\bullet}(n, i, a, t) r^{c(n, i, a, t)} - \\ & - w_n \sum_{a \in A} \sum_{\bullet=M,FE} \phi^{\bullet}(n, N + 3, a, t) r^{c(n, N + 3, a, t)} - \\ & - w_n \sum_{a \in A} \sum_{\bullet=M,FE} \tilde{\phi}^{\bullet}(n, N + 3, a, t) r^{c(n, N + 3, a, t)} - \\ & + \sum_{\bullet=M,FW,FE} g_{ex}^{\bullet}(n, t), \quad n \in [1, N]; \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\beta} L &= - \sum_{n=1}^N \sum_{i=N+1}^{N+2} \sum_{a \in A} \sum_{\bullet=M,FW} \phi^{\bullet}(n, i, a, t) \times \\ & \times c(n, i, a, t) w_n r^{c(n, i, a, t)} - \\ & - \sum_{n=1}^N \sum_{a \in A} \sum_{\bullet=M,FE} \phi^{\bullet}(n, N + 3, a, t) \times \\ & \times c(n, N + 3, a, t) w_n r^{c(n, N + 3, a, t)} - \\ & - \sum_{n=1}^N \sum_{a \in A} \sum_{\bullet=M,FE} \tilde{\phi}^{\bullet}(n, N + 3, a, t) \times \\ & \times c(n, N + 3, a, t) w_n r^{c(n, N + 3, a, t)} + T_{ex}. \end{aligned} \quad (45)$$

В этих уравнениях $w_n = \exp(-\lambda_n)$, $r = \exp(-\beta)$.

Таким образом, входной информацией для модуля «M» является:

- матрица функций априорных вероятностей для межстрановой экономически мотивированной миграции

$$\Phi^*(t) = [\phi^*(n, i, a, t) | (n, i) \in [1, N], a \in A],$$

где $\bullet = M, FW, FE$;

- функции априорных вероятностей для внешней экономически мотивированной иммиграции

$$\phi^*(n, N + 1, a, t), \quad \phi^*(n, N + 2, a, t),$$

$$\bullet = M, FW, \quad n \in [1, N],$$

$$\phi^*(n, N + 3, a, t), \quad \bullet = M, FE, \quad n \in [1, N];$$

- функции априорных вероятностей для внешней неэкономически мотивированной иммиграции

$$\tilde{\phi}^*(n, N + 3, a, t), \quad \bullet = M, FE, \quad n \in [1, N];$$

- коэффициенты мобильности $\mu(1, t), \dots, \mu(N, t)$;
- допустимое количество иммигрантов из стран демо-экономической системы

$$g_{in}^*(1, t), \dots, g_{in}^*(N, t), \quad \bullet = M, FW, FE;$$

из стран метасистемы

$$g_{ex}^*(1, t), \dots, g_{ex}^*(N, t), \quad \bullet = M, FW, FE;$$

- финансовое обеспечение внутренней миграции T_{in} и внешней иммиграции T_{ex} ;
- матрица удельных затрат

1. для внутренней миграции

$$C_{in}(t) = [c(n, i, a, t) | (n, i) \in [1, N], a \in A];$$

2. для внешней иммиграции

$$C_{ex}(t) = [c(n, i, a, t) | n \in [1, N];$$

$$i = N + 1, N + 2, N + 3; \quad a \in A];$$

- вектор состояния населения

$$\mathbf{K}(n, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^M(n, t) \\ \mathbf{K}^{FW}(n, t) \\ \mathbf{K}^{FE}(n, t) \end{pmatrix}.$$

Выходом модуля «M» является вектор сальдо миграции

$$\mathbf{S}(n, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{S}^M(n, t) \\ \mathbf{S}^{FW}(n, t) \\ \mathbf{S}^{FE}(n, t) \end{pmatrix}, \quad n \in [1, N].$$

2.4. Динамика населения (модуль «DP»)

Уравнение динамики населения приобретает следующий вид:

$$\mathbf{K}(n, t + 1) = \mathbf{R}(n, t) + \mathbf{S}(n, t), \quad n \in [1, N], \quad (46)$$

где вектор $\mathbf{K}(n, t)$ определен в (16), $\mathbf{S}(n, t)$ в (30) и матрица $G(n, t)$ в (21).

Время релаксации процесса изменения численности населения принято за базовое. Скорости релаксации других процессов будут соотноситься с временем релаксации процесса (46), и в соответствии с неравенством (5).

2.5. Выход блока «POPULATION»

Выходными переменными данного блока являются:

