

# Исследование хаотической динамики в модели Вольтерра—Гаузе

Д. А. БУРОВ, Д. Л. ГОЛИЦЫН

**Аннотация.** В статье рассматривается модель два хищника — жертва, представленная в виде трехмерной автономной системы дифференциальных уравнений. Авторами проводится подробный анализ ранее не исследованных особых точек системы, описание сценария перехода к хаотической динамике и приближенное построение бифуркационных диаграмм. Показано существование в системе каскадов бифуркаций удвоения периода предельных циклов, субгармонического и гомоклинического каскадов, что полностью соответствует теории Фейгенбаума—Шарковского—Магницкого [1].

**Ключевые слова:** модель хищник-жертва, хаотическая динамика, теория ФШМ.

## Введение

Рассматриваемая модель Вольтерра—Гаузе описывает сообщество два хищника — жертва, в которой один из хищников является, в свою очередь, жертвой для другого хищника. Предложенная модель имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a \left( 1 - \frac{\lambda}{a} x \right) x - b x^k y, \\ \dot{y} &= d x^k y - c y - e y^p z, \\ \dot{z} &= (f y^p - g) z. \end{aligned} \quad (1)$$

Переменные  $x$ ,  $y$  и  $z$  представляют собой популяции жертвы, первого и второго хищников соответственно. Система имеет 10 параметров ( $a, b, c, d, e, f, \lambda, k$  и  $p$ ) и включает логистическую функцию Ферхюльста

$$\phi(x) = x \left( 1 - \frac{\lambda}{a} x \right),$$

которая ограничивает рост популяции  $x$ . Также в системе присутствует функция Гаузе

$$q(x) = b x^k,$$

определяющая норму потребления для первого хищника (для второго хищника она зависит от  $y$ ).

Коэффициенты  $d$  и  $f$  задают темпы роста хищников, а параметры  $c$  и  $g$  определяют их смертность. Данная система (1) описывает модель, в которой популяции жертвы не могут существовать в отсутствие хищников.

В работе [2] найдены некоторые особые точки данной системы, исследованы типы их равновесий, показано существование каскада бифуркаций удвоения периода и субгармонического каскада в окрестности одной из особых точек.

Как и в работе [2], примем параметры  $p$  и  $k$  равными  $1/2$ . Известно, что при таких значениях параметров в системе существует сложная, хаотическая динамика. Кроме того, приведем систему к безразмерному виду, производя следующую замену переменных:

$$x_1 = k_1 x, \quad y_1 = k_2 y, \quad z_1 = k_3 z, \quad t_1 = k_4 t,$$

где

$$k_1 = \frac{a}{\lambda}, \quad k_2 = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{a}{\lambda}}, \quad k_3 = \frac{a^{5/4} d}{e \sqrt{b} \lambda^{5/4}}, \quad k_4 = \frac{\sqrt{\lambda}}{d \sqrt{a}}.$$

В итоге получим систему:

$$\begin{aligned} \xi \dot{x}_1 &= (1 - x_1) x_1 - \sqrt{x_1} y_1, \\ \dot{y}_1 &= \sqrt{x_1} y_1 - \delta_1 y_1 - \sqrt{y_1} z_1, \\ \dot{z}_1 &= \epsilon (\sqrt{y_1} - \delta_2) z_1, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\xi = \frac{d}{\sqrt{\lambda a}}, \quad \epsilon = \frac{f(\lambda a)^{1/4}}{d \sqrt{b}}, \quad \delta_1 = \frac{c \sqrt{\lambda}}{d \sqrt{a}}, \quad \delta_2 = \frac{g \lambda^{1/4} \sqrt{b}}{a^{3/4} f}.$$

В системе (2), в отличие от системы (1), содержится всего 4 параметра:  $\xi, \epsilon, \delta_2, \delta_1$ . Везде далее вместо  $x_1, y_1, z_1$  будем писать  $x, y, z$ .

