

Гетероклинические сепаратрисные многообразия гамильтоновых и консервативных систем

Н. А. Магницкий

Аннотация. На примерах нескольких консервативных и гамильтоновых систем с полутора, двумя и тремя степенями свободы показано, что при достаточно больших значениях параметра возмущения хаотическая динамика в возмущенной консервативной или гамильтоновой системе присутствует, но переход к хаосу происходит не через разрушение двумерных или многомерных торов невозмущенной системы. Наоборот, этот переход осуществляется через рождение сложных двумерных и многомерных торов из областей устойчивости вокруг сложных циклов расширенной диссипативной системы и через бесконечный каскад бифуркаций рождения новых сложных эллиптических и гиперболических циклов и сингулярных траекторий и натянутых на них бесконечно складчатых гетероклинических сепаратрисных многообразий в соответствии с теорией ФШМ (Фейгенбаума—Шарковского—Магницкого).

Ключевые слова: консервативная система, теория ФШМ, гетероклиническое сепаратрисное многообразие.

Введение

В работах [1–5] автором теоретически обосновано и продемонстрировано на многочисленных примерах гамильтоновых систем с полутора, двумя и тремя степенями свободы, а также на примерах просто консервативных, но не гамильтоновых систем, что динамика любой такой системы является предельным случаем динамики расширенной диссипативной системы со слабой диссипацией при стремлении параметра диссипации к нулю. Области устойчивости циклов такой системы при нулевой диссипации переходят в торы консервативной (гамильтоновой) системы вокруг ее эллиптических циклов, в которые переходят сами устойчивые циклы. При этом торы консервативной (гамильтоновой) системы касаются по гиперболическим циклам, в которые переходят седловые циклы расширенной диссипативной системы. Таким образом, каскад седло-узловых бифуркаций в расширенной диссипативной системе, заключающийся в одновременном рождении устойчивых и седловых циклов, приводит к образованию в консервативной (гамильтоновой) системе гетероклинического сепаратрисного многообразия, натянутого на сложные многооборотные гиперболические циклы системы. В сечении Пуанкаре это выглядит как семейство гиперболических особых точек, соединенных сепаратрисными контурами. Эта картина при любом сдвиге в начальных

условиях переходит в набор так называемых островов (точек в сечении Пуанкаре, образующих замкнутые кривые вокруг витков эллиптического цикла), что свидетельствует о бифуркационном, а не резонансном характере их происхождения в гамильтоновых и консервативных системах.

С ростом числа витков гиперболических и эллиптических циклов увеличивается количество, но уменьшается размер островов, окружающих эллиптические циклы. Это приводит к образованию первого и самого сложного гетероклинического сепаратрисного многообразия в окрестности исходного гиперболического цикла консервативной (гамильтоновой) системы и невозможности точного вычисления траектории в окрестности такого многообразия любым численным методом. Следующие более простые гетероклинические сепаратрисные многообразия более высокого порядка ввиду нелокальности эффекта размножения циклов и торов появляются при росте значений бифуркационного параметра не только в окрестностях гетероклинических сепаратрисных многообразий более низкого порядка, но и на значительном расстоянии от них.

Рассмотренные выше гетероклинические сепаратрисные многообразия гамильтоновых и консервативных систем натянуты на гиперболические циклы, порожденные совместно с эллиптическими циклами каскадами седло-узловых бифуркаций в расширенных диссипативных системах. Но, как следу-

ет из теории динамического хаоса в гамильтоновых и консервативных системах [2–5], при достаточно больших значениях параметра возмущения $\varepsilon > 0$ в расширенных диссипативных системах существуют и другие каскады бифуркаций в соответствии со сценарием ФШМ (Фейгенбаума—Шарковского—Магницкого). Эти каскады бифуркаций порождают бесконечно складчатые сепаратрисные гетероклинические многообразия, имеющие в сечении Пуанкаре вид гетероклинического сепаратрисного зигзага [5]. Такие многообразия, натянутые на неустойчивые сингулярные циклы ФШМ-каскада диссипативной системы, переходят при нулевой диссипации в еще более сложные сепаратрисные многообразия консервативной (гамильтоновой) системы, движение траекторий по которым воспринимается как хаотическая динамика. При этом происходит растяжение гармошки бесконечно складчатого сепаратрисного зигзага на некоторую область фазового пространства системы. В оставшейся части фазового пространства могут одновременно сосуществовать со своими областями устойчивости устойчивые циклы из правой части субгармонического и гомоклинического каскадов бифуркаций. Из этого следует, что порядок чередования торов в консервативных (гамильтоновых) системах может отличаться от порядка Шарковского, существующего в системах с сильной диссипацией, и что в гамильтоновых и консервативных системах одновременно с областями хаотической динамики, порожденными сепаратрисными гетероклиническими многообразиями, могут сосуществовать различные торы вокруг эллиптических циклов.

