

Модели и методы решения

Методика вероятностного согласованного прогнозирования ожидаемой продолжительности жизни для заданной совокупности стран

В. В. ГОЛУБКОВ, С. В. КРУГЛЯКОВ

Аннотация. В работе излагается методика вероятностного одновременного согласованного прогнозирования ожидаемой продолжительности жизни для заданного набора стран. Данная методика основана на разбиении стран тем или иным способом (в том числе и экспертно) на непересекающиеся группы, построении параметрических моделей страновых, групповых и межгрупповых составляющих ожидаемой продолжительности жизни и последовательной иерархической обработке статистических данных. На основе построенных моделей прогнозирование осуществляется имитационным способом. При этом основными гипотезами, используемыми при прогнозировании, являются предположения, основанные на анализе статистических данных для ряда стран, согласно которым с ростом времени (1) растут тренды ожидаемой продолжительности жизни для всех стран и (2) происходит сближение этих трендов. Проведено тестирование предлагаемой методики на реальных статистических данных.

Ключевые слова: вероятностное прогнозирование, тренд, параметрическая модель, оценивание параметров, автокорреляционная функция, ожидаемая продолжительность жизни.

1. Описание прогностической модели ожидаемой продолжительности жизни

В работе [1], посвященной исследованию зависимости от времени ожидаемой продолжительности жизни, были получены результаты, согласно которым тренды ожидаемой продолжительности жизни для ряда стран растут практически по линейному закону на довольно большом историческом периоде времени, причем происходит сближение этих трендов. Учитывая эти результаты, при построении прогностической модели ожидаемой продолжительности жизни для заданной совокупности таких стран были использованы гипотезы, согласно которым с ростом времени (1) тренды ожидаемой продолжительности жизни растут для всех стран,

причем глобальный тренд растет по линейному закону и (2) происходит сближение страновых трендов.

Итак, пусть даны отрезки временных дискретных рядов с постоянным временным шагом для данного демографического показателя (в нашем случае для ожидаемой продолжительности жизни при рождении) для n стран, разбитых на m непересекающихся групп:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_j^{(i)}(t_k), \quad t_k = t_1 + (k-1)\Delta t, \quad k = \overline{1, N}, \\ j = \overline{1, n_i}, \quad i = \overline{1, m}, \quad \sum_{i=1}^m n_i = n, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\tilde{Y}_j^{(i)}(t_k)$ — известное значение демографического показателя для j -ой страны, принадлежащей i -ой группе в момент времени t_k , а Δt — временной

шаг. Тогда для моделирования и прогнозирования процесса (1) предлагается использовать следующую модель, являющуюся обобщением модели Ли—Картера [2, 3]:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_j^{(i)}(t_k) &= Y^{(i)}(t_k) + \beta_j^{(i)} K^{(i)}(t_k) + e_j^{(i)}(t_k), \\ \sum_{j=1}^{n_i} \beta_j^{(i)} &= 0, \quad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N K^{(i)}(t_k) = 1; \\ Y^{(i)}(t_k) &= Y(t_k) + \beta^{(i)} K(t_k) + e^{(i)}(t_k), \\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N K(t_k) &= 1; \quad Y(t_k) = Y(\mathbf{q}, t_k) + e(t_k), \\ Y(\mathbf{q}, t_k) &= q_1 + q_2(t_k - t_1), \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2)^T; \\ k = \overline{1, N}; \quad j &= \overline{1, n_i}, \quad i = \overline{1, m}; \quad \sum_{i=1}^m n_i = n. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $Y^{(i)}(t_k)$ — групповой тренд, $Y(t_k)$ — глобальный тренд, $Y(\mathbf{q}, t_k)$ — параметрическая модель глобального тренда, \mathbf{q} — вектор параметров этой модели, $\beta_j^{(i)}$ и $\beta^{(i)}$ — соответственно страновые и групповые параметры модели (2), а $e_j^{(i)}(t_k)$, $e^{(i)}(t_k)$ и $e(t_k)$ — соответственно случайная составляющая для j -ой страны в i -ой группе, групповая случайная составляющая i -ой группы и глобальная случайная составляющая (случайная составляющая глобального тренда). Следует отметить, что в предлагаемой модели (2) в качестве параметрической модели глобального тренда взята линейная модель по времени. Выбор такой модели обусловлен результатами анализа зависимости от времени ожидаемой продолжительности жизни для стран с достаточно низким уровнем смертности, полученными в работе [1].

В дальнейшем относительно случайных составляющих будем предполагать, что они распределены нормально независимо друг от друга с нулевыми математическими ожиданиями и являются стационарными случайными дискретными временными процессами, что формально можно записать в виде

$$\begin{aligned} e_j^{(i)}(t_k) &\sim N(0, (\sigma_j^{(i)})^2), \quad e^{(i)}(t_k) \sim N(0, (\sigma^{(i)})^2), \\ e(t_k) &\sim N(0, \sigma^2); \\ \text{Cov}(e_j^{(i)}(t_k), e_j^{(i)}(t_l)) &= (\sigma_j^{(i)})^2 R_j^{(i)}(|t_k - t_l|), \\ R_j^{(i)}(0) &= 1, \quad |R_j^{(i)}(|t_k - t_l|)| < 1; \\ \text{Cov}(e^{(i)}(t_k), e^{(i)}(t_l)) &= (\sigma^{(i)})^2 R^{(i)}(|t_k - t_l|), \\ R^{(i)}(0) &= 1, \quad |R^{(i)}(|t_k - t_l|)| < 1; \\ \text{Cov}(e(t_k), e(t_l)) &= \sigma^2 R(|t_k - t_l|), \\ R(0) &= 1, \quad |R(|t_k - t_l|)| < 1; \\ \text{Cov}(e_j^{(i)}(t_k), e^{(s)}(t_l)) &= 0, \quad \text{Cov}(e_j^{(i)}(t_k), e(t_l)) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(e^{(i)}(t_k), e(t_l)) &= 0 \quad \text{для всех } i, j, s; \\ \text{Cov}(e_j^{(i)}(t_k), e_r^{(s)}(t_l)) &= 0 \quad \text{для всех } i \neq \text{или } j \neq r; \\ \text{Cov}(e^{(i)}(t_k), e^{(s)}(t_l)) &= 0 \quad \text{для всех } i \neq s; \\ k, l &= \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, n_i}, \quad r = \overline{1, n_s}, \quad i, s = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $(\sigma_j^{(i)})^2$, $(\sigma^{(i)})^2$, σ^2 — дисперсии соответственно страновых, групповых и глобальной случайных компонент $e_j^{(i)}(t_k)$, $e^{(i)}(t_k)$ и $e(t_k)$, $R_j^{(i)}(\tau)$, $R^{(i)}(\tau)$, $R(\tau)$ — соответствующие автокорреляционные функции, а $\text{Cov}(\xi, \eta)$, $N(0, \delta^2)$ — соответственно ковариация случайных величин ξ, η и запись нормального закона распределения случайной величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией δ^2 .

В данной методике для описания функций $K^{(i)}(t)$, $K(t)$, $R_j^{(i)}(\tau)$, $R^{(i)}(\tau)$, $R(\tau)$ предлагается использовать их параметрические модели $K_{\text{mdl}}^{(i)}(\mathbf{p}^{(i)}, t)$, $K_{\text{mdl}}(\mathbf{p}, t)$, $R_j^{(i)}(r_j^{(i)}, \tau)$, $R^{(i)}(r^{(i)}, \tau)$, $R(r, \tau)$, обладающие следующими свойствами:

$$\begin{aligned} R_j^{(i)}(r_j^{(i)}, \tau) &= R_{\text{mdl}}(r_j^{(i)}, \tau), \quad 0 \leq r_j^{(i)} < 1; \\ R^{(i)}(r^{(i)}, \tau) &= R_{\text{mdl}}(r^{(i)}, \tau), \quad 0 \leq r^{(i)} < 1; \\ R(r, \tau) &= R_{\text{mdl}}(r, \tau), \quad 0 \leq r < 1; \\ R_{\text{mdl}}(r, \tau) &= r^\tau, \quad 0 \leq r < 1, \quad \tau \geq 0; \\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N K_{\text{mdl}}^{(i)}(\mathbf{p}^{(i)}, t_k) &= 1, \quad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N K_{\text{mdl}}(\mathbf{p}, t_k) = 1, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} K_{\text{mdl}}^{(i)}(\mathbf{p}^{(i)}, t) &= 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} K_{\text{mdl}}(\mathbf{p}, t) = 0; \\ j &= \overline{1, n_i}, \quad i = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $r_j^{(i)}$, $r^{(i)}$, r — скалярные, а $\mathbf{p}^{(i)}$ и \mathbf{p} — векторные параметры соответствующих моделей. Свойства моделей $K_{\text{mdl}}^{(i)}(\mathbf{p}^{(i)}, t)$ и $K_{\text{mdl}}(\mathbf{p}, t)$, приведенные в (4) является отражением гипотезы сближения страновых и групповых трендов. В дальнейшем изложение методики будет вестись в предположении, что модели $K_{\text{mdl}}^{(i)}(\mathbf{p}^{(i)}, t)$, $K_{\text{mdl}}(\mathbf{p}, t)$, $R_j^{(i)}(r_j^{(i)}, \tau)$, $R^{(i)}(r^{(i)}, \tau)$, $R(r, \tau)$ обладают свойствами (4), хотя использование других аналогичных моделей не представляет принципиальных трудностей. Параметры указанных моделей оцениваются по статистическим данным для заданной совокупности стран.