## 1. Исследование сценария перехода к хаосу

1. Систему (2) будем рассматривать только в области диссипации, не интересуясь характером движения в консервативном случае и при положительном значении дивергенции векторного поля. Скажем лишь, что в последних двух случаях не было

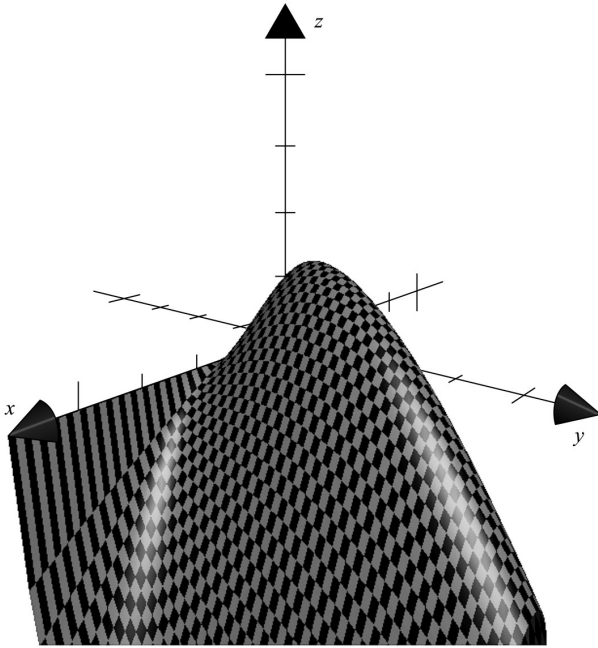


Рис. 1. Поверхность  $\operatorname{div} F = 0$

обнаружено сложной, хаотической динамики. Отметим также быстрое разрушение системы при положительном значении дивергенции, происходящее вследствие притяжения траекторий в области с отрицательными значениями переменных, что лишено физического смысла, или к особым точкам с нулевыми значениями, что также имеет ограниченный физический смысл вымирания одной или нескольких популяций.

Выпишем в явном виде выражение для дивергенции векторного поля:

$$\operatorname{div} F = \left( \frac{1 - 2x - \frac{y}{2\sqrt{x}}}{\xi} - \left( x - \delta_1 - \frac{z}{2\sqrt{y}} \right) + \epsilon(\sqrt{y} - \delta_2) \right). \quad (3)$$

Для определения области диссипации, в которой будет проведено дальнейшее исследование, решим неравенство:

$$\operatorname{div} F < 0.$$

Подставляя (3) и выражая  $z$ , получим, при фиксированных параметрах системы, неравенство относительно переменных  $x, y, z$ :

$$2\sqrt{y} \left( \frac{1 - 2x - \frac{y}{2\sqrt{x}}}{\xi} - (x - \delta_1) + \epsilon(\sqrt{y} - \delta_2) \right) < z. \quad (4)$$

Фиксируя параметры

$$\xi = 0,8, \quad \epsilon = 1,4, \quad \delta_2 = 0,37, \quad \delta_1 = 0,05,$$

построим поверхность

$$Z(x, y) = 2\sqrt{y} \left( \frac{1 - 2x - \frac{y}{2\sqrt{x}}}{\xi} - (x - \delta_1) + \epsilon(\sqrt{y} - \delta_2) \right), \quad (5)$$

изображенную на рис. 1.

Очевидно, построенная поверхность определяет  $\operatorname{div} F = 0$ , то есть при  $x, y, z$ , удовлетворяющих этой поверхности, система является консервативной. В свою очередь из неравенства (4) следует диссипативность системы в области над поверхностью (5).

Общий вид построенной поверхности, а значит, и области диссипации, сохраняется при всех рассматриваемых в статье параметрах и играет важную роль при дальнейшем исследовании системы, позволяя сужать границы изменения параметров и делать выводы о возможности существования хаотических аттракторов в той или иной области пространства  $(x, y, z)$ .

2. Исследование характера движений начнем с рассмотрения простейших предельных множеств — особых точек системы. Ранее были найдены только точки, расположенные в плоскости  $z = 0$ . Они в явном виде могут быть найдены из системы (2):  $O_0 = (0, 0, 0)$ ,  $O_1 = (1, 0, 0)$ ,  $O_2 = (\delta_1^2, \delta_1(1 - \delta_1^2), 0)$ .

