Энтропийные модели индикаторов смертности

Ю. С. Попков

Аннотация. Предлагается стохастическая модель формирования индикаторов смертности: общего и специфицированного по возрасту коэффициентов смертности. Определено множество элементарных событий и априорная вероятность их реализации. Показано, что макроиндикаторами являются указанные коэффициенты смертности и определена энтропия на множестве макроиндикаторов. Сформирована математическая модель энтропийно-оптимальных специфицированных по возрасту коэффициентов смертности. Предложена процедура идентификации априорных вероятностей по реальным данным.

Ключевые слова: *энтропия, оптимизация, мультипликативные алгоритмы, показатели смертности, модели смертности*.

Введение

В процессе воспроизводства населения смертность наряду с рождаемостью играет главную роль. Факт смерти каждого человека есть явление биологическое. Если отвлечься от времени наступление этого события, то «факт смерти рано или поздно» строго детерминирован, в отличие от индивидуальных актов рождений, которые могут и не реализовываться.

Смертность как термин есть обозначение массового процесса, складывающегося из множества индивидуальных смертей, наступающих как у членов одной поло-возрастной группы, так и в различных группах, и определяющих в совокупности порядок вымирания реального поколения. Будучи чисто биологическим событием, смерть человека оказывается финальным состоянием его жизненного процесса, который происходил в определенных пространственных ареалах, социальной, профессиональной, экономической и политической среде, в условиях природной эволюции. Немалую роль в наступлении этого финального состояния играют такие факторы как стиль жизни, уровень культуры, возможности здравоохранения. Здесь необходимо иметь ввиду, что речь идет о факторах, которые, из общих соображений, должны оказывать какое-то влияние на смертность через влияние на наступление смерти каждого человека. Но каково это влияние?

Трудности ответа на этот вопрос оказываются принципиальными из-за того, что, по-видимомому, не существует абсолютно детерминированного знания природы (причин, факторов, событий) смерти. Тогда остается признать, что природа смертности как массового явления недетерминирована (неопределена), т. е. она не укладывается в причинно-следственную парадигму. Но, с другой стороны, некоторые характеристики этого процесса обладают достаточной степенью стабильности на значительных временных интервалах.

Смертность как массовый процесс складывается из нескольких компонент. Одна из них связана с чисто биологическим процессом старения организма и наступлением смерти в связи с невозможностью реализовывать им необходимые для жизни биохимические реакции.

Естественное биологическое старение проявляется в связанных с возрастом физиологических изменениях органов или всего человеческого организма, таких как деградация органов чувств и костной системы, повышение или понижение кровяного давления, ухудшение памяти и т. д. Эти симптомы старения относятся к возрастным изменениям на клеточном и молекулярном уровнях человеческого организма. Процесс старения воздействует на любого человека, но функциональное и органическое ухудшение здоровья с возрастом не проявляется в единообразной форме у всех людей.

Наряду с тем, что возрастная детерминанта является основной, существуют также гендерные различия. Многолетние наблюдения за процессом смертности показывают, что женщины в любом возрасте испытывают меньший риск умереть. Это объясняется комбинацией биологических и социальных факторов. В частности считается, что нейро-эндокринная система у женщин является особо защищенной [1, 2, 9].

Другая компонента возникает из-за всевозможных болезней (в том числе наркомания и алкоголизм), сопровождающих развитие человеческой цивилизации. Следует отметить, что данная компонента вносит наибольший вклад в количественные характеристики смертности, и подавляющее количество исследований по этой проблеме посвящено именно ей.

Если характеристики естественного старения организма со временем меняются мало, то компонента, связанная с болезнями, оказывается весьма динамической. Здесь прослеживаются две тенденции. С одной стороны, появляются новые виды заболеваний или известные начинают проявляться чаще. С другой, достижения медицинской и естественных наук, общий рост экономического и культурного уровня человечества противодействуют летальному исходу заболеваний [6, 7].

Третья составляющая — это так называемые несчастные случаи. Здесь имеются в виду события гибели людей в транспортных и прочих техногенных происшествиях. Особое место в этой группе занимают смертельные события, имеющие криминальную основу.