2. Стратегия оценивания параметров прогностической модели

Оценивание параметров модели (2)–(4) по статистическим данным $\tilde{Y}_j^{(i)}(t_k)$ осуществляется последовательно в два этапа. Сначала вычисляются оцен-

ки параметров групповых моделей, а затем оценки глобальной модели. Оценки параметров групповых моделей находятся поэтапно следующим образом.

1. Фиксируется номер группы стран i и, учитывая свойства параметров $\beta_j^{(i)}$ в (2), вычисляется непараметрическая оценка $\bar{Y}^{(i)}(t_k)$ группового тренда $Y^{(i)}(t_k)$ согласно формуле

$$\bar{Y}^{(i)}(t_k) = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \tilde{Y}_j^{(i)}(t_k), \quad i = \overline{1, m}. \quad (5)$$

2. Затем по значениям $\Delta \tilde{Y}_j^{(i)}(t_k) = \tilde{Y}_j^{(i)}(t_k) - \bar{Y}^{(i)}(t_k)$ с учетом свойства функции $K^{(i)}(t_k)$ в (2) находятся оценки $\tilde{\beta}_j^{(i)}$ параметров $\beta_j^{(i)}$:

$$\tilde{\beta}_j^{(i)} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Delta \tilde{Y}_j^{(i)}(t_k); \quad \Delta \tilde{Y}_j^{(i)}(t_k) = \tilde{Y}_j^{(i)}(t_k) - \bar{Y}^{(i)}(t_k),$$

$$k = \overline{1, N}; \quad j = \overline{1, n_i}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (6)$$

3. Далее методом наименьших квадратов вычисляются непараметрические оценки $\bar{K}^{(i)}(t_k)$ функций $K^{(i)}(t_k)$:

$$\bar{K}^{(i)}(t_k) = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} \Delta \tilde{Y}_j^{(i)}(t_k) \tilde{\beta}_j^{(i)}}{\sum_{j=1}^{n_i} \tilde{\beta}_j^{(i)2}}; \quad k = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (7)$$

4. По найденным значениям $\bar{Y}^{(i)}(t_k)$, $\tilde{\beta}_j^{(i)}$ и $\bar{K}^{(i)}(t_k)$ из первого соотношения в (2) формируются остатки $\tilde{e}_j^{(i)}(t_k)$ (апостериорные оценки ошибок $e_j^{(i)}(t_k)$):

$$\tilde{e}_j^{(i)}(t_k) = \tilde{Y}_j^{(i)}(t_k) - \bar{Y}^{(i)}(t_k) - \tilde{\beta}_j^{(i)} \bar{K}^{(i)}(t_k);$$

$$k = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, n_i}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (8)$$

По полученным остаткам (8) стандартным способом [4] находятся оценки $\tilde{\sigma}_j^{(i)2}$ дисперсий $\sigma_j^{(i)2}$ и непараметрические оценки $\tilde{R}_j^{(i)}(|t_k - t_1|)$ автокорреляционных функций $R_j^{(i)}(|t_k - t_1|)$:

$$\tilde{\sigma}_j^{(i)2} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [\tilde{e}_j^{(i)}(t_k)]^2;$$

$$\tilde{R}_j^{(i)}(|t_k - t_1|) = \frac{[\frac{1}{N-k+1} \sum_{s=1}^{N-k+1} \tilde{e}_j^{(i)}(t_s) \tilde{e}_j^{(i)}(t_{k+s-1})]}{\tilde{\sigma}_j^{(i)2}},$$

$$k = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, n_i}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (9)$$

Затем по значениям $\tilde{R}_j^{(i)}(|t_k - t_1|)$ вычисляются оценки $\tilde{r}_j^{(i)}$ параметров $r_j^{(i)}$ параметрических моделей $R_{\text{mdl}}(r_j^{(i)}, \tau)$ автокорреляционных функций $R_j^{(i)}(\tau)$ согласно следующему алгоритму:

$$\tilde{r}_j^{(i)} = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{R}_j^{(i)}(|t_2 - t_1|) \leq 0 \\ & \text{или } \tilde{R}_j^{(i)}(|t_2 - t_1|) \geq 1, \\ \text{Arg min}_r \sum_{k=2}^{N_j^{(i)}-1} [\tilde{R}_j^{(i)}(|t_k - t_1|) - r^k]^2, & (10) \\ & \text{если } \tilde{R}_j^{(i)}(|t_2 - t_1|) > 0 \\ & \text{и } \tilde{R}_j^{(i)}(|t_2 - t_1|) < 1, \\ j = \overline{1, n_i}, \quad i = \overline{1, m}, \end{cases}$$

где $N_j^{(i)}$ ($N_j^{(i)} \leq N$) — значение $k > 2$, при котором впервые $\tilde{R}_j^{(i)}(|t_k - t_1|) \geq 1$ или $\tilde{R}_j^{(i)}(|t_k - t_1|) \leq 0$.

5. По значениям $\bar{K}^{(i)}(t_k)$ методом наименьших квадратов находятся оценки $\tilde{\mathbf{p}}^{(i)}$ векторных параметров $\mathbf{p}^{(i)}$ параметрических моделей $K_{\text{mdl}}^{(i)}(\mathbf{p}^{(i)}, t)$:

$$\tilde{\mathbf{p}}^{(i)} = \text{Arg min}_{\mathbf{p} \in G_p} \sum_{k=1}^N [\bar{K}^{(i)}(t_k) - K_{\text{mdl}}^{(i)}(\mathbf{p}^{(i)}, t_k)]^2,$$

$$G_p = \left\{ \mathbf{p} : \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N K_{\text{mdl}}^{(i)}(\mathbf{p}^{(i)}, t_k) = 1 \right\}; \quad i = \overline{1, m}. \quad (11)$$

После вычисления оценок параметров групповых моделей поэтапно вычисляются оценки параметров глобальной модели (вторая строка в формулах (2)) согласно следующей схеме.

1. В качестве статистических данных для групповых трендов $Y^{(i)}(t_k)$ берутся их непараметрические оценки $\bar{Y}^{(i)}(t_k)$, а в качестве непараметрической оценки $\bar{Y}(t_k)$ глобального тренда $Y(t_k)$ можно взять разные значения, например такие:

- $\bar{Y}(t_k)$ — наилучшее значение из непараметрических оценок $\bar{Y}^{(i)}(t_k)$ групповых трендов $Y^{(i)}(t_k)$;
- $\bar{Y}(t_k)$ — среднее значение непараметрических оценок $\bar{Y}^{(i)}(t_k)$ групповых трендов $Y(t_k)$;
- $\bar{Y}(t_k)$ — экспертное значение, т. е. задается экспертом.

$$\bar{Y}(t_k) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{Y}^{(i)}(t_k), \quad k = \overline{1, N}.$$

2. Как только тем или иным способом выбрана непараметрическая оценка $\bar{Y}(t_k)$ глобального тренда

$Y(t_k)$, из второго соотношения в (2) находятся оценки $\tilde{\beta}^{(i)}$ параметров $\beta^{(i)}$ по формулам, аналогичным формулам (6):

$$\tilde{\beta}^{(i)} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Delta \tilde{Y}^{(i)}(t_k); \quad \Delta \tilde{Y}^{(i)}(t_k) = \bar{Y}^{(i)}(t_k) - \bar{Y}(t_k),$$

$$k = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (12)$$

3. Далее по аналогии с (7) вычисляется непараметрическая оценка $\bar{K}(t_k)$ функции $K(t_k)$:

$$\bar{K}(t_k) = \frac{\sum_{i=1}^m \Delta \tilde{Y}^{(i)}(t_k) \tilde{\beta}^{(i)}}{\sum_{i=1}^m \tilde{\beta}^{(i)2}}. \quad (13)$$

4. По найденным значениям $\bar{Y}(t_k)$, $\tilde{\beta}^{(i)}$ и $\bar{K}(t_k)$ из второго соотношения в (2) формируются остатки $\tilde{e}^{(i)}(t_k)$ (апостериорные оценки ошибок $e^{(i)}(t_k)$):

$$\tilde{e}^{(i)}(t_k) = \bar{Y}^{(i)}(t_k) - \bar{Y}(t_k) - \tilde{\beta}^{(i)} \bar{K}(t_k);$$

$$k = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, m} \quad (14)$$

По полученным остаткам (13) стандартным способом находятся оценки $\tilde{\sigma}^{(i)2}$ дисперсий $\sigma^{(i)2}$ и непараметрические оценки $\tilde{R}^{(i)}(|t_k - t_l|)$ автокорреляционных функций $R^{(i)}(|t_k - t_l|)$.

$$\tilde{\sigma}^{(i)2} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [\tilde{e}^{(i)}(t_k)]^2;$$

$$\tilde{R}^{(i)}(|t_k - t_l|) = \frac{[\frac{1}{N-k+1} \sum_{s=1}^{N-k+1} \tilde{e}^{(i)}(t_s) \tilde{e}^{(i)}(t_{k+s-1})]}{\tilde{\sigma}^{(i)2}},$$

$$k = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (15)$$

Затем по значениям $\tilde{R}^{(i)}(|t_k - t_l|)$ вычисляются оценки $\tilde{r}^{(i)}$ параметров $r^{(i)}$ параметрических моделей $R_{mdl}(r^{(i)}, \tau)$ автокорреляционных функций $R^{(i)}(\tau)$ согласно следующему алгоритму:

$$\tilde{r}^{(i)} = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{R}^{(i)}(|t_2 - t_1|) \leq 0 \\ & \text{или } \tilde{R}^{(i)}(|t_2 - t_1|) \geq 1, \\ \text{Arg min}_r \sum_{k=2}^{N_i-1} [\tilde{R}^{(i)}(|t_k - t_1|) - r^k]^2, & (16) \\ \text{если } \tilde{R}^{(i)}(|t_2 - t_1|) > 0 \\ \text{и } \tilde{R}^{(i)}(|t_2 - t_1|) < 1, \\ i = \overline{1, m}, \end{cases}$$

где $N_i(N_i \leq N)$ — значение $k > 2$, при котором впервые $\tilde{R}^{(i)}(|t_k - t_1|) \geq 1$ или $\tilde{R}^{(i)}(|t_k - t_1|) \leq 0$.