Для определения типов их равновесия сделаем замену переменных:  $x = v^2$ ,  $y = w^2$ ,  $z = z$ . Тогда система принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{v(1 - v^2) - w^2}{2\xi}, \\ \dot{w} &= \frac{1}{2}(v - \delta_1)w - z, \\ \dot{z} &= \epsilon(w - \delta_2)z. \end{aligned} \quad (6)$$

Выписывая матрицу Якоби системы (6) в точке  $O_0$  и находя ее собственные значения

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\xi}, \quad \lambda_2 = -\frac{\delta_2}{2}, \quad \lambda_3 = -\epsilon\delta_2,$$

определяем, что  $O_0$  является седло-узлом с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым многообразиями (рассматриваются только положительные значения параметров). Для точки  $O_1$  находим:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\xi}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \delta_1}{2}, \quad \lambda_3 = -\epsilon\delta_2.$$

Следовательно,  $O_1$  является устойчивым узлом при  $\delta_1 < 1$  и седло-узлом иначе.

Как показано в работах [1, 3], хаотическое движение зачастую обусловлено существованием в системе сингулярного предельного цикла — перио-

дического решения, среди показателей Флоке которого имеется пара с одинаковой мнимой частью и различными вещественными частями. Такой цикл часто рождается в окрестности особой точки при бифуркации Андронова—Хопфа. Как видно из выражений для собственных значений матрицы Якоби в точках  $O_0$  и  $O_1$ , в окрестности этих точек такая бифуркация невозможна, и поэтому нет никаких условий для дальнейшего усложнения движения. Особая точка  $O_2$  исследована в работе [2], и поэтому в данной статье авторами не рассматривается.

Однако в системе (2) возможно существование других, ранее не исследованных особых точек. Найдем их. Мы описали все точки, расположенные в плоскости  $z = 0$ . Потребуем теперь  $z \neq 0$ , тогда из третьего уравнения:  $\sqrt{y} = \delta_2$ . Подставим в первое уравнение, получим кубическое уравнение относительно  $\sqrt{x}$ :

$$(1 - x)\sqrt{x} - \delta_2^2 = 0. \tag{7}$$

Решая уравнение (7) и подставляя найденные  $x, y$ , получим выражения для трех возможных особых точек.

Рассмотрим подробнее уравнение (7). Сделаем замену  $p = \sqrt{x}, p \geq 0$ , тогда:

$$p^3 - p + \delta_2^2 = 0. \tag{8}$$

Выпишем выражение для дискриминанта кубического уравнения:

$$D = 4 - 27\delta_2^4.$$

Напомним, при  $D > 0$  кубическое уравнение имеет три различных вещественных корня, при  $D = 0$  — два вещественных, как минимум два из которых совпадают, и, наконец, при  $D < 0$  — одно вещественное и два комплексных.

Каждому из этих случаев соответствует график а), б), в) на рис. 2. Заметим, что в соответствии со сделанной заменой  $p \geq 0$ , поэтому в системе могут существовать две (при  $D > 0$ ) или одна ( $D = 0$ ) особые точки, не лежащие в плоскости  $z = 0$  и не исследованные ранее.

Обозначим  $p_1$  и  $p_2$  — положительные вещественные корни уравнения (8), причем  $p_1 > p_2$ . Тогда выражения для соответствующих особых точек примут вид:

$$O_3(p_1^2, \delta_2^2, (p_1 - \delta_1)\delta_2),$$

$$O_4(p_2^2, \delta_2^2, (p_2 - \delta_1)\delta_2).$$

Для определения типа особой точки  $O_3$  необходимо решить характеристическое уравнение для матрицы Якоби, решение которого в этой точке имеет сложную аналитическую форму, поэтому исследование было проведено численно.

