Бифуркации основного цикла гамильтоновой системы Матье—Магницкого

М. А. Королькова

Аннотация. В работе проведен анализ бифуркаций одного из периодических решений двухпараметрической гамильтоновой системы Матье—Магницкого с двумя степенями свободы.
Ключевые слова: *гамильтонова система, динамический хаос, теория ФШМ.*

Введение

Настоящая работа затрагивает проблему анализа динамики решений гамильтоновых систем. В статье [1] был предложен новый, отличный от классического подход к анализу решений сложных консервативных, и, в частности, гамильтоновых систем. Указанный подход заключается в построении аппроксимирующей расширенной диссипативной системы уравнений, устойчивые решения (аттракторы) которой являются сколь угодно точными приближениями к решениям исходной консервативной системы (при стремлении параметра диссипации к нулю) и могут быть достаточно просто найдены численными методами.

Целью настоящей работы является анализ бифуркаций одного из периодических решений двухпараметрической гамильтоновой системы Матье—Магницкого с двумя степенями свободы. Ввиду простоты представления рассматриваемого решения оказывается возможным провести прямой анализ его мультипликаторов и построить диаграмму его бифуркаций на плоскости параметров системы. При этом подход, описанный в работе [1], использовался для сравнения и анализа полученных результатов.

1. Система Матье—Магницкого и первые бифуркации

Рассмотрим двухпараметрическую гамильтонову систему с двумя степенями свободы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -(\delta + z)x - x^3, \\ \dot{z} &= r, \\ \dot{r} &= -z - \frac{x^2}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

с гамильтонианом

$$H(x, y, z, r) = \frac{(\delta x^2 + y^2 + z^2 + r^2)}{2} + \frac{zx^2}{2} + \frac{x^4}{4} = \varepsilon. \tag{2}$$

В качестве параметров системы выступают $\varepsilon \geqslant 0$ и $\delta \geqslant 0$.

Система (1), (2) была построена Н. А. Магницким впервые в работе [1] небольшим изменением консервативной системы эквивалентной консервативному обобщенному уравнению Матье.

При $\delta \geqslant 0$ система (1) имеет единственное — нулевое — положение равновесия, которое удовлетворяет условию (2) лишь при $\varepsilon = 0$. При этом точка $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$ является особой точкой типа центр при любом $\delta \geqslant 0$.

При $\varepsilon > 0$ в системе (1), (2) имеет место цикл $x = y = 0$, задаваемый условием

$$H(z,\ r) = z^2 + r^2 = 2\varepsilon. \tag{3}$$

Исследуем бифуркации цикла $x = y = 0$ в зависимости от величин параметров $\varepsilon > 0$ и $\delta \geqslant 0$. Для этого необходимо провести численный анализ значений мультипликаторов цикла $x = y = 0$.

Система (1), линеаризованная в окрестности цикла $x = y = 0$, имеет вид

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -(\delta + z^*)x. \tag{4}$$

Здесь z^* — координата цикла (3), которую можно представить в виде

$$z^*(t) = \sqrt{2\varepsilon}\cos(t + \alpha), \tag{5}$$

где постоянная α зависит от начальных условий. С учетом (5) система (4) переходит в классическое уравнение Матье

$$\ddot{x} + \left[\sqrt{2\varepsilon}\cos(t + \alpha) + \delta\right]x = 0. \tag{6}$$

Таким образом, благодаря переходу к системе координат, связанной с циклом $x = y = 0$, удалось уменьшить размерность исследуемой системы

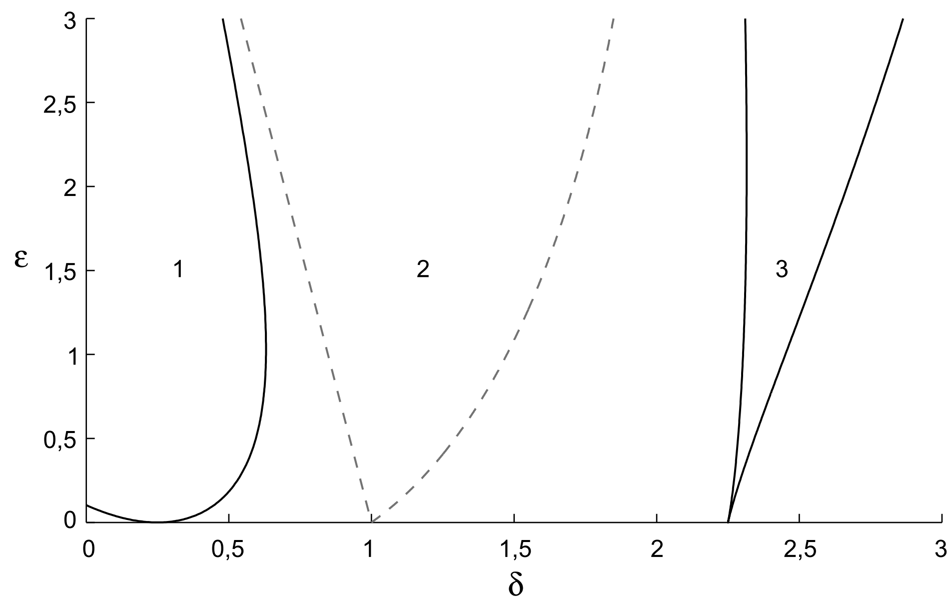

Рис. 1. Диаграмма бифуркаций цикла $x = y = 0$

на единицу. Уравнение (6) имеет те же мультипликаторы, за исключением единичного, что и исходная линеаризованная система (3), (4).