5. По значениям $\bar{K}(t_k)$ методом наименьших квадратов находится оценка $\tilde{\mathbf{p}}$ векторного параметра \mathbf{p} параметрической модели $K_{mdl}(\mathbf{p}, t)$:

$$\tilde{\mathbf{p}} = \text{Arg min}_{\mathbf{p} \in G_p} \sum_{k=1}^N [\bar{K}(t_k) - K_{mdl}(\mathbf{p}, t_k)]^2,$$

$$G_p = \left\{ \mathbf{p} : \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N K_{mdl}(\mathbf{p}, t_k) = 1 \right\}. \quad (17)$$

6. По значениям непараметрической оценки $\bar{Y}(t_k)$ глобального тренда $Y(t_k)$ методом максимального правдоподобия вычисляются оценки $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{\sigma}^2, \tilde{r}$ параметров q_1, q_2 модели глобального тренда, дисперсии σ^2 и параметра r автокорреляционной функции случайной составляющей глобального тренда $e(t_k)$. В силу сделанных предположений относительно модели глобального тренда (см. (2)) и закона распределения случайной составляющей $e(t_k)$ (см. (3) и (4)) оценки $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{\sigma}^2, \tilde{r}$ находятся в результате решения следующей оптимизационной задачи:

$$\{\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\sigma}^2, \tilde{r}\} = \text{Arg min}_{\mathbf{q}, \sigma^2, r} L(\mathbf{q}, \sigma^2, r, \bar{\mathbf{Y}});$$

$$L(\mathbf{q}, \sigma^2, r, \bar{\mathbf{Y}}) = N \text{Ln}(\sigma^2) + (N-1) \text{Ln}(1-r^2) +$$

$$+ \frac{1}{\sigma^2} (\bar{\mathbf{Y}} - \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{q})^T \mathbf{R}_{11}^{-1}(r) (\bar{\mathbf{Y}} - \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{q});$$

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} \bar{Y}(t_1) \\ \bar{Y}(t_2) \\ \dots \\ \bar{Y}(t_N) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & t_2 - t_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & t_N - t_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{11}(r) = \begin{pmatrix} 1 & r & r^{N-2} & r^{N-1} \\ r & 1 & r^{N-3} & r^{N-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r^{N-1} & r^{N-2} & r & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где $\mathbf{R}_{11}^{-1}(r)$ — обратная к $\mathbf{R}_{11}(r)$ матрица. Из необходимых условий минимума функции $L(\mathbf{q}, \sigma^2, r, \bar{\mathbf{Y}})$ по \mathbf{q} и σ^2 получаем следующие зависимости для \mathbf{q} и σ^2 как функции от r :

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q}(r, \bar{\mathbf{Y}}), \quad \sigma^2 = \frac{1}{N} S(\mathbf{q}, r, \bar{\mathbf{Y}});$$

$$\mathbf{Q}(r, \bar{\mathbf{Y}}) = [\mathbf{B}^{(1)T} \mathbf{R}_{11}^{-1}(r) \mathbf{B}^{(1)}]^{-1} \mathbf{B}^{(1)T} \mathbf{R}_{11}^{-1}(r) \bar{\mathbf{Y}}; \quad (19)$$

$$S(\mathbf{q}, r, \bar{\mathbf{Y}}) = (\bar{\mathbf{Y}} - \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{q})^T \mathbf{R}_{11}^{-1}(r) (\bar{\mathbf{Y}} - \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{q}).$$

Подставляя из (19) зависимости для \mathbf{q} и σ^2 в (18) и делая соответствующие преобразования, в конечном счете, задача нахождения оценок $\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\sigma}^2, \tilde{r}$ сводится к решению следующей оптимизационной задачи:

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= \text{Arg min}_r \Phi(r, \bar{Y}); \\ (r, \bar{Y}) &= N \text{Ln}(S(\mathbf{q}, r, \bar{Y})) + (N-1) \text{Ln}(1-r^2); \\ S(\mathbf{q}, r, \bar{Y}) &= \frac{1}{N} (\bar{Y} - \mathbf{B}^{(1)}\mathbf{q})^T \mathbf{R}_{11}^{-1}(r) (\bar{Y} - \mathbf{B}^{(1)}\mathbf{q}); \\ \mathbf{q} = \mathbf{Q}(r, \bar{Y}) &= [\mathbf{B}^{(1)T} \mathbf{R}_{11}^{-1}(r) \mathbf{B}^{(1)}]^{-1} \mathbf{B}^{(1)T} \mathbf{R}_{11}^{-1}(r) \bar{Y}. \end{aligned} \tag{20}$$

Получив в результате решения задачи (20) оценку \tilde{r} , используя тот или иной численный метод, по формулам (19) вычисляются оценки $\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\sigma}^2$ т.е.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\tilde{r}, \bar{Y}) &= [\mathbf{B}^{(1)T} \mathbf{R}_{11}^{-1}(\tilde{r}) \mathbf{B}^{(1)}]^{-1} \mathbf{B}^{(1)T} \mathbf{R}_{11}^{-1}(\tilde{r}) \bar{Y}; \\ \tilde{\sigma}^2 &= \frac{1}{N} S(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{r}, \bar{Y}) = (\bar{Y} - \mathbf{B}^{(1)}\tilde{\mathbf{q}})^T \mathbf{R}_{11}^{-1}(\tilde{r}) (\bar{Y} - \mathbf{B}^{(1)}\tilde{\mathbf{q}}). \end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом, стратегия оценивания параметров модели (2), (3) полностью описана.

3. Методика вероятностного прогнозирования

Для вероятностного прогнозирования ожидаемой продолжительности жизни имитационным способом согласно описанной модели (2)–(4) на прогнозируемые моменты времени t_k ($k = \overline{N+1, N+N_{pr}}$), где N_{pr} — число временных прогнозируемых точек, нужны условные случайные реализации $\tilde{Y}_j^{(i)}(t_k)$ ($k = \overline{N+1, N+N_{pr}}$) на эти моменты времени случайных дискретных процессов $Y_j^{(i)}(t_k)$ ($k = \overline{1, N+N_{pr}}$) при условии, что на историческом периоде времени значения этих процессов совпадают со статистическими данными, т.е. $\tilde{Y}_j^{(i)}(t_k) = \tilde{Y}_j^{(i)}(t_k)$ ($k = \overline{1, N}$). Необходимые случайные реализации $\tilde{Y}_j^{(i)}(t_k)$ ($k = \overline{N+1, N+N_{pr}}$) вычисляются по следующей схеме, основанной на методике генерирования условных случайных реализаций случайных дискретных временных процессов, изложенной в работах [5–7].

1. Сначала генерируется условная случайная реализация $\tilde{Y}(t_k)$ ($k = \overline{N+1, N+N_{pr}}$) глобального тренда $Y(t_k)$ ($k = \overline{1, N+N_{pr}}$) при условии $Y(t_k) = \tilde{Y}(t_k)$ ($k = \overline{1, N}$) согласно формулам

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= \mathbf{B}^{(2)}\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}(\bar{Y} - \mathbf{B}^{(1)}\tilde{\mathbf{q}}) + \\ &+ \tilde{\sigma}(\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{B}^{(1)} - \mathbf{B}^{(2)})\mathbf{H}^{-1}\tilde{\eta}^{(1)} + \tilde{\sigma}\mathbf{A}_{22}\tilde{\eta}^{(2)}; \\ \hat{Y} &= \begin{pmatrix} \tilde{Y}(t_{N+1}) \\ \tilde{Y}(t_{N+2}) \\ \dots \\ \tilde{Y}(t_{N+N_{pr}}) \end{pmatrix}, \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} \tilde{Y}(t_1) \\ \tilde{Y}(t_2) \\ \dots \\ \tilde{Y}(t_N) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & t_2 - t_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & t_N - t_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & t_{N+1} - t_1 \\ 1 & t_{N+2} - t_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & t_{N+N_{pr}} - t_1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{R}(\tilde{r}), \quad \mathbf{R}(\tilde{r}) = \{R_{ij}(\tilde{r})\}_{i,j=1}^{N+N_{pr}},$$

$$R_{ij}(\tilde{r}) = R_{\text{mdl}}(\tilde{r}, |t_i - t_j|);$$

$$\mathbf{H}^T\mathbf{H} = \mathbf{B}^{(1)T}\mathbf{R}_{11}^{-1}(\tilde{r})\mathbf{B}^{(1)}, \quad \mathbf{R}_{11}(\tilde{r}) = \{R_{ij}(\tilde{r})\}_{i,j=1}^N;$$

$$\tilde{\eta}^{(1)} = (\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)^T, \quad \tilde{\eta}^{(2)} = (\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \dots, \tilde{\eta}_{N_{pr}})^T,$$

$$\tilde{\eta}^{(1)} \sim \mathbf{N}(0, \mathbf{I}_2), \quad \tilde{\eta}^{(2)} \sim \mathbf{N}(0, \mathbf{I}_{N_{pr}}), \quad E(\tilde{\eta}^{(1)}\tilde{\eta}^{(2)T}) = 0. \tag{22}$$