Целью настоящей статьи является иллюстрация всех этих положений на примерах нескольких консервативных и гамильтоновых систем с полутора, двумя и тремя степенями свободы.

1. Консервативное уравнение Крокета

Консервативным уравнением Крокета называется уравнение

$$\ddot{x} + \alpha \sin x + \varepsilon \sin(x - \omega t) = 0, \quad (1)$$

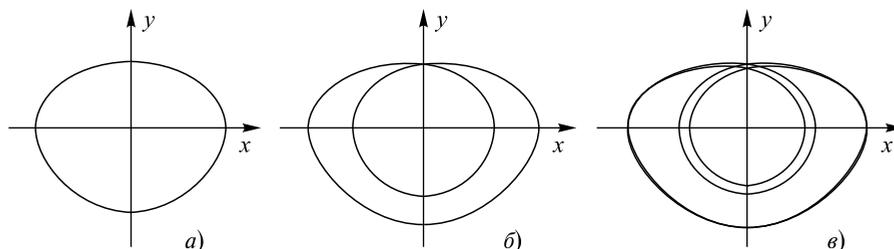


Рис. 1. Проекция на плоскость (x, y) : а) простого цикла при $\varepsilon = 0,45$, $y_0 = -1,455$; б) цикла периода два при $\varepsilon = 0,48$, $y_0 = -1,18$; в) цикла периода четыре при $\varepsilon = 0,497$, $y_0 = -1,15$ в консервативной системе Крокета (2) при $\alpha = \omega = 1$

моделирующее вращательные колебания магнита во внешнем магнитном поле в отсутствии трения [6]. Нетрудно видеть, что, уравнение (1) эквивалентно четырехмерной консервативной (не гамильтоновой) автономной системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, & \dot{y} &= -(\alpha + r) \sin x + z \cos x, \\ \dot{z} &= \omega r, & \dot{r} &= -\omega z \end{aligned} \quad (2)$$

с условием

$$H = z^2 + r^2 = \varepsilon^2, \quad z_0 = z(0) = 0.$$

Расширенная диссипативная система для системы (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, & \dot{y} &= -\mu y - (\alpha + r) \sin x + z \cos x, \\ \dot{z} &= \omega r, & \dot{r} &= -\omega z. \end{aligned} \quad (3)$$

Нетрудно проверить численно, что двухпараметрическая система (3) с начальными условиями $z_0 = z(0) = 0, r_0 = r(0) = \varepsilon$ имеет субгармонический каскад бифуркаций при каждом значении параметра $\varepsilon > 0$ и при уменьшении значений параметра μ . Для каждого цикла каскада в плоскости параметров (ε, μ) можно построить монотонно возрастающую бифуркационную кривую $\mu(\varepsilon)$ рождения данного цикла. Граничные значения этих кривых при $\mu = 0$ являются бифуркационными значениями субгармонического каскада бифуркаций консервативной системы Крокета (2) по параметру $\varepsilon > 0$.

На рис. 1 представлены найденные описанным выше методом начальные циклы субгармонического каскада бифуркаций консервативной системы Крокета (2) с начальным условием $x_0 = x(0) = 0$ при росте значений параметра ε .

Из теоретических положений бифуркационного подхода к анализу гамильтоновых и любых консервативных систем следует, что при малых значениях параметра $\varepsilon > 0$ переход к хаотической динамике в системе (2) происходит в соответствии с нелокальным эффектом размножения циклов и торов в окрестности сепаратрисы невозмущенной консервативной системы [3]. Покажем, что это имеет место и в случае консервативной системы Крокета (2). Решения систем (2),

(3) удобно наблюдать в координатах $(\sin x, y)$. При этом все гетероклинические сепаратрисные контуры, соединяющие гиперболические особые точки $\pi + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ невозмущенной системы (2) при $\varepsilon = 0$ в координатах (x, y) , изображаются двумя гомоклиническими сепаратрисными контурами точки $(0, 0)$ в координатах $(\sin x, y)$, лежащими в верхней и нижней полуплоскостях. Любая периодическая траектория невозмущенной системы, лежащая в плоскости (x, y) над (под) замкнутым гетероклиническим сепаратрисным контуром вблизи него переходит в координатах $(\sin x, y)$ в цикл, лежащий в верхней (нижней) полуплоскости внутри сепаратрисного контура (внутренний цикл) в окрестности точки $(0, 0)$. И наоборот, любой цикл невозмущенной системы (2), проходящий через точку $(x_0, 0)$ при $\pi/2 < x_0 < \pi$ изображается в координатах $(\sin x, y)$ циклом вокруг сепаратрисного контура (внешний цикл) в окрестности точки $(0, 0)$. Поэтому все траектории возмущенной системы (2), лежащие в окрестности сепаратрисного контура невозмущенной системы, можно наблюдать и анализировать на одном рисунке в координатах $(\sin x, y)$.