Кроме перечисленных трех компонент процесса смертности рассматриваются еще и четвертая компонента, связанная с изменениями природной среды и природными катострофами. Первое из них происходит весьма медленно по сравнению с временем жизни поколения, а второе весьма редко. Хотя в количественном выражении их влияние часто оказывается существенным. Указанная классификация — довольно условная, хотя во многих работах по анализу причин смертности она используется (см. [3, 4]).

Если пока сосредоточить свое внимание на второй и третьей компоненте процесса смертности, то нетрудно заметить зависисмость этих компонент от социально-экономических и экологических факторов, которые имеют весьма неоднородное пространственное распределение. Географические различия в показателях смертности обычно рассматриваются в территориальном разрезе [5, 8, 10].

Подавляющее большинство исследований процессов смертности населения базируется на регрессионных моделях и статистических данных, с помощью которых изучаются взаимосвязи между показателями смертности и различными внешними факторами из перечесленных выше классов [11, 13, 14]. Математическое моделирование механизмов смертности ориентируется в основном на объекты вне человеческой популяции [15, 16].

Основу данной рботы составляет гипотеза о стохастической природе смертности. Массовый характер процесса смертности (существование множества элементарных событий) и некоторая его квази-стабильность (σ-алгебра и мера) могут служить определенным обоснованием гипотезы о его случайной природе. Эта гипотеза позволяет привлечь развитый аппарат теории вероятности и случайных процессов для моделирования и изучения процесса смертности в количественных показателях. Таковыми являются коэффициенты смертности: общий (TMR) и специфицированный по возрасту (ASMR). Развиваются принципы, структуры и алгоритмы моделирования указанных параметров смертности, использующие принцип максимизации энтропии.

1. Энтропийная модель специфицированного по полу и возрасту коэффициента смертности

Процесс смертности складывается из множества индивидуальных событий для мужской M и женской F частей населения, происшедших в момент времени t, в возрастной группе a. Многочисленные наблюдения за реальными событиями, т. е. массивы реальных данных, демонстририруют определенную стационарность этого множества, что позволяет использовать для изучения его свойств стохастическую модель.

Смысл ее для данного объекта сводится к двухуровнему (микро- и макро-) представлению процесса смертности. На микроуровне рассматривается множество случайных индивидуальных (элементарных) смертей (событий) с определенными свойствами. На макроуровне процесс смертности представляется вероятностными характеристиками данного множества. Например, средними значениями коэффициентов смертности, их дисперсиями, функциями распределения вероятностей и др.

Следуя данной концепции, рассмотрим распределение населения $K(a,t)$ по возрастным группам $a \in A$ в момент времени t. Поскольку процессы смертности мужской и женской частей населения независимы, не будем пока индексировать это распределение по полу. Через один год (шаг формирования возрастных групп) ожидается, что часть $\widetilde{K}(a,t)$ этих индивидов перейдет в следующую возрастную группу, а другая часть $D(a,t)$ останется в группе a. Тогда между емкостью $K(a,t)$ возрастной группы a, количеством индивидов $\widetilde{K}(a,t)$, которые «доживут» до следующей возрастной группы, и количеством $D(a,t)$ индивидов, которые не доживут до следующей возрастной группы, имеет место следующее соотношение:

$$\widetilde{K}(a,t) = K(a,t) - D(a,t), \quad a \in A. \tag{1}$$

Предполагается, что индивиды, принадлежащие одной возрастной группе неразличимы. Полагая, что события «жизнь» и «смерть» случайные и независимые, для каждого члена возрастной группы a существует априорная вероятность $\nu(a,t)$ дожить до следующей возрастной группы, и априорная вероятность $1-\nu(a,t)$ не дожить. Оба исхода («жизнь» и «смерть») можно рассматривать как два «ящика» с ячеестой структурой. Каждая ячейка в них может быть занята или остаться свободной. Емкость этих ящиков, т. е. количество ячеек, принимается