Здесь \mathbf{A} — квадратная нижняя треугольная матрица $(N+N_{pr})$ -го порядка (матрица Холецкого), $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{21}, \mathbf{A}_{22}$ — ее подматрицы, имеющие соответственно размеры $N \times N, N_{pr} \times N$ и $N_{pr} \times N_{pr}$, причем подматрицы $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{22}$ являются квадратными нижними треугольными матрицами, \mathbf{H} — нижняя треугольная матрица N -го порядка, $\tilde{\eta}^{(1)}, \tilde{\eta}^{(2)}$ — реализации случайных независимо нормально распределенных векторов, компоненты которых распределены нормально и независимо с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями, $\tilde{\sigma}, \tilde{r}, \tilde{q}_1$ и \tilde{q}_2 — соответственно оценки параметров σ, r, q_1 и $q_2, E(\dots)$ — оператор математического ожидания.

2. Затем генерируются условные случайные реализации $\tilde{e}^{(i)}(t_k)$ ($k = \overline{N+1, N+N_{pr}}$) случайной составляющей $e^{(i)}(t_k)$ ($k = \overline{1, N+N_{pr}}$) при условии $e^{(i)}(t_k) = \tilde{e}^{(i)}(t_k)$ ($k = \overline{1, N}$), где $\tilde{e}^{(i)}(t_k)$ ($k = \overline{1, N}$) вычисляются по формулам (11–13). Случайные реализации $\tilde{e}^{(i)}(t_k)$ ($k = \overline{N+1, N+N_{pr}}$) рассчитываются по следующим формулам:

$$\tilde{e}^{(i)} = \mathbf{A}_{21}^{(i)}\mathbf{A}_{11}^{(i)-1}\tilde{e}_1^{(i)} + \tilde{\sigma}^{(i)}\mathbf{A}_{22}^{(i)}\tilde{\eta}^{(i)};$$

$$\tilde{e}^{(i)} = \begin{pmatrix} \tilde{e}^{(i)}(t_{N+1}) \\ \tilde{e}^{(i)}(t_{N+2}) \\ \dots \\ \tilde{e}^{(i)}(t_{N+N_{pr}}) \end{pmatrix}, \quad \tilde{e}_1^{(i)} = \begin{pmatrix} \tilde{e}^{(i)}(t_1) \\ \tilde{e}^{(i)}(t_2) \\ \dots \\ \tilde{e}^{(i)}(t_N) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{(i)} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{(i)} & 0 \\ \mathbf{A}_{21}^{(i)} & \mathbf{A}_{22}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{(i)}\mathbf{A}^{(i)T} = \mathbf{R}^{(i)}(\tilde{r}^{(i)}); \tag{23}$$

$$\mathbf{R}^{(i)}(\tilde{r}^{(i)}) = \{R_{jk}(\tilde{r}^{(i)})\}_{j,k=1}^{N+N_{pr}},$$

$$R_{jk}(\tilde{r}^{(i)}) = R_{\text{mdl}}(\tilde{r}^{(i)}, |t_j - t_k|);$$

$$\tilde{\eta}^{(i)} = (\tilde{\eta}_1^{(i)}, \tilde{\eta}_2^{(i)}, \dots, \tilde{\eta}_{N_{pr}}^{(i)})^T,$$

$$\tilde{\eta}^{(i)} \sim \mathbf{N}(0, \mathbf{I}_{N_{pr}}), \quad E(\tilde{\eta}^{(i)}\tilde{\eta}^{(j)T}) = \mathbf{I}_{N_{pr}}\delta_{ij},$$

где $\mathbf{A}^{(i)}$ — квадратная нижняя треугольная матрица $(N + N_{pr})$ -го порядка (матрица Холецкого), $\mathbf{A}_{11}^{(i)}$, $\mathbf{A}_{21}^{(i)}$, $\mathbf{A}_{22}^{(i)}$ — ее подматрицы, имеющие соответственно размеры $N \times N$, $N_{pr} \times N$ и $N_{pr} \times N_{pr}$, причем подматрицы $\mathbf{A}_{11}^{(i)}$, $\mathbf{A}_{22}^{(i)}$ являются квадратными нижними треугольными матрицами, $\tilde{\eta}^{(i)}$ ($i = \overline{1, m}$) — реализации случайных независимо нормально распределенных векторов, компоненты которых распределены нормально и независимо с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями, $\tilde{\sigma}^{(i)}$ и $\tilde{r}^{(i)}$ — соответственно оценки параметров $\sigma^{(i)}$ и $r^{(i)}$, δ_{ij} — символ Кронекера.

3. Далее генерируются условные случайные реализации $\tilde{e}_j^{(i)}(t_k)$ ($k = \overline{N+1, N+N_{pr}}$) случайной составляющей $e_j^{(i)}(t_k)$ ($k = \overline{1, N+N_{pr}}$) при условии $e_j^{(i)}(t_k) = \tilde{e}_j^{(i)}(t_k)$ ($k = \overline{1, N}$), где $\tilde{e}_j^{(i)}(t_k)$ ($k = \overline{1, N}$) вычисляются по формулам (5–8). Эти случайные реализации $\tilde{e}_j^{(i)}(t_k)$ ($k = \overline{N+1, N+N_{pr}}$) рассчитываются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_j^{(i)} &= \mathbf{A}_{j21}^{(i)} \mathbf{A}_{j11}^{(i)-1} \tilde{\mathbf{e}}_{j1}^{(i)} + \tilde{\sigma}_j^{(i)} \mathbf{A}_{j22}^{(i)} \boldsymbol{\eta}_j^{(i)}; \\ \tilde{\mathbf{e}}_j^{(i)} &= \begin{pmatrix} \tilde{e}_j^{(i)}(t_{N+1}) \\ \tilde{e}_j^{(i)}(t_{N+2}) \\ \dots \\ \tilde{e}_j^{(i)}(t_{N+N_{pr}}) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_{j1}^{(i)} = \begin{pmatrix} \tilde{e}_j^{(i)}(t_1) \\ \tilde{e}_j^{(i)}(t_2) \\ \dots \\ \tilde{e}_j^{(i)}(t_N) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_j^{(i)} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{j11}^{(i)} & 0 \\ \mathbf{A}_{j21}^{(i)} & \mathbf{A}_{j22}^{(i)} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_j^{(i)} \mathbf{A}_j^{(i)T} &= \mathbf{R}_j^{(i)}(\tilde{r}_j^{(i)}); \\ \mathbf{R}_j^{(i)}(\tilde{r}_j^{(i)}) &= \{R_{juv}^{(i)}(\tilde{r}_j^{(i)})\}_{u,v=1}^{N+N_{pr}}, \\ R_{juv}^{(i)}(\tilde{r}_j^{(i)}) &= R_{mdl}(\tilde{r}_j^{(i)}, |t_u - t_v|); \\ \boldsymbol{\eta}_j^{(i)} &= (\eta_{j1}^{(i)} \eta_{j2}^{(i)} \dots \eta_{jN_{pr}}^{(i)})^T, \quad \boldsymbol{\eta}_j^{(i)} \sim \mathbf{N}(0, \mathbf{I}_{N_{pr}}), \\ E(\boldsymbol{\eta}_j^{(i)} \boldsymbol{\eta}_v^{(u)T}) &= \mathbf{I}_{N_{pr}} \delta_{ju} \delta_{iv}, \\ j &= \overline{1, n_i}, \quad i = \overline{1, m}; \quad v = \overline{1, n_u}, \quad u = \overline{1, m}, \end{aligned} \tag{24}$$

где $\mathbf{A}_j^{(i)}$ — квадратная нижняя треугольная матрица $(N + N_{pr})$ -го порядка (матрица Холецкого), $\mathbf{A}_{j11}^{(i)}$, $\mathbf{A}_{j21}^{(i)}$, $\mathbf{A}_{j22}^{(i)}$ — ее подматрицы, имеющие соответственно размеры $N \times N$, $N_{pr} \times N$ и $N_{pr} \times N_{pr}$, причем подматрицы $\mathbf{A}_{j11}^{(i)}$, $\mathbf{A}_{j22}^{(i)}$ являются квадратными нижними треугольными матрицами, $\boldsymbol{\eta}_j^{(i)}$ — случайный вектор, компоненты которого распределены нормально и независимо с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями, $\tilde{\sigma}_j^{(i)}$ и $\tilde{r}_j^{(i)}$ — соответственно оценки параметров $\sigma_j^{(i)}$, и $r_j^{(i)}$.