Такое исследование обнаруживает возможность существования бифуркации Андронова—Хопфа, которому соответствует одновременный переход через мнимую ось слева направо двух комплексно сопряженных собственных значений. Кроме того, точка  $O_3$  находится в диссипативной области (рис. 1), и при потере устойчивости этой особой точки рождается устойчивый предельный цикл, который может бифурцировать при дальнейшем изменении параметров. Действительно, например, при фиксированных параметрах  $\xi = 0,8, \epsilon = 1, \delta_2 = 0,39$  и при уменьшении параметра  $\delta_1$  до значения  $\delta_1 = 0,7$  имеет место бифуркация Андронова—Хопфа. Высказанные предположения о дальнейшей эволюции цикла подтверждаются численными экспериментами: так, при значении  $\delta_1 = 0,621$  — в системе существует цикл периода 2, при  $\delta_1 = 0,604$  — цикл четвертого периода. Таким образом, имеет место каскад удвоения периода предельных циклов, завершающийся аттрактором Фейгенбаума (циклы соответствующих периодов изображены на рис. 3).

Вслед за каскадом Фейгенбаума, согласно ФШМ-теории, следует субгармонический каскад рождения устойчивых циклов, периоды которых определяются согласно порядку Шарковского. Так, при  $\delta_1 = 0,5941$  образуется цикл периода 7, а при  $\delta_1 = 0,591$  — цикл периода три (рис. 4). Далее возможен гомоклинический каскад, речь о котором пойдет ниже.

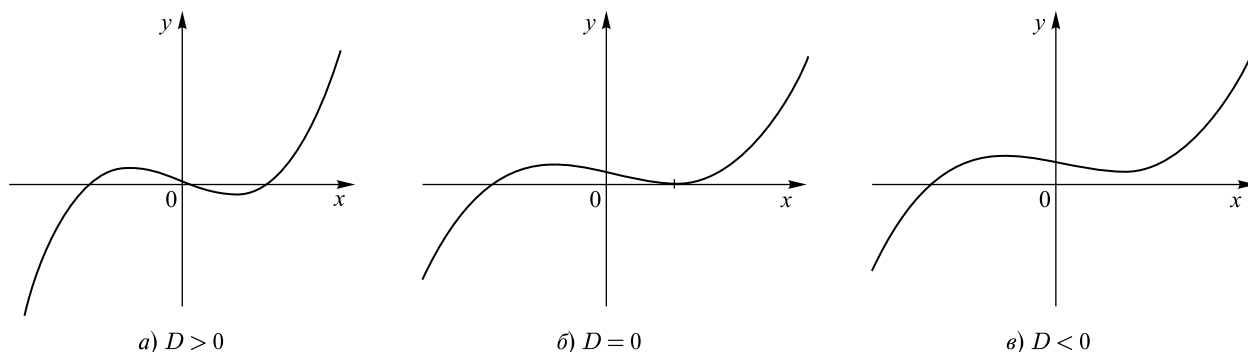
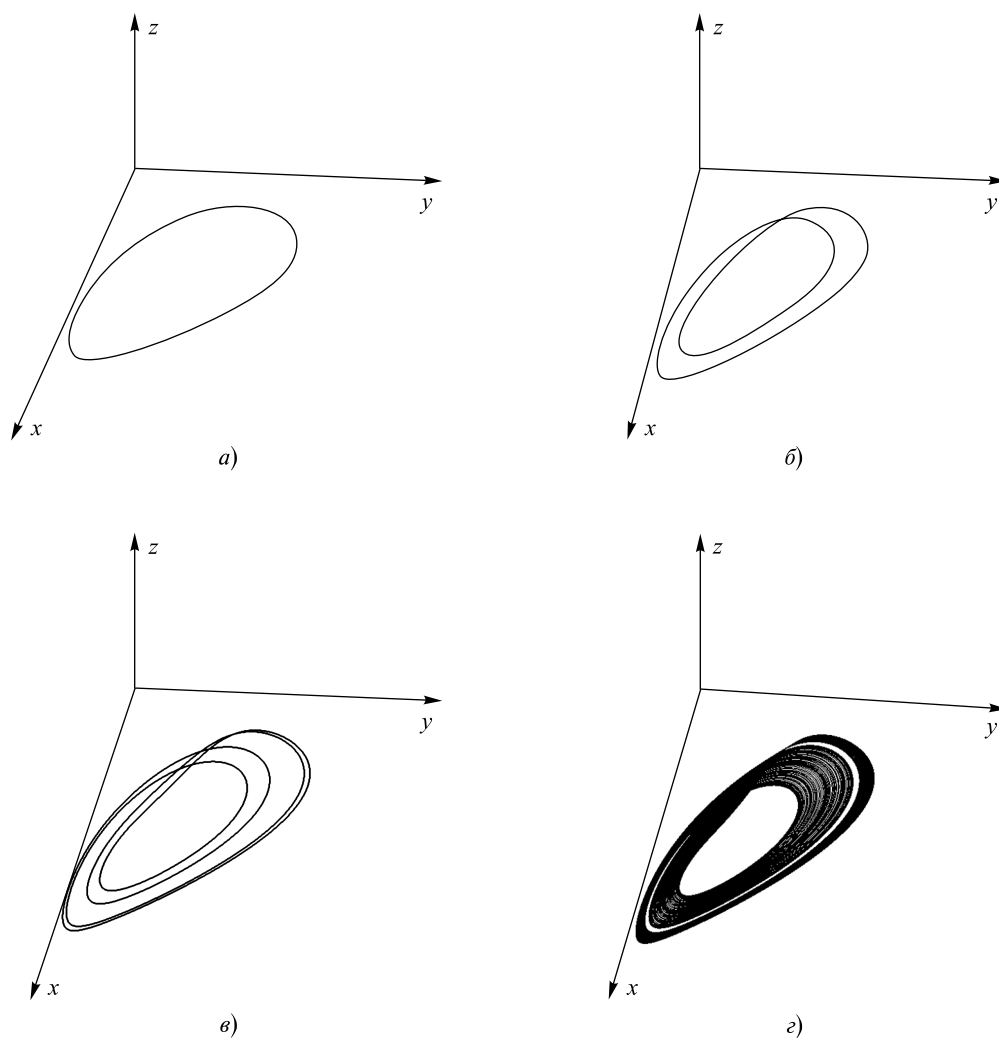