Традиционно принято считать, следуя А. Пуанкаре, что наличие в невозмущенной системе (2) гетероклинических контуров (сепаратрис), соединяющих гиперболические особые точки, сопровождается эффектом расщепления сепаратрисы гиперболического периодического решения возмущенной системы при $\varepsilon > 0$ с образованием пересекающимися сепаратрисными поверхностями сложной запутанной гетероклинической структуры [7–13]. Покажем, что ничего подобного в системе (2) не происходит ни при малых, ни при больших величинах возмущения $\varepsilon > 0$, а иллюзия хаотического движения создается исключительно нелокальным эффектом размножения циклов и торов в окрестности замкнутого гетероклинического контура невозмущенной системы [3, 4].

Если следовать доказательству теоремы о расщеплении сепаратрисы, то при малых $\varepsilon > 0$ в окрестности гиперболического $2\pi/\omega$ — периодического решения $x = y = 0$ невозмущенной системы (2) существует $2\pi/\omega$ — периодическое гиперболическое решение возмущенной системы, сепаратрисные поверхности которого и образуют гетероклиническую структуру. Но чем ближе к точкам $(\pm\pi, 0)$ в плоскости (x, y) находится начальная точка периодического решения системы (2), тем медленнее происходит движение вдоль траектории. Поэтому начальная точка $2\pi/\omega$ -периодического решения должна находиться достаточно далеко от гетероклинического сепаратрисного контура невозмущенной системы и близко к точке $2\pi/\omega$ -периодического эллиптического цикла невозмущенной системы. В окрестно-

сти же гетероклинического сепаратрисного контура невозмущенной системы в проекции на плоскость (x, y) могут лежать только $2\pi k/\omega$ -периодические решения возмущенной системы при $k > 1$. Поэтому, существующее в возмущенной системе $2\pi/\omega$ -периодическое решение не обязано быть гиперболическим, а его сепаратрисные поверхности не должны оказывать какое-либо влияние на динамику возмущенной системы в окрестности сепаратрисного контура невозмущенной системы. Эта динамика определяется движением по сложным торами вокруг сложных $2\pi k/\omega$ -периодических эллиптических циклов возмущенной системы при $k > 1$. Касание этих торов происходит по гиперболическим $2\pi k/\omega$ -циклам.

Кроме того, так как в окрестностях гиперболических циклов движение траектории замедляется, то это ведет к образованию в этих окрестностях новых еще более сложных эллиптических и гиперболических циклов и соответствующих им торов возмущенной системы. Следовательно, рост области хаотического движения в возмущенной системе (2) при росте значений параметра ε объясняется не эффектом расщепления сепаратрисы, а нелокальным эффектом размножения гиперболических и эллиптических циклов, а также торов вокруг эллиптических циклов. Более простые циклы рождаются достаточно далеко от сепаратрисных поверхностей гиперболических периодических решений, а более сложные — вблизи этих поверхностей. Рождение циклов происходит в результате седло-узловых бифуркаций в расширенной диссипативной системе, причем области устойчивости устойчивых циклов переходят при нулевой диссипации в тору консервативной (гамильтоновой) системы вокруг ее эллиптических циклов, в которые переходят сами устойчивые циклы.

Все сказанное подтверждается численным анализом решений консервативной (2) и расширенной диссипативной (3) систем Крокета при фиксированных значениях параметров $\varepsilon = 0,01$, $\alpha = \omega = 1$ и при стремлении параметра μ к нулю. Нетрудно установить численно, что при малых $\varepsilon = 0,01$ топология консервативной возмущенной системы (2) определяется основными торами вокруг основных циклов системы и более сложными торами вокруг сложных эллиптических циклов в окрестности гетероклинического сепаратрисного контура невозмущенной системы, родившихся изначально устойчивыми в диссипативной системе (3). В число основных циклов входят внутренние и внешние циклы невозмущенной системы, в координатах $(\sin x, y)$, а также циклы C^\pm возмущенной системы (2) вокруг центров $(2k\pi, 0)$ невозмущенной системы. Циклы C^\pm можно наблюдать в координатах $(\sin x, y)$ в окрестности нулевой особой точки.