4. Условные случайные реализации $\tilde{Y}_j^{(i)}(t_k)$ ($k = \overline{N+1, N+N_{pr}}$) прогнозируемых значений $Y_j^{(i)}(t_k)$ ($k = \overline{N+1, N+N_{pr}}$) при условии, что $Y_j^{(i)}(t_k) = \tilde{Y}_j^{(i)}(t_k)$ ($k = \overline{1, N}$) вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_j^{(i)}(t_k) &= \tilde{Y}(t_k) + \tilde{\beta}^{(i)} \tilde{K}(t_k) + \tilde{\beta}_j^{(i)} \tilde{K}^{(i)}(t_k) + \\ &+ \tilde{e}^{(i)}(t_k) + \tilde{e}_j^{(i)}(t_k); \\ \tilde{K}(t_k) &= K_{mdl}(\tilde{\mathbf{p}}, t_k), \quad \tilde{K}^{(i)}(t_k) = K_{mdl}(\tilde{\mathbf{p}}^{(i)}, t_k); \\ k &= \overline{N+1, N+N_{pr}}, \quad j = \overline{1, n_i}, \quad i = \overline{1, m}, \end{aligned} \tag{25}$$

где

$$\tilde{Y}(t_k), \quad \tilde{e}^{(i)}(t_k), \quad \tilde{e}_j^{(i)}(t_k), \\ k = \overline{N+1, N+N_{pr}}$$

даются формулами (22–24), а $\tilde{\beta}_j^{(i)}$, $\tilde{\beta}^{(i)}$, $\tilde{p}_1^{(i)}$, $\tilde{p}_2^{(i)}$, \tilde{p}_1 , \tilde{p}_2 — формулами (6), (11), (12), (17).

Итак, предлагаемая методика одновременного согласованного вероятностного прогнозирования ожидаемой продолжительности жизни для заданной совокупности стран полностью описана. Далее приводятся результаты тестирования описанной методики на реальных статистических данных, представляющих собой отрезки временных рядов по ожидаемой продолжительности жизни для заданной совокупности стран.

4. Результаты тестирования методики прогнозирования

Описанная методика прогнозирования была опробована на тестовых данных по ожидаемой продолжительности жизни для обеих полов для европейских стран (за исключением стран бывшего социалистического лагеря и стран с небольшой численностью населения) и североафриканских стран. Конкретно были выбраны следующие страны: Нормандские острова, Дания, Финляндия, Исландия, Ирландия, Норвегия, Швеция, Великобритания, Австрия, Бельгия, Франция, Германия, Люксембург, Нидерланды, Швейцария, Албания, Босния и Герцеговина, Хорватия, Греция, Италия, Мальта, Португалия, Сербия и Черногория, Словения, Испания, Македония, Алжир, Египет, Ливия, Марокко, Судан, Тунис, Западная Сахара. Данные по ожидаемой продолжительности жизни для этих стран были взяты на отрезке времени 1950–2005 гг. с шагом 5 лет из базы данных ООН. На рис. 1 представлено распределение стран по ожидаемой продолжительности жизни в начальный и конечный моменты времени.

Из рис. 1 следует, что все страны можно разделить на четыре группы: в первую группу входят

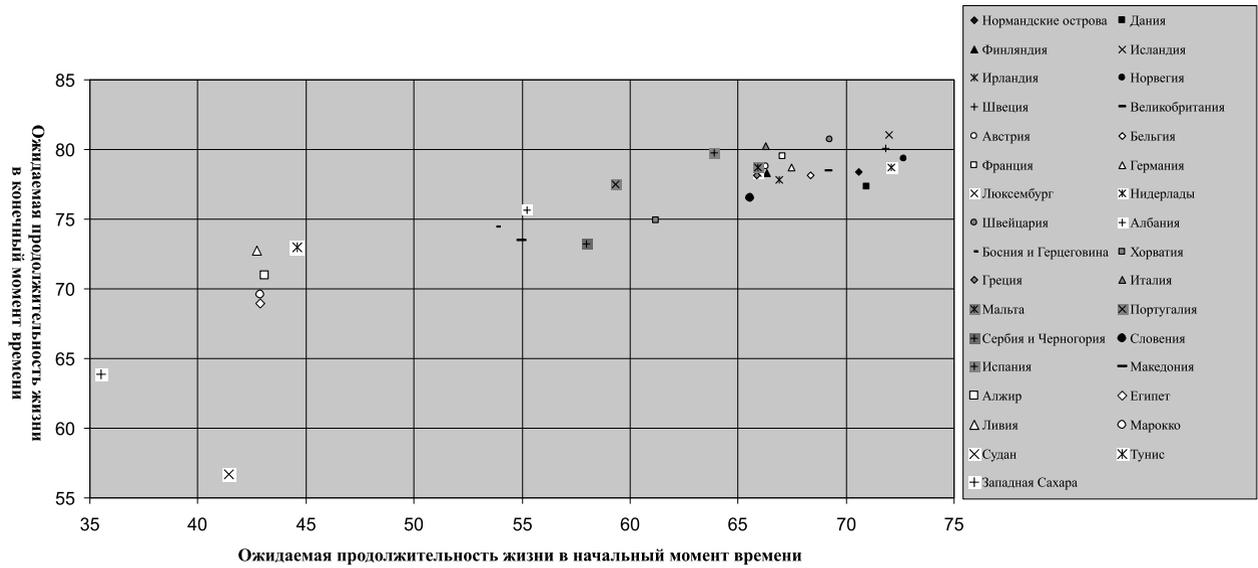


Рис. 1. Распределение стран по ожидаемой продолжительности жизни в начальный и конечный момент времени

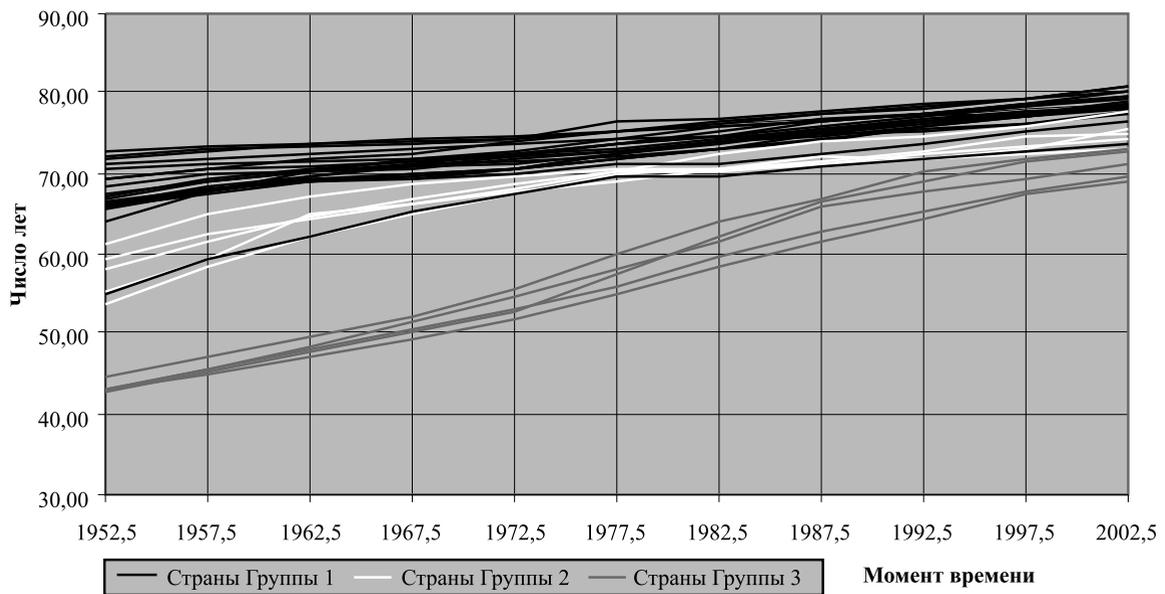


Рис. 2. Ожидаемая продолжительность жизни при рождении (оба пола, все группы, статистика)

страны с ожидаемой продолжительностью жизни на начальный момент времени ~ 65–75 лет и на конечный момент времени ~ 75–80 лет, во вторую группу — ~ 55–65 и ~ 73–78 лет, в третью группу — ~ 43–45 и ~ 68–78 лет, в четвертую группу — ~ 35–42 и 55–65 лет. Поскольку четвертая группа, состоящая из двух стран Судана и Западной Сахары, сильно отличается от остальных, то она была исключена из рассмотрения. В результате получились 3 группы, данные для которых представлены в табл. 1 (данные отнесены к средним значениям пятилетних интервалов времени).

По данным табл. 1 были построены графики ожидаемой продолжительности жизни, которые приведены на рис. 2. Из графиков видно, что значения ожидаемой продолжительности жизни для стран всех трех групп с ростом времени растут практически по линейному закону и сближаются друг с другом, причем значения ожидаемой продолжительности жизни для стран Группы 2 и Группы 3 стремятся к соответствующим значениям Группы 1, которые имеют наибольшее значения.