Рис. 2. График функции, соответствующей уравнению (8)



**Рис. 3.** Каскад Фейгенбаума удвоения периода: а) цикл первого периода; б) периода два; в) учетверенного периода; г) аттрактор Фейгенбаума

Особую важность в определении хаотической динамики, наблюдаемой в системе, играет цикл периода три. Его существование при определенном значении параметра, согласно теореме Шарковского, означает существование в системе цикла любого периода. Интересно построить бифуркационную диаграмму в пространстве параметров существования в системе цикла периода три.

Для построения такой диаграммы разумно рассматривать только те значения параметров, при которых в системе возможна бифуркация Андронова—Хопфа. В силу однозначности условий, определяющих потерю устойчивости особой точки и одновременное рождение устойчивого цикла, можем построить область, в которой происходит такая бифуркация и тем самым сузить границы рассматриваемых параметров.

Для построения бифуркационной диаграммы существования в системе цикла периода три, необ-

ходимо алгоритмически решить задачу нахождения значения параметра  $\delta_1$ , соответствующего циклу искомого периода. Для решения поставленной задачи замечательным оказывается использование теоремы Шарковского, устанавливающей порядок появления в системе циклов с определенным периодом. Постепенно уменьшая значения параметра  $\delta_1$  и определяя период цикла, существующего при таком параметре, мы можем, опираясь на порядок Шарковского, постепенно сужать область изменения  $\delta_1$ , в которой осуществляется поиск. Действительно, обнаружив, например, при значении  $\delta_*$  цикл периода 7, мы будем продолжать поиск только для  $\delta_1 < \delta_*$ , так как цикл периода три, согласно упомянутому выше порядку, не может предшествовать циклу периода 7. Снизу же область рассматриваемых  $\delta_1$  ограничена, во-первых, диссипативностью системы и областями притяжения существующих в системе устойчивых