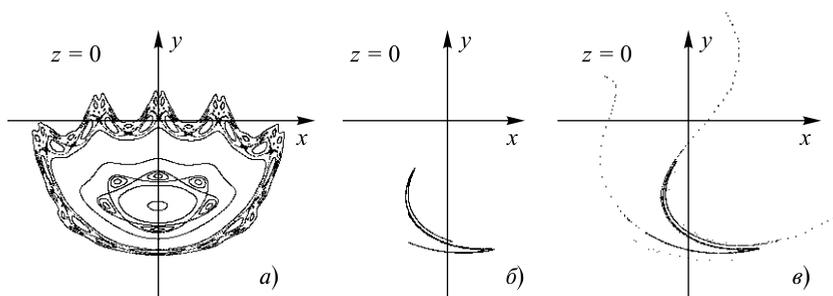


Рис. 3. а) проекция на плоскость (x, y) сечения Пуанкаре ($z = 0, r = \varepsilon$) решений консервативной системы Крокета (2) при $\varepsilon = 0,2$; развитие и усложнение гетероклинического сепаратрисного зигзага в диссипативной расширенной системе Крокета (3), близкой к консервативной, при $\varepsilon = 0,55$ и б) $\mu = 0,1415$, в) $\mu = 0,138$

перболическим циклом. В окрестности гиперболического цикла второго порядка существуют эллиптические и гиперболические циклы третьего порядка периода 66π при $(x_0 = 0, y_0 \approx -1,74)$ и 92π при $(x_0 = 0, y_0 \approx 0,13)$. Последний более сложный цикл лежит ближе в сепаратрисной поверхности гиперболического цикла второго порядка. Еще ближе к этой поверхности расположены еще более сложные эллиптические и гиперболические циклы и порожденные ими торы. Однако, их обнаружение численными методами уже невозможно вследствие ошибок в вычислениях, что приводит к видимости хаотической динамики в окрестности сепаратрисы гиперболического цикла второго порядка периода 26π .

Рассмотренные выше гетероклинические сепаратрисные многообразия гамильтоновых и консервативных систем натянуты на гиперболические циклы, порожденные совместно с эллиптическими циклами каскадами седло-узловых бифуркаций в расширенных диссипативных системах. Но, как следует из теории, при достаточно больших значениях параметра возмущения $\varepsilon > 0$ в расширенных диссипативных системах существуют и другие каскады бифуркаций в соответствии со сценарием ФШМ. Эти каскады бифуркаций порождают бесконечно складчатые сепаратрисные гетероклинические многообразия, имеющие в сечении Пуанкаре вид гетероклинического сепаратрисного зигзага. Эти многообразия, натянутые на неустойчивые сингулярные циклы ФШМ-каскада диссипативной системы, переходят при нулевой диссипации в еще более сложные сепаратрисные многообразия консервативной (гамильтоновой) системы, движение траекторий по которым воспринимается как хаотическая динамика. При этом происходит растяжение гармошки бесконечно складчатого сепаратрисного зигзага на некоторую область фазового пространства системы. В оставшейся части фазового пространства могут одновременно сосуществовать со своими областями устойчивости устойчивые циклы из правой ча-

сти субгармонического и гомоклинического каскадов бифуркаций.

Развитие и усложнение гетероклинического сепаратрисного зигзага в диссипативной расширенной системе Крокета (3), близкой к консервативной системе (2), представлено на рис. 3б, в при $\varepsilon = 0,55$. При уменьшении значений параметра диссипации μ в системе (3) наблюдается субгармонический каскад бифуркаций, порождающий гетероклинический сепаратрисный зигзаг, изображенный на рис. 3б при $\mu = 0,1415$ и рис. 3в при $\mu = 0,138$. При значениях параметра $\mu < 0,138$ гармошка гетероклинического сепаратрисного зигзага начинает охватывать все фазовое пространство системы, сливаясь с гетероклиническим сепаратрисным многообразием, натянутым на гиперболические циклы из каскада седло-узловых бифуркаций. Это приводит к хаотической динамике в расширенной диссипативной системе (3) во всем фазовом пространстве при всех меньших значениях параметра μ и, соответственно, при $\mu = 0$, что соответствует консервативному случаю системы Крокета (2).

2. Гиперболическая неавтономная консервативная система

Рассмотрим неавтономную консервативную двумерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = (1 + \varepsilon \cos t)x - x^3. \tag{4}$$

Невозмущенная система (4) имеет в плоскости (x, y) две гомоклинические петли сепаратрис седловой особой точки $(0, 0)$ вокруг особых точек $O^\pm = (\pm 1, 0)$, являющихся центрами невозмущенной системы. Поэтому, как принято считать, наличие в системе (4) возмущения $\varepsilon > 0$ должно сопровождаться эффектом расщепления сепаратрисы с образованием пересекающимися сепаратрисными поверхностями возмущенной системы сложной запутанной гомоклинической структуры в окрестности гомоклиниче-