В рассматриваемом случае число стран в Группе 1, 2, 3 равно соответственно $n_1 = 20$, $n_2 = 6$,

Таблица 1

Ожидаемая продолжительность жизни при рождении (мужчины и женщины)

Страна	Время										
	1952,5	1957,5	1962,5	1967,5	1972,5	1977,5	1982,5	1987,5	1992,5	1997,5	2002,5
	Группа 1										
Нормандские острова	70,57	71,04	71,50	71,97	72,44	73,07	74,12	75,44	76,77	77,56	78,37
Дания	70,96	71,95	72,30	72,89	73,58	74,17	74,56	74,91	75,23	76,12	77,31
Финляндия	66,32	68,02	68,86	69,61	70,70	72,20	73,89	74,63	75,84	77,03	78,27
Исландия	71,99	73,03	73,37	73,42	74,31	76,26	76,79	77,78	78,60	79,26	81,02
Ирландия	66,91	68,90	70,29	71,08	71,28	72,03	73,10	74,36	75,47	76,12	77,78
Норвегия	72,66	73,34	73,44	73,82	74,41	75,31	76,02	76,33	77,39	78,20	79,36
Швеция	71,81	72,65	73,54	74,13	74,72	75,21	76,27	77,34	78,25	79,20	80,10
Великобритания	69,18	70,42	70,76	71,36	72,01	72,76	74,04	75,01	76,42	77,22	78,47
Австрия	66,26	67,96	69,26	69,85	70,55	71,98	73,11	74,86	76,29	77,39	78,82
Бельгия	68,37	69,99	70,06	70,68	71,63	72,71	73,89	75,62	76,39	77,49	78,18
Франция	67,06	69,21	70,67	71,35	72,35	73,53	74,66	75,98	77,25	78,35	79,51
Германия	67,50	69,10	70,30	70,80	71,00	72,50	73,80	74,85	76,16	77,20	78,72
Люксембург	65,92	67,47	68,81	69,91	70,57	71,88	73,08	74,11	75,87	77,24	78,27
Нидерланды	72,11	73,00	73,38	73,62	73,96	75,25	76,14	76,73	77,26	77,85	78,68
Швейцария	69,23	70,72	71,67	72,17	73,81	75,20	76,16	77,42	78,06	79,27	80,71
Греция	65,86	67,86	69,51	71,00	72,34	73,68	75,24	76,67	77,39	77,12	78,14
Италия	66,30	68,36	69,59	70,80	72,11	73,42	74,74	76,28	77,39	78,70	80,24
Мальта	65,94	68,14	68,90	69,46	70,65	72,17	73,55	75,04	76,27	77,40	78,70
Словения	65,57	67,85	69,15	69,18	69,82	70,97	71,10	72,51	73,67	75,12	76,54
Испания	63,89	67,74	70,24	71,63	72,85	74,30	75,75	76,55	77,44	78,62	79,75
	Группа 2										
Албания	55,23	59,28	64,82	66,22	67,69	68,93	70,42	72,00	71,75	73,01	75,66
Босния и Герцеговина	53,82	58,45	61,93	64,79	67,45	69,86	70,69	71,14	72,19	73,28	74,44
Хорватия	61,21	64,77	67,13	68,50	69,61	70,64	70,46	71,52	72,53	74,57	74,93
Португалия	59,34	62,33	64,18	66,12	68,02	70,16	72,19	73,81	74,58	76,01	77,50
Сербия и Черногория	58,00	61,69	64,53	66,91	68,70	70,30	70,16	71,22	71,81	72,23	73,21
Македония	54,96	59,04	62,20	65,10	67,46	69,59	69,56	70,83	71,82	72,56	73,44
	Группа 3										
Алжир	43,08	45,69	48,30	51,41	54,52	58,01	61,37	65,80	67,74	69,15	70,99
Египет	42,89	44,94	46,99	49,30	51,75	54,94	58,24	61,54	64,24	67,22	68,96
Ливия	42,72	45,29	47,81	50,23	52,77	57,44	62,16	66,40	68,98	71,56	72,74
Марокко	42,87	45,42	47,92	50,34	52,86	55,73	59,65	62,68	65,39	67,66	69,62
Тунис	44,60	47,10	49,58	52,05	55,60	59,81	64,10	66,97	70,11	71,95	73,01

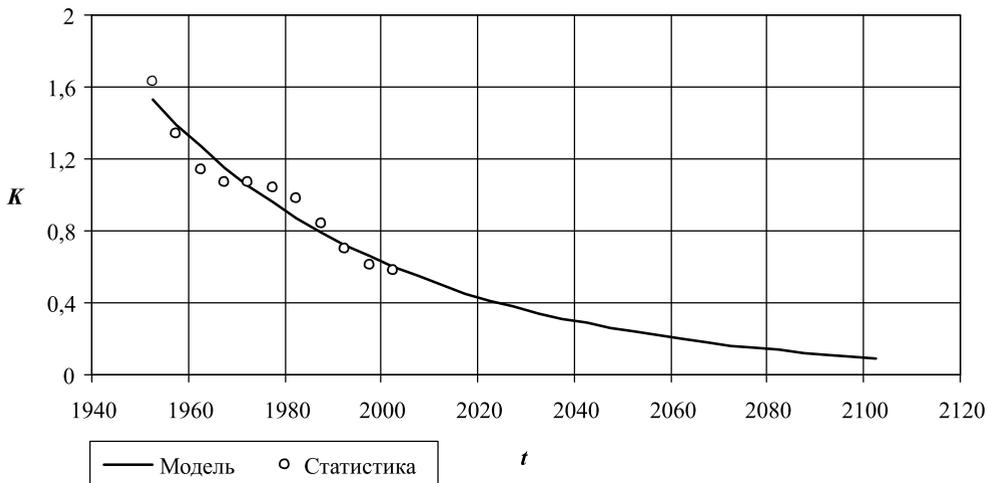


Рис. 3. Зависимость $\bar{K}^{(1)}(t)$ (статистика) и $K_{mdl}^{(1)}(\bar{p}, t)$ (модель) от времени t

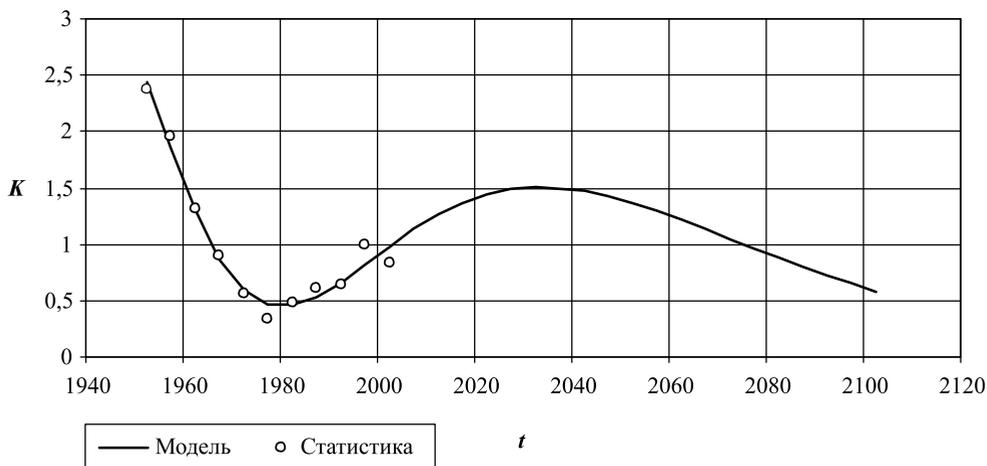


Рис. 4. Зависимость $\bar{K}^{(2)}(t)$ (статистика) и $K_{mdl}^{(2)}(\bar{p}, t)$ (модель) от времени t

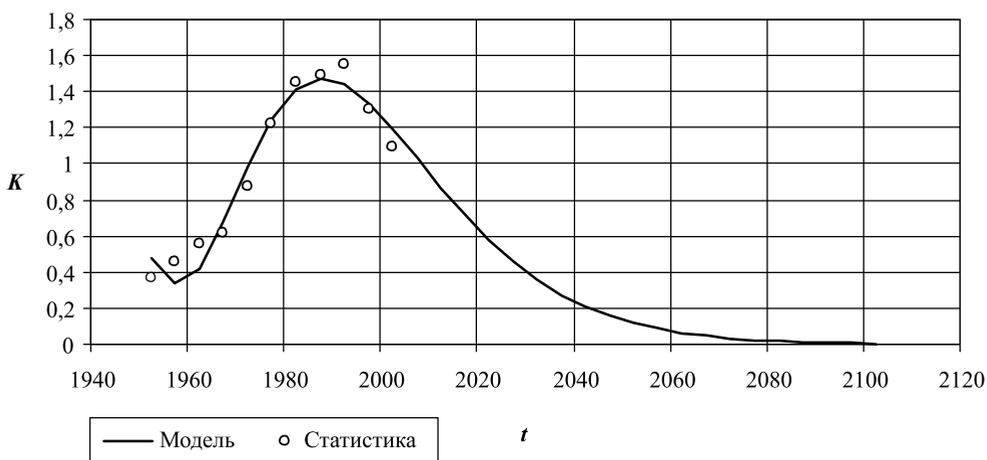


Рис. 5. Зависимость $\bar{K}^{(3)}(t)$ (статистика) и $K_{mdl}^{(3)}(\bar{p}, t)$ (модель) от времени t