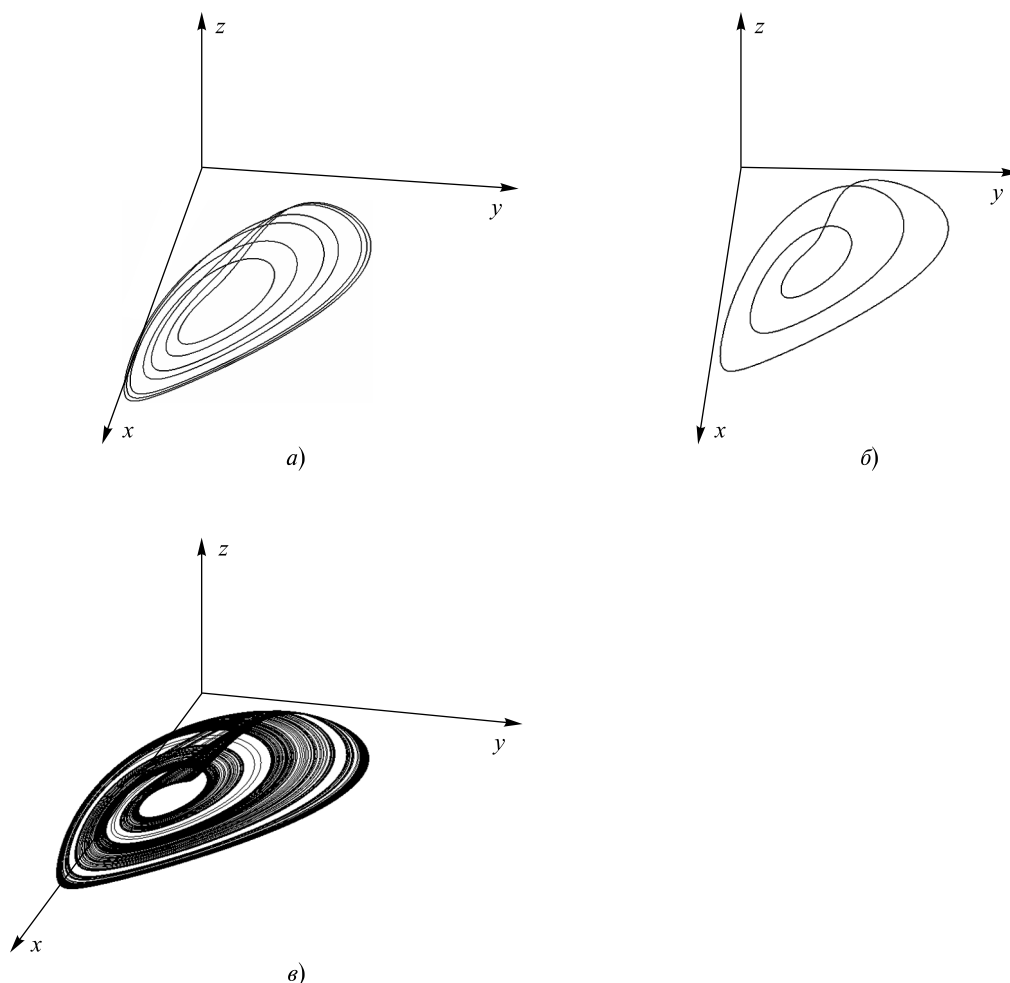


Рис. 4. Субгармонический каскад: а) цикл периода семь; б) периода три; в) субгармонический аттрактор

особых точек и, кроме того, существованием циклов гомоклинического каскада, возможного после исследуемого субгармонического.

Естественно, даже несмотря на все теоретические знания и следующие из них ограничения, задача поиска цикла периода три остается задачей чрезвычайной вычислительной сложности. Поэтому построение подобной бифуркационной диаграммы может быть лишь приблизительным. Пример такой диаграммы, построенной для рассматриваемых в статье параметров, изображен на рис. 1. Несмотря на приближенный характер ее построения, такая диаграмма позволяет сделать вывод о смысле того или иного параметра с точки зрения возникновения в системе хаотической динамики — является ли параметр только определяющим масштаб и конкретное положение происходящих бифуркаций, или его изменения могут привести к структурным изменениям в системе, определяющим саму возможность возникновения описанных каскадов бифуркаций.