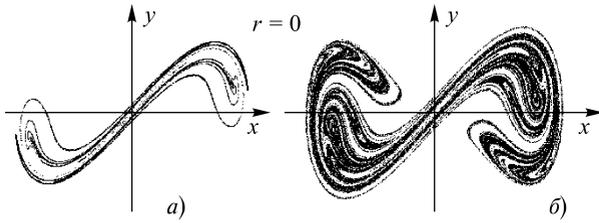


Рис. 4. Проекция на плоскость (x, y) сечения Пуанкаре $r = 0, z > 0$ диссипативной системы (6) при $\varepsilon = 1,5$ и а) $\mu = 0,24$; б) $\mu = 0,04$

ского контура невозмущенной системы в проекции на плоскость (x, y) . В работе [3] автором показано, что ничего подобного в системе (4) не происходит ни при малых, ни при достаточно больших величинах возмущения $\varepsilon > 0$. А рост области псевдохаотического движения в эквивалентной системе (4) возмущенной четырехмерной консервативной (не гамильтоновой) автономной системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, & \dot{y} &= (1+z)x - x^3, \\ \dot{z} &= r, & \dot{r} &= -z. \end{aligned} \quad (5)$$

с условиями

$$H = z^2 + r^2 = \varepsilon^2, \quad z_0 = z(0) = \varepsilon$$

при росте значений параметра ε объясняется не эффектом расщепления сепаратрисы, а нелокальным эффектом размножения гиперболических и эллиптических циклов, а также торов вокруг эллиптических циклов. Более простые циклы рождаются достаточно далеко от сепаратрисных поверхностей гиперболических периодических решений, а более сложные — вблизи этих поверхностей.

Расширенной диссипативной системой для системы (5) является система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, & \dot{y} &= (1+z)x - x^3 - \mu y, \\ \dot{z} &= r, & \dot{r} &= -z \end{aligned} \quad (6)$$

При значении $\varepsilon = 1,5$ консервативная система (5) несомненно обладает хаотической динамикой, так как при уменьшении значений параметра μ в диссипативной системе (6) происходят субгармонические каскады бифуркаций в полном соответствии с теорией ФШМ, рождая бесконечное число регулярных и сингулярных аттракторов в своих двумерных бесконечно складчатых гетероклинических сепаратрисных многообразиях (гетероклинических сепаратрисных зигзагах). Затем при $\mu \approx 0,251$ происходит слияние двух лент (сепаратрисных многообразий) сингулярных аттракторов, сопровождающееся образованием единого гетероклинического сепаратрисного зигзага. При дальнейшем уменьшении значений параметра μ происходит развитие и усложнение ге-

тероклинического сепаратрисного зигзага, сопровождающегося растяжением его гармошки на все фазовое пространство консервативной системы (5) при $\mu = 0$. На рис. 4 показаны гармошки бесконечно складчатых гетероклинических сепаратрисных зигзагов в сечении Пуанкаре $r = 0, z > 0$ диссипативной системы (6) при $\varepsilon = 1,5, \mu = 0,25$ (а) и $\mu = 0,04$ (б).

3. Стандартный пример маятника с колеблющейся точкой подвеса

Рассмотрим стандартный модельный пример маятника с вертикально периодически колеблющейся точкой подвеса, то есть систему с гамильтонианом

$$H(x, y, t, \varepsilon) = \frac{y^2}{2} + (\omega^2 + \varepsilon \cos t) \cos x. \quad (7)$$

Этот пример часто используется в современной литературе по классической гамильтоновой механике для обоснования существования эффекта расщепления сепаратрисы [7, 13]. Однако, проведенными выше рассуждениями и численными расчетами нетрудно доказать (подробно см. в [3, 4]), что никакого расщепления сепаратрисы в системе с гамильтонианом (7) не происходит, а существующая в системе хаотическая динамика при малых значениях параметра возмущения $\varepsilon > 0$, является, как и во всех рассмотренных выше консервативных системах, следствием существования сложных многооборотных переплетающихся торов в окрестности сепаратрисы невозмущенной системы в проекции на плоскость (x, y) .

Запишем уравнения системы с гамильтонианом (7) в виде четырехмерной консервативной системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, & \dot{y} &= (\omega^2 + z) \sin x, \\ \dot{z} &= r, & \dot{r} &= -z \end{aligned} \quad (8)$$

с условиями

$$H = z^2 + r^2 = \varepsilon^2, \quad z_0 = z(0) = \varepsilon.$$

Рассмотрим наряду с системой (8) расширенную диссипативную систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, & \dot{y} &= (\omega^2 + z) \sin x - \mu y, \\ \dot{z} &= r, & \dot{r} &= -z \end{aligned} \quad (9)$$

и проанализируем численно переход от решений диссипативной системы (9) к решениям консервативной системы (8) при фиксированных значениях параметров $\varepsilon, \omega = 1$ и при стремлении параметра μ к нулю. Решения систем (8) и (9) удобно анализировать в координатах $(\sin x, y)$.