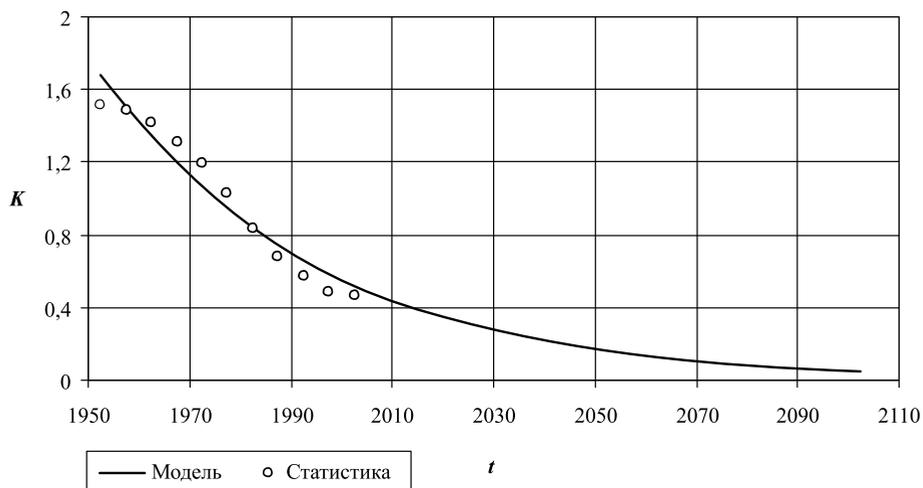


Рис. 6. Зависимость $\bar{K}(t)$ (статистика) и $K_{mdl}(\bar{p}, t)$ (модель) от времени t

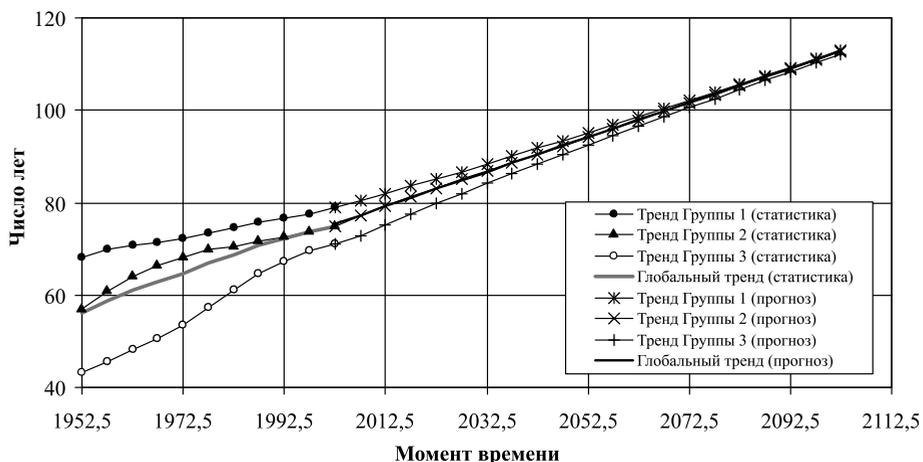


Рис. 7. Ожидаемая продолжительность жизни при рождении (оба пола). Глобальный тренд и групповые тренды

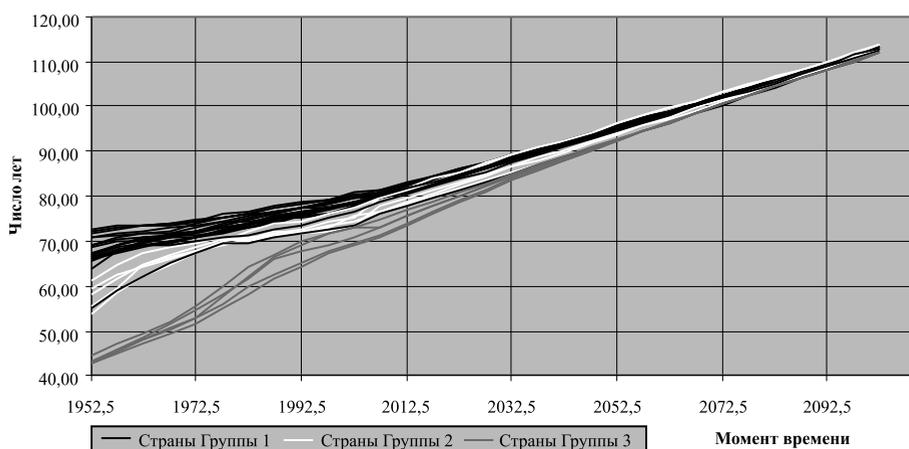


Рис. 8. Ожидаемая продолжительность жизни при рождении (оба пола, все группы). Страновые тренды на историческом и прогнозируемом периодах времени

Таблица 2

Начальный момент времени $t_0=1952,5$, число временных точек $N=11$		
Тип модели	Модель	Оценки параметров
Групповая модель (Группа 1)	$K_{mdl}^{(1)}(\mathbf{p}, t) = p_1 \exp(p_2(t - t_0))$ $\mathbf{p} = (p_1 p_2)^T$	$\tilde{p}_2 = -0,0186$ $\tilde{p}_1 = \frac{N}{\sum_{k=1}^N \exp(\tilde{p}_2(t_k - t_0))} = 1,5265$
Групповая модель (Группа 2)	$K_{mdl}^{(2)}(\mathbf{p}, t) = p_1 F(p_2, p_3, p_4, t)$ $\mathbf{p} = (p_1 p_2 p_3 p_4)^T$ $F(p_2, p_3, p_4, t) = [1 + p_3(t - t_0)^3 + p_4(t - t_0)^2] \exp(p_2(t - t_0))$	$\tilde{p}_2 = -0,0442, \tilde{p}_3 = 6,9535E-05, \tilde{p}_4 = -0,0024$ $\tilde{p}_1 = \frac{N}{\sum_{k=1}^N F(\tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \tilde{p}_4, t_k)} = 2,4463$
Групповая модель (Группа 3)	$7K_{mdl}^{(3)}(\mathbf{p}, t) = p_1 F(p_2, p_3, p_4, t)$ $\mathbf{p} = (p_1 p_2 p_3 p_4)^T$ $F(p_2, p_3, p_4, t) = [p_3 + (t - t_0)^{p_4}] \exp(p_2(t - t_0))$	$\tilde{p}_2 = -0,0924, \tilde{p}_3 = 1731,5710, \tilde{p}_4 = -3,31857$ $\tilde{p}_1 = \frac{N}{\sum_{k=1}^N F(\tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \tilde{p}_4, t_k)} = 0,000277$
Глобальная модель	$K_{mdl}(\mathbf{p}, t) = p_1 \exp(p_2(t - t_0))$ $\mathbf{p} = (p_1 p_2)^T$	$\tilde{p}_2 = -0,0234$ $\tilde{p}_1 = \frac{N}{\sum_{k=1}^N \exp(\tilde{p}_2(t_k - t_0))} = 1,6788$

$n_3 = 5$, общее число стран $m = n_1 + n_2 + n_3 = 31$, число временных точек $N = 11$, начальный момент времени $t_1 = 1950$ г., конечный момент времени $t_N = 2005$ г, временной шаг $\Delta t = 5$ лет, число временных точек прогнозирования $N_{pr} = 20$, а прогнозируемый период времени равен 2005–2105 г.

По данным в табл. 1 с помощью описанной методики был сделан прогноз ожидаемой продолжительности жизни для трех групп стран. При этом в качестве непараметрической оценки $\bar{Y}(t_k)$ глобального тренда $Y(t_k)$ было взято среднее значение непараметрических оценок групповых трендов

$$\bar{Y}(t_k) = \frac{1}{3}(\bar{Y}^{(1)}(t_k) + \bar{Y}^{(2)}(t_k) + \bar{Y}^{(3)}(t_k)).$$

Кроме того, на основе полученных непараметрических оценок $\bar{K}^{(i)}(t_k)$ групповых функций $K^{(i)}(t_k)$ ($i = 1, 2, 3$) и непараметрической оценки $\bar{K}(t_k)$ глобальной функции $K(t_k)$ были построены соответствующие параметрические модели $K_{mdl}^{(i)}(\mathbf{p}^{(i)}, t)$ ($i = 1, 2, 3$) и $K_{mdl}(\mathbf{p}, t)$ и оценены их параметры. Описания построенных моделей и оценки их параметров даны в табл. 2. Оценки $\tilde{\mathbf{p}}^{(i)}, \tilde{\mathbf{p}}$ параметров $\mathbf{p}^{(i)}, \mathbf{p}$ получались с использованием условий, содержащихся в третьей строке в (4).

На рис. 3–6 значения $\bar{K}^{(i)}(t), K_{mdl}^{(i)}(\tilde{\mathbf{p}}, t)$ ($i=1,2,3$), $\bar{K}(t), K_{mdl}(\tilde{\mathbf{p}}, t)$ представлены в графическом виде.

Полученные параметрические модели для функций $K^{(i)}(t)$ ($i=1,2,3$), $K(t)$ были непосредственно использованы в данной методике при прогнозировании ожидаемой продолжительности жизни. Результаты прогнозирования отображены на рис. 7 и рис. 8.

На этих рисунках на историческом и прогнозируемом периодах времени (исторический период заканчивается в 2005 г.) представлены страновые и групповые тренды для трех групп, а также глобальный тренд без доверительных интервалов, что сделано сознательно, поскольку добавление доверительных интервалов из-за большого числа стран привело бы к смазыванию общей картины. Из приведенных данных видно, что происходит сближение и страновых и групповых трендов, причем с ростом времени они стремятся к глобальному тренду. Если данная методика прогнозирования справедлива, то согласно полученным результатам ожидаемая продолжительность жизни для данной совокупности стран вырастит с 77 лет в 2010 г. до 100 лет в 2070 г.