3. Вслед за субгармоническим каскадом бифуркаций следует, согласно теории Фейгенбаума—Шарковского—Магницкого, гомоклинический каскад бифуркаций. Для определения области, в которой будет проводиться исследование каскада, удобно воспользоваться построенной выше диаграммой и рассматривать только те значения параметра, в которых существует цикл периода три, и, таким образом, существуют все условия для возникновения исследуемого

Пределы каскадов таких бифуркаций могут завершаться образованием гомоклинических, гетероклинических контуров, а также более сложных структур, как, например, при бифуркации точка-цикл. Ни одного из таких аттракторов авторами обнаружено не было, кроме гомоклинической петли сепаратрисы особой точки  $O_3$ , являющейся седло-фокусом.

Для установления вектора параметров, при которых в системе существует контур, воспользуемся предложенным в [1] методом. Приведем краткое описание проделанных шагов данного алгоритма.

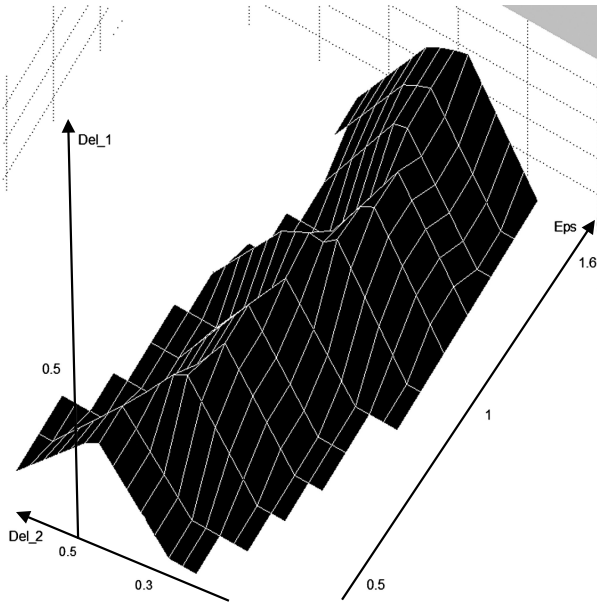


Рис. 5. Диаграмма существования цикла периода три

Для удобства сделаем замену переменных так, что  $\dot{z} = y$ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{(1-x)x - \sqrt{x}(\frac{y}{\epsilon z} + \delta_2)^2}{\xi}, \\ \dot{y} &= \frac{y^2}{z} + \frac{(\sqrt{x} - \delta_1)(y + \delta_2 \epsilon z) - \epsilon z^2}{2}, \\ \dot{z} &= y. \end{aligned} \quad (9)$$

У этой системы интересующая нас особая точка имеет координаты:  $O_3^* = (p_1^2, 0, (p_1 - \delta_1)\delta_2)$ . Тогда тангенс угла наклона касательной к сепаратрисе, соответствующей одномерному устойчивому многообразию и собственному значению  $\lambda_1$  системы (9), в проекции  $(z, y)$  будет равен  $\frac{dy}{dz}(O_3^*) = \lambda_1$ . Значение  $\frac{dx}{dz}(O_3^*) = -\frac{a_{12}\lambda_1}{a_{11} - \lambda_1}$  ( $a_{ij}$  — коэффициенты матрицы линеаризации) соответствует тангенсу угла наклона касательной в проекции  $(x, z)$ .

Будем численно интегрировать систему (9) в обратном времени с начальными условиями:

$$\begin{aligned} x(0) &= p_1^2 - e \frac{a_{12}\lambda_1}{a_{11} - \lambda_1}, & y(0) &= -e\lambda_1, \\ z(0) &= (p_1 - \delta_1)\delta_2 - e. \end{aligned}$$

Таким образом, при малом параметре  $e$  полученная траектория  $(x^-(t), y^-(t), z^-(t))$  будет почти совпадать с сепаратрисой, соответствующей одномерному устойчивому многообразию. Выберем момент времени  $t^-$  такой, что  $x^-(t^-) = p_1^2$ . Теперь выпустим в прямом времени траекторию, сколь угодно близкую к сепаратрисе двумерного неустойчивого

многообразия. Для этого сделаем еще одну замену. Перенесем точку  $O_3^*$  в начало координат и представим матрицу Якоби в точке  $O_3^*$  системы (9) в наиболее простом виде — в жордановой форме. Этого можно добиться невырожденным преобразованием координат ( $\det(C) \neq 0$ ):

$$C^{-1}AC = \begin{vmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = D.$$

В координатах  $(u, v, w)^T = C^{-1}(x, y, z)^T$  матрица  $D$  является матрицей линеаризации в исследуемой точке. Значит, плоскость  $(u, v)$  является касательной к двумерному неустойчивому многообразию и, следовательно, начальные условия

$$u_0 = e \cos(\phi), \quad v_0 = e \sin(\phi), \quad w_0 = 0$$

позволяют получить траекторию, сколь угодно близкую к сепаратрисе. При этом начальная фаза является произвольной.