При значении параметра возмущения $\varepsilon = 2$ система (8) уже обладает хаотической динамикой в смысле теории ФШМ. В этом нетрудно убедиться,

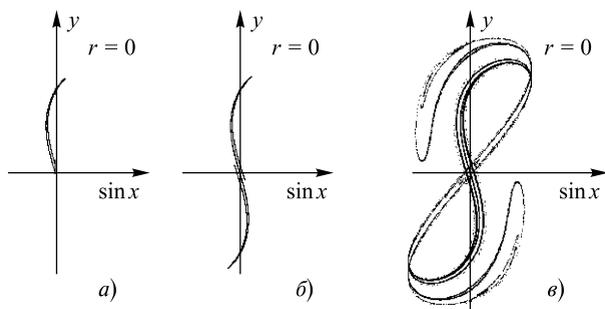


Рис. 5. Проекция на плоскость $(\sin x, y)$ сечения Пуанкаре $r = 0, z > 0$ диссипативной системы (9) при $\varepsilon = 2$ и а) $\mu = 0,337$; б) $\mu = 0,33$; в) $\mu = 0,29$

устремив параметр μ в диссипативной расширенной системе (9) к нулю. При $\mu \approx 0,38$, происходит бифуркация удвоения периода каждого из сингулярных устойчивых предельных циклов C^\pm , что дает начало каскаду Фейгенбаума бифуркаций удвоения периода. Данный каскад бифуркаций завершается рождением двух сингулярных аттракторов Фейгенбаума при $\mu \approx 0,348$. При дальнейшем уменьшении значений параметра μ начинается каскад бифуркаций рождения устойчивых циклов с периодами согласно порядку Шарковского. Циклы периода пять, например, можно наблюдать при $\mu = 0,3428$. При $\mu \approx 0,34$ начинаются два гомоклинических каскада бифуркаций, затем, как и в других системах, происходит слияние двух лент сингулярных аттракторов (двух двумерных бесконечно складчатых гетероклинических сепаратрисных многообразий), после чего процесс образования новых устойчивых циклов продолжается на единой бесконечно складчатой гетероклинической сепаратрисной поверхности.

Развитие и усложнение гетероклинического сепаратрисного зигзага в диссипативной расширенной системе (9) при уменьшении значений параметра $\mu < 0,34$ сопровождается растяжением его гармошки на большую часть фазового пространства консервативной системы (8). На рис. 5 показаны гармошки бесконечно складчатых гетероклинических сепаратрисных зигзагов в сечении Пуанкаре $r = 0, z > 0$ диссипативной системы (9) при $\varepsilon = 2, \mu = 0,337$ (а), $\mu = 0,33$ (б) и $\mu = 0,29$ (в).

4. Обобщенная гамильтонова система Матье

Рассмотрим гамильтонову систему с двумя степенями свободы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, & \dot{y} &= -(\delta + z)x - x^3, \\ \dot{z} &= r, & \dot{r} &= -z - \frac{x^2}{2} \end{aligned} \tag{10}$$

и с гамильтонианом

$$H(x, y, z, r) = \frac{(\delta x^2 + y^2 + z^2 + r^2)}{2} + \frac{zx^2}{2} + \frac{x^4}{4} = \varepsilon. \tag{11}$$

Система (10) получается добавлением слагаемого $-x^2/2$ в четвертое уравнение консервативной четырехмерной системы, эквивалентной консервативному обобщенному уравнению Матье (подробно см. в [2, 4]). Расширенная диссипативная двухпараметрическая система в данном случае может иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, & \dot{y} &= -(\delta + z)x - x^3 - \mu y, \\ \dot{z} &= r, & \dot{r} &= -z - \frac{x^2}{2} + (\varepsilon - H(x, y, z, r))r. \end{aligned} \tag{12}$$

Проанализируем численно влияние величин параметров ε и μ на динамику системы (10) при фиксированном значении параметра δ . Рассмотрим случай $\delta = 0,5$, при котором цикл $x = y = 0$ гамильтоновой системы (10) является эллиптическим циклом при достаточно малых $\varepsilon = 0,01$. В этом случае при росте значений параметра ε в его окрестности не происходит развития хаотической динамики. Однако, вне его окрестности в результате седло-узловой бифуркации рождаются эллиптический и гиперболический циклы периода четыре, хорошо наблюдаемые при $\varepsilon = 0,1$. При этом тор вокруг эллиптического цикла периода четыре касается сам себя по гиперболическому циклу и касается тора вокруг эллиптического цикла $x = y = 0$ по сепаратрисной поверхности гиперболического цикла.