В соответствии с теоремой Флоке—Ляпунова уравнение (6) имеет решение

$$x(t) = C_1 e^{i\beta_1 t} P_1(t) + C_2 e^{i\beta_2 t} P_2(t), \tag{7}$$

где $P_{1,2}(t)$ — T-периодические функции, а $\beta_{1,2}$ — показатели Флоке [2]. В нашем случае $T = 2\pi$.

Мультипликаторы $\mu_1 = e^{i\beta_1 T}$ и $\mu_2 = e^{i\beta_2 T}$ могут быть найдены следующим образом. Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ есть решения задачи Коши для уравнения (6), отвечающие начальным условиям

$$\begin{cases} x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_1(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2(0) = 0, \\ \dot{x}_2(0) = 1. \end{cases} \tag{8}$$

Тогда общее решение есть

$$x(t) = A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t). \tag{9}$$

Подберем коэффициенты A_1 и A_2 так, чтобы решение $x(t)$ удовлетворяло условию $x(t+T) = \mu x(t)$, где в соответствии с (7) величина μ есть мультипликатор. Учтем, что при указанном условии справедливо и второе условие:

$$\dot{x}(t+T) = \mu \dot{x}(t).$$

В соответствии с этим из (8), (9) имеем для $t = 0$:

$$\begin{aligned} \mu A_1 &= A_1 x_1(T) + A_2 x_2(T), \\ \mu A_2 &= A_1 \dot{x}_1(T) + A_2 \dot{x}_2(T). \end{aligned} \tag{10}$$

Мультипликаторы определяются из условия разрешимости системы (10) относительно коэффициентов A_1 и A_2:

$$\begin{vmatrix} x_1(T) - \mu & x_2(T) \\ \dot{x}_1(T) & \dot{x}_2(T) - \mu \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\mu_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}, \quad a = \frac{1}{2}\left[x_1(T) + \dot{x}_2(T)\right]. \tag{11}$$

Здесь учтено, что вронскиан уравнения (6) в соответствии с начальными условиями (8) равен

$$W = x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2 = 1.$$

Таким образом, решая тем или иным способом задачу Коши для уравнения (6) и определяя коэффициент a, можно найти оба мультипликатора.

Из соотношений (11) видно, что $\mu_1\mu_2 = 1$. Если $|a| < 1$, то мультипликаторы являются комплексными, причем $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$, то есть цикл $x = y = 0$ является эллиптическим. Таким образом, бифуркация Андронова—Хопфа цикла $x = y = 0$ (бифуркация рождения тора) невозможна ни при каких значениях параметров ε и δ. Если $|a| > 1$, то оба мультипликатора действительны, различны, одного знака, причем $|\mu_1| > 1$, $|\mu_2| < 1$. В этом случае цикл $x = y = 0$ является гиперболическим, а характер произошедшей бифуркации определяется знаком мультипликаторов.

При помощи соотношений (11) были исследованы основные бифуркации цикла $x = y = 0$ гамильтоновой системы (1), (2). Результаты отражены на рис. 1.

Вне областей 1, 2, 3 периодическое решение $x = y = 0$ системы (1), (2) является эллиптическим циклом, и в его окрестности не происходит развития хаотической динамики (рис. 1). Сплошной линией показаны кривые бифуркаций удвоения периода эллиптического цикла $x = y = 0$. При этом сам цикл $x = y = 0$ становится гиперболическим, а в его окрестности рождается эллиптический цикл удвоенного периода, тор вокруг которого касается сам себя по гиперболическому циклу $x = y = 0$. Пунктиром обозначена кривая бифуркаций типа вилки эллиптического цикла $x = y = 0$. При этом сам цикл $x = y = 0$ становится гиперболическим, а в его окрестности рождаются два основных эллиптических цикла C_1 и C_2.

В областях 1, 2, 3 имеют место каскады бифуркаций, обусловленные бифуркациями рожденных циклов удвоенного периода (области 1 и 3) и циклов C_1 и C_2 (область 2). Анализу хаотической динамики в этих областях, а также вне окрестности цикла $x = y = 0$ будут посвящены дальнейшие исследования системы (1), (2).

Заключение

В работе рассмотрена двухпараметрическая гамильтонова система Матье—Магницкого, проведен анализ мультипликаторов цикла $x = y = 0$ системы. Построенная бифуркационная диаграмма соответствует результатам, полученным для цикла $x = y = 0$ системы (1), (2) методом, предложенным в работе [1], а также результатам численного моделирования поведения траекторий системы в окрестности цикла $x = y = 0$ при различных значениях параметров. Дальнейшие исследования рассматриваемой системы в областях развития хаотической динамики, ввиду невозможности явного аналитического представления вновь бифурцировавших циклов, также предполагается проводить согласно методике, изложенной в [1].

Литература

1. *Магницкий Н. А.* Новый подход к анализу гамильтоновых и консервативных систем // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 12. С. 1618–1627.
2. *Карлов Н. В.*, *Кириченко Н. А.* Колебания, волны, структуры. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 496 с.

Королькова Маргарита Андреевна. Специалист отдела внедрения Департамента корпоративных систем управления ООО «Сэнтум Системы безопасности». Окончила МГТУ им. Баумана в 2011 г. Количество печатных работ: 2. Область научных интересов: хаотическая динамика, управление техническими системами.
E-mail: korolkova.margaret@yandex.ru