В качестве иллюстрации на рис. 9–рис. 12 в графической форме представлены статистические данные и тренды ожидаемой продолжительности жизни с 95-процентными доверительными интервалами для характерных стран от каждой группы (Великобритания, Германия — Группа 1, Португалия — Группа 2, Марокко — Группа 3).

Следует отметить, что несмотря на то, что североафриканские страны (Группа 3) по экономическому и социальному уровню занимают более низкое положение, чем развитые европейские страны, тем не менее, ожидаемая продолжительность жизни в этих странах имеет тенденцию к сближению по этому показателю с развитыми странами, что даже видно на статистических данных. Возможно, это объясняется тем, что в ходе исторического процесса происходит сближение стран по уровню развития, причем в менее развитых странах переходные про-

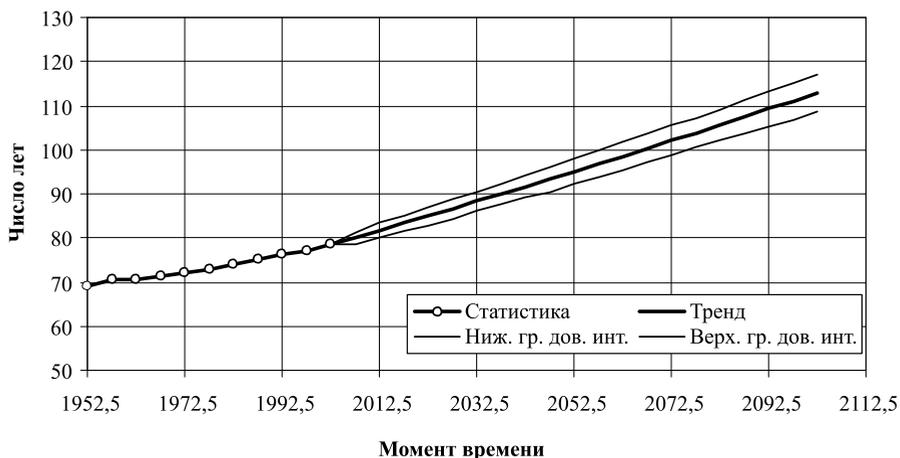


Рис. 9. Ожидаемая продолжительность жизни при рождении (оба пола). Страна — Великобритания

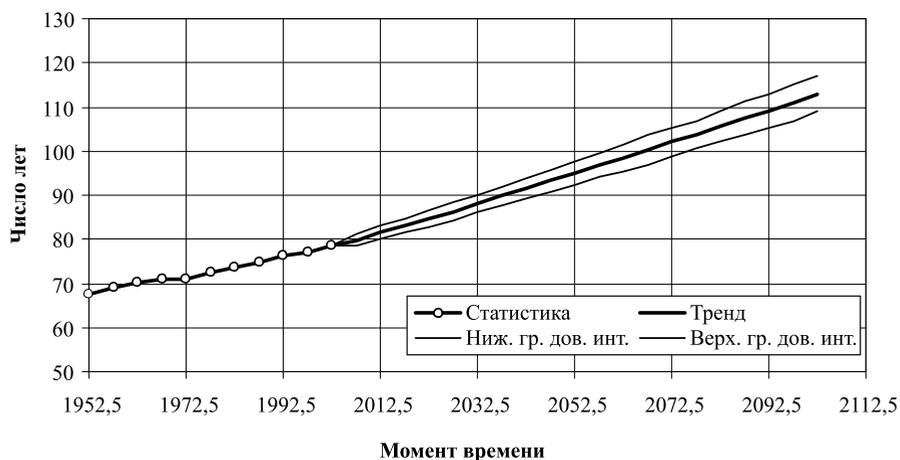


Рис. 10. Ожидаемая продолжительность жизни при рождении (оба пола). Страна — Германия

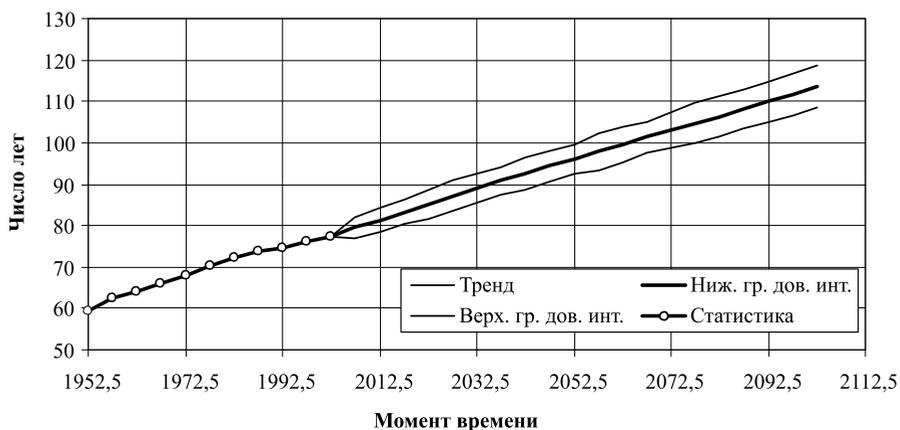


Рис. 11. Ожидаемая продолжительность жизни при рождении (оба пола). Страна — Португалия

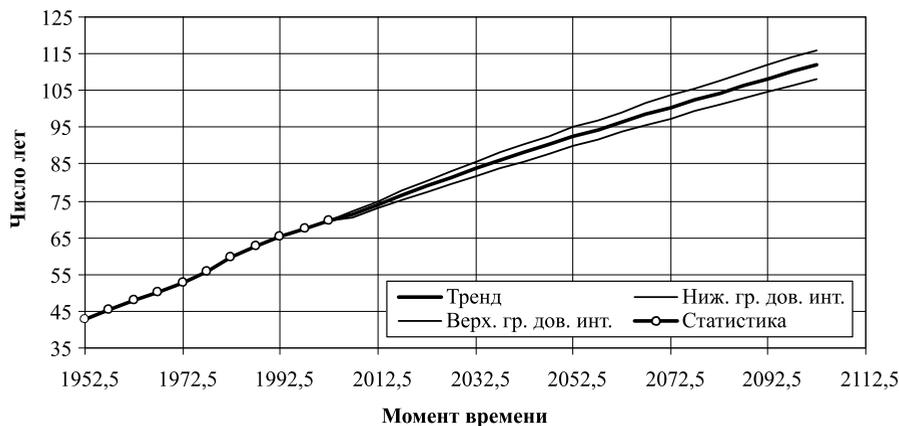


Рис. 12. Ожидаемая продолжительность жизни при рождении (оба пола). Страна — Марокко

цессы происходят быстрее. Последнее, по-видимому, является следствием бурного развития научно-технического прогресса.

В заключение нужно сказать, что предложенная методика прогнозирования применима только к тем странам, которые имеют тенденцию к сближению по заданным показателям. На данный момент эту методику вряд ли можно использовать для стран бывшего Советского Союза, поскольку продолжительность жизни в этих странах если и растет, то довольно медленно.

Авторы выражают признательность сотрудникам Венского демографического института Австрийской академии наук Щербову С. Я. и Эдиеву Д. М. за инициализацию данной работы и обсуждения в ходе ее выполнения.

Литература

1. *Oeppen J., Vaupel J. W.* Broken limits to life expectancy // *Science*. 2002. V. 296. P. 1029–1031.
2. *Carter Lawrence, Lee Ronald D.* Modeling and Forecasting U. S. Mortality: Differentials in Life Expectancy by

- Sex // *International Journal of Forecasting*. 1992 (November). V. 8. № 3. P. 393–412.
3. *Lee Ronald D., Carter Lawrence, Tuljapurkar Siiripad.* Disaggregation in Population Forecasting: Do We Need It? And How To Do It Simply // *Mathematical Population Studies*. 1995. V. 5. № 3. P. 217–34.
4. *Уилкс С.* Математическая статистика. М.: Наука, 1967. С. 522–523.
5. *Голубков В. В., Кругляков С. В.* Моделирование авторегрессионных функций и генерирование на их основе условных реализаций стационарного процесса // *Труды ИСА РАН. Динамика неоднородных систем*. № 9. М: URSS, 2005. С. 168–193.
6. *Голубков В. В., Кругляков С. В.* Прогнозирование случайных процессов с использованием параметрических моделей автокорреляционных функций // *Труды ИСА РАН. Динамика неоднородных систем*. № 10. М: URSS, 2006. С. 157–179.
7. *Голубков В. В., Кругляков С. В.* Вероятностное прогнозирование имитационным методом случайных процессов с использованием параметрических моделей автоковариационных функций // *Труды ИСА РАН. Динамика неоднородных систем*. Т. 29. № 11. М: URSS, 2007. С. 202–214.

Голубков Виктор Владимирович. С. н. с. ИСА РАН, к. ф.-м. н. Окончил МФТИ в 1962 г. Количество печатных работ: 54. Область научных интересов: математическое моделирование, численные методы, математическая статистика. E-mail: golvic@isa.ru

Кругляков Сергей Валентинович. С. н. с. ИСА РАН, к. т. н. Окончил МГУ в 1980 г. Количество печатных работ: 15, из них 1 монография. Область научных интересов: математическое моделирование, численные методы, математическая статистика. E-mail: golvic@isa.ru