При дальнейшем росте значений параметра ε происходит развитие и усложнение хаотической динамики в системе (10) через размножение циклов и торов в окрестности сепаратрисы гиперболического цикла. Затем при $\varepsilon \approx 0,185$ происходит бифуркация удвоения периода эллиптического цикла $x = y = 0$, дающая начало различным каскадам бифуркаций удвоения периода и субгармоническим каскадам бифуркаций, порождая бесконечно складчатые гетероклинические сепаратрисные многообразия как в расширенной диссипативной системе

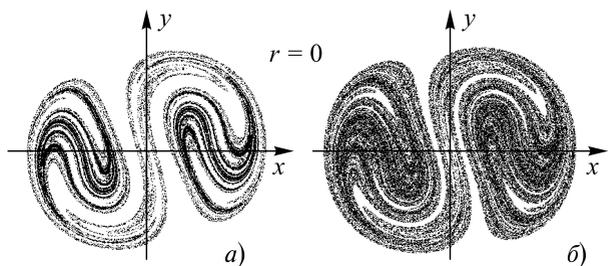


Рис. 6. Проекция на плоскость (x, y) сечения Пуанкаре $r = 0$ и $z > 0$ диссипативной системы (12) при $\delta = 0,5, \varepsilon = 1$ и а) $\mu = 0,029$, б) $\mu = 0,01$

ме (12), так и в близкой к ней гамильтоновой системе (10). Развитие и усложнение гетероклинического сепаратрисного зигзага в диссипативной расширенной системе (12) при $\varepsilon = 1$ и при стремлении μ к нулю, сопровождающееся растяжением его гармошки на фазовое пространство гамильтоновой системы (10), представлено на рис. 6.

5. Гамильтонова система с тремя степенями свободы

Рассмотрим гамильтонову систему с тремя степенями свободы, имеющую вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, & \dot{y} &= -(\delta + z)x - x^3, \\ \dot{z} &= r, & \dot{u} &= v, \\ \dot{r} &= -z - \frac{x^2}{2} - \frac{u^2}{2}, \\ \dot{v} &= -(\gamma + z)u - u^3 \end{aligned} \quad (13)$$

и гамильтониан $H = H(x, y, z, r, u, v)$:

$$\begin{aligned} H &= \frac{(\delta x^2 + y^2 + z^2 + r^2 + \gamma u^2 + v^2)}{2} + \\ &+ \frac{z(x^2 + u^2)}{2} + \frac{(x^4 + u^4)}{4} = \varepsilon. \end{aligned} \quad (14)$$

Расширенная диссипативная двухпараметрическая система в данном случае может иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, & \dot{y} &= -(\delta + z)x - x^3 - \mu y, \\ \dot{z} &= r, & \dot{u} &= v, \\ \dot{r} &= -z - \frac{x^2}{2} - \frac{u^2}{2} + (\varepsilon - H)r, \\ \dot{v} &= -(\gamma + z)u - u^3 - \mu v. \end{aligned} \quad (15)$$

Подробный численный анализ решений систем (13) и (15) при различных значениях величин параметров ε и μ и фиксированных значениях параметров $\delta = \gamma = 1$ проведен автором в работе [4]. Рассмотрим здесь случай достаточно большого значения параметра $\varepsilon = 3$. Нетрудно видеть, что решения гамильтоновой системы (13) с начальными условиями $u_0 = x_0, v_0 = y_0$ являются решениями

четырёхмерной консервативной, но не гамильтоновой системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, & \dot{y} &= -(\delta + z)x - x^3, \\ \dot{z} &= r, & \dot{r} &= -z - x^2. \end{aligned} \quad (16)$$

При значении $\varepsilon = 3$ гамильтонова система (13) несомненно обладает хаотической динамикой даже на решениях системы (16), так как при уменьшении значений параметра μ в диссипативной системе (15) основные циклы C_1 и C_2 претерпевают субгармонический и гомоклинический каскады бифуркаций в полном соответствии с теорией ФШМ, рождая бесконечное число регулярных и сингулярных аттракторов в замыканиях своих сепаратрисных поверхностей. Затем происходит слияние двух лент бесконечно складчатых гетероклинических сепаратрисных двумерных многообразий, порожденных сингулярными циклами C_1 и C_2 . В замыкании единого гетероклинического сепаратрисного многообразия рождаются новые симметричные устойчивые циклы, с которыми также происходят субгармонические каскады бифуркаций. Все циклы всех каскадов и сингулярные аттракторы, становясь неустойчивыми, не исчезают, а переходят в решения гамильтоновой системы при $\mu = 0$.