Тогда, наконец, делая обратную замену и перенося точку обратно из начала координат, будем численно интегрировать систему (9) в прямом времени с начальными условиями:

$$\begin{aligned} x(0) &= p_1^2 + c_{11}e \cos(\phi) + c_{12}e \sin(\phi), \\ y(0) &= c_{21}e \cos(\phi) + c_{22}e \sin(\phi), \\ z(0) &= (p_1 - \delta_1)\delta_2 + c_{11}e \cos(\phi) + c_{32}e \sin(\phi). \end{aligned}$$

Получим траекторию  $(x^+(t), y^+(t), z^+(t))$ , для которой найдем момент времени  $t^+$  такой, что, опять-таки,  $x^+(t^+) = p_1^2$ .

Тогда нам останется установить равенство

$$y^+(t^+) = y^-(t^-) \quad \text{и} \quad z^+(t^+) = z^-(t^-).$$

Выполнения первого равенства добьемся за счет выбора начальной фазы  $\phi$ , которая является произвольной. Решая второе уравнение относительно параметров, найдем набор их значений, при котором в системе существует гомоклиническая петля сепаратрисы седло-фокуса.

При зафиксированных значениях  $\xi = 0,866$ ,  $\epsilon = 1,428$ ,  $\delta_2 = 0,376$  находим:  $\delta_1 \approx 0,59902$ . На рис. 6

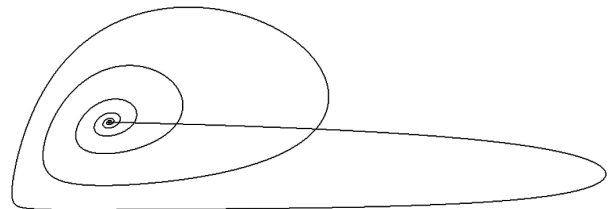


Рис. 6. Гомоклиническая петля сепаратрисы седло-фокуса



в проекции  $(x, z)$  (в координатах проведенной замены) изображен соответствующий контур, являющийся пределом гомоклинического каскада бифуркаций.

### Заключение

Таким образом, авторами исследована система Вольтерра—Гаузе, найдены ранее неизвестные особые точки, проведен подробный анализ сценария перехода к хаосу, осуществлено построение диаграммы цикла периода три и впервые показано существование в системе гомоклинического каскада бифуркаций. Найдено значение параметров, соответствующих петле сепаратрисы особой точки типа седло-фокус. Важно отметить, что все описанные результаты полностью соответствуют теории Фейген-

баума—Шарковского—Магницкого и вновь позволяют утверждать ее универсальность в описании динамических диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

### Литература

1. *Магницкий Н. А., Сидоров С. В.* Новые методы хаотической динамики. М.: URSS, 2004. 320 с.
2. *Сидоров С. В.* Появление хаотических решений в модели Вольтерра—Гаузе // Труды ИСА РАН. 2006. Т. 25. С. 218–222.
3. *Магницкий Н. А.* О природе хаотических аттракторов нелинейных диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Сб. Нелинейная динамика и управление. Вып. 4 / под ред. С. В. Емельянова, С. К. Коровина, М.: Физматлит, 2004. С. 37–58.

**Буров Дмитрий Анатольевич.** Студент МГУ им. М. В. Ломоносова, факультет Вычислительной Математики и Кибернетики.  
E-mail: gsarret@gmail.com

**Голицын Дмитрий Леонидович.** Студент МГУ им. М. В. Ломоносова, факультет Вычислительной Математики и Кибернетики.  
E-mail: goldmitr7@gmail.com