- поло-возрастное межстрановое распределение населения

$$\mathbf{K}^M(n, t), \mathbf{K}^{FW}(n, t), \mathbf{K}^{FE}(n, t);$$

- поло-возрастное межстрановое распределение трудоспособного населения

$$\mathbf{K}_w^M(n, t), \mathbf{K}_w^{FW}(n, t), \mathbf{K}_w^{FE}(n, t);$$

- поло-возрастное межстрановое распределение сальдо миграции

$$\mathbf{S}^M(n, t), \mathbf{S}^{FW}(n, t), \mathbf{S}^{FE}(n, t).$$

Литература

1. Попков Ю. С. Локально-стационарные модели неравновесных моделей макросистем с самовоспроизведением // ДАН СССР, 1988. Т. 303. № 3. С. 14–16.
2. Агапова Т. А., Серегин С. Ф. Макроэкономика: Учебник. М.: Дело и Сервис, 2000.
3. Дубов Ю. А., Икоева Н. В., Имельбаев Ш. С., Кабаков А. Б., Ковальчук С. Г., Копейкин А. Б., Попков Ю. С., Рязанцев А. Н., Шмульян Б. Л. Оптимальное планирование и проблемы управления развитием городских систем (обзор и задачи исследования) // Автоматика и телемеханика. 1976. № 6. С. 78–116.
4. Завельский М. Г. Государственное регулирование рыночной экономики. М.: Наука, 2006.
5. Зверева Н. В., Веселкова И. Н., Елизарова В. В. Основы демографии. М.: Высшая школа, 2004.
6. Карпова В. М. Построение и исследование динамических моделей рождаемости // Математическое моделирование социальных процессов. М.: МАКС Пресс, 2004. Вып. 6.
7. Маршалл А. Принципы экономической науки. Т. 1–3: пер. с англ. М.: Прогресс, 1993.
8. Моришима М. Равновесие, устойчивость, рост (многоотраслевой анализ): пер. с англ., М.: Наука, 1972.
9. Орлова И. В. Смертность в современной России: характер и особенности. Сайт ИСПИ РАН. [Электронный ресурс] <http://www.ispr.ru/BIBLIO/JOURNAL/Science/journal109.html>.
10. Попков Ю. С., Посохин М. В., Гутнов А. Э., Шмульян Б. Л. Системный анализ и проблемы городского развития. М.: Наука, 1983.
11. Попков Ю. С., Швецов В. И. Принцип локальных равновесий в региональных динамических моделях // Математическое моделирование. 1990. Т. 2. № 5. С. 40–59.

12. *Попков Ю. С.* Теория макросистем. М.: URSS, 1999.
13. *Ресин В. И., Попков Ю. С., Дарховский Б. С.* Вероятностные технологии в управлении развитием города. М.: URSS, 2004.
14. Europe: one continent, different worlds, Population scenarios for the 21st century / Ed. Joop de Beer, Leo van Wissen. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.
15. *Jozan P.* Some features of mortality in the member states of the ECE. Paper at the Regional Population Meeting, 7–10 Dec., 1998. Budapest, Hungary.
16. *Hilderink H.* World population in Transition, An Integrated Regional Modelling Framework, Phd Thesis. Groningen, Holland, 2000.
17. *Hoorn van Wim, Broekman Rob.* Uniformity and Diversity Scenarios for Mortality // European Studies of Population. Kluwer Academic Publishers, 1999. V. 7. P. 71–90.
18. *Lee R. D.* Probabilistic approaches to population forecasting // Rethinking Population Projection / eds. Lutz W., Vaupel J. W. IIASA, Luxemburg, Austria, 1997.
19. *Long L. H.* On measuring of geographical mobility // Journal of American Statistical Association. 1993. V. 65. P. 1195–1203.
20. *Long L. H., Boertlein C. G.* The geographical mobility of Americans: in international comparison // US Bureau of the Census, ser. P-26. № 64. US Dept. of Commerce, Washington DC.
21. *Lutz W., Sanderson W., Scherbov S.* Doubling of world population unlikely // Nature. June 1997. V. 387. № 19. P. 803–805.
22. *Popkov Y. S., Shvetsov V. I., Weidlich W.* Settlement Formation Models with Entropy Operator // Annals of Regional Science. 1998. V. 32. P. 267–294.
23. *Spijker J. J. A., Tabeau E., van der Veen W. J.* Regional differences in cause-specific mortality in eleven European countries in 1990–91. Working Paper № 1998/4. The Hague, The Netherlands, NIDI.
24. *Spijker J.* Socioeconomic determinants of regional mortality differences in Europe. Dutch University Press, Amsterdam, 2004.
25. Vienna Yearbook of Population Research, Vienna Institute of Demography, Austrian Academy of Sciences / Ed. Feichtinger G. 2003.
26. *Tabeau E.* Human longevity in the future: The Dutch perspective. Working paper № 1996/2. The Hague, The Netherlands: NIDI.
27. *van der Veen W. J.* Regional Mortality Differences in Belgium, Germany, and The Netherlands. Demographic report 18. Faculty of Spatial Sciences, University of Groningen. The Netherlands, 1994.
28. *Weidlich W., Haag G.* An Integrated Model of Transport and Urban Evolution. Springer, 1999.
29. *Weidlich W.* Sociodynamics. Harwood Academic Publishers, 2000; *Вайдлук В.* Социодинамика, пер. с англ. М.: URSS, 2004.
30. *Wilson A. G.* Statistical Theory of Spatial Distribution Models // Transportation Research. 1967. V. 1. P. 253–269.

Алиев Александр Семенович. С. н. с. ИСА РАН, к. т. н. Окончил Московский институт инженеров железнодорожного транспорта в 1980 г. Количество печатных работ: 19. Область научных интересов: проблемы моделирования транспортных потоков.
E-mail: ali@isa.ru

Попков Алексей Юрьевич. С. н. с. ИСА РАН, к. т. н. Окончил МГУ в 2002 г. Количество печатных работ: 7. Область научных интересов: математическое моделирование, высокопроизводительные вычисления, параллельные алгоритмы, распределенные вычислительные системы.
E-mail: aropkov@isa.ru

Попков Юрий Соломонович. Д. т. н., директор ИСА РАН, профессор. Окончил МЭИ в 1960 г. Количество печатных работ: 151. Область научных интересов: системный анализ, математическое моделирование.
E-mail: popkov@isa.ru