При этом существующий в гамильтоновой системе (13) глобальный хаос является не следствием разрушения каких-то мифических торов невозмущенной системы, как трактует это явление современная классическая гамильтонова механика, а исключительно следствием усложнением гетероклинического бесконечно складчатого сепаратрисного многообразия расширенной диссипативной системы (15) при стремлении параметра диссипации μ к нулю. Соответствующие гетероклинические сепаратрисные зигзаги в проекции на плоскость (x, y) сечения $r = 0$ пространства решений расширенной диссипативной системы (15) при $\varepsilon = 3, u_0 = x_0, v_0 = y_0$, и $\mu = 0,125, \mu = 0,095$ и $\mu = 0,06$ представлены на рис. 7.

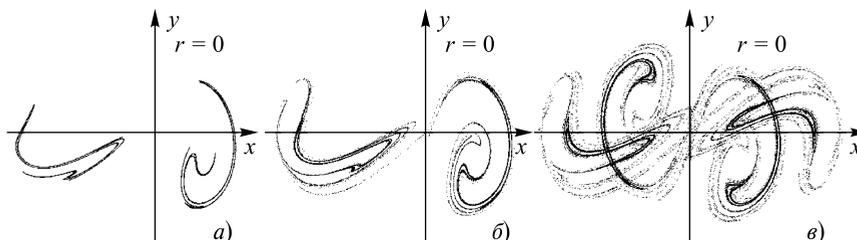


Рис. 7. Проекция на плоскость (x, y) сечения $r = 0$ диссипативной системы (15) при $\varepsilon = 3, u_0 = x_0, v_0 = y_0$ и а) $\mu = 0,125$; б) $\mu = 0,095$; в) $\mu = 0,06$

Заключение

В работе на примерах нескольких консервативных и гамильтоновых систем с полутора, двумя и тремя степенями свободы показано, что при достаточно больших значениях параметра возмущения хаотическая динамика в возмущенной системе присутствует, но переход к хаосу происходит не через разрушение двумерных или многомерных торов невозмущенной системы, а, наоборот, через рождение сложных двумерных и многомерных торов из областей устойчивости вокруг сложных циклов расширенной диссипативной системы и через бесконечный каскад бифуркаций рождения новых сложных эллиптических и гиперболических циклов и сингулярных траекторий и натянутых на них бесконечно складчатых гетероклинических сепаратрисных многообразий в соответствии с теорией ФШМ.

Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (проекты 09–07–00078а, 11–07–00126а), проектом Ведущим научным школам РФ НШ-4144.2010.1 и программами ОНИТ РАН (проекты 1.9 и 3.5).

Литература

1. *Магницкий Н. А., Сидоров С. В.* Применение теории Фейгенбаума—Шарковского—Магницкого к анализу гамильтоновых систем // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 11. С. 1474–1479.
2. *Магницкий Н. А.* Новый подход к анализу гамильтоновых и консервативных систем // Дифференц. уравнения, 2008. Т. 44. № 12. С. 1618–1627.
3. *Магницкий Н. А.* О природе динамического хаоса в окрестности сепаратрисы консервативной системы // Дифференц. уравнения, 2009. Т. 45. № 5. С. 647–654.
4. *Магницкий Н. А.* Неклассический подход к анализу гамильтоновых и консервативных систем // Нелинейная динамика и управление. Вып. 8: под ред. *Емельянова С. В., Коровина С. К.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
5. *Магницкий Н. А.* О топологической структуре сингулярных аттракторов нелинейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения, 2010. Т. 46. № 11. С. 1551–1560.
6. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. -М.: Меркурий Пресс, 2000, 366 с.
7. *Гельфрейх В. Г., Лазуткин В. Ф.* Расщепление сепаратрис: теория возмущений, экспоненциальная малость // Успехи математических наук. Т. 56, 3, 2001. С. 79–142.
8. *Арнольд В. И. Козлов В. В. Нейштадт А. И.* Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3. М.: ВИНТИ, 1985. С. 5–304.
9. *Козлов В. В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Удм. Гос. Ун-т, 1995.
10. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Меркурий-ПРЕСС, 2000, 528 с.
11. *Лоскутов А. Ю.* Динамический хаос. Системы классической механики // Успехи физических наук. Т. 177, 9, 2007. С. 990–1015.
12. *Мельников В. К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Труды Моск. Матем. Общества. Т. 12, 3, 1963. С. 3–52.
13. *Трещев Д. В.* Гамильтонова механика. М.: МИАН, 2006, 64 с.

Магницкий Николай Александрович. Заведующий лабораторией ИСА РАН, д. ф.-м. н., профессор, академик РАЕН. Окончил МГУ в 1974 г. Кол-во печатных работ: более 200, 6 монографий. Область научных интересов: нелинейные дифференциальные уравнения, теория управления, хаотические динамические системы, искусственные нейронные сети и экономико-математическое моделирование.
E-mail: nmag@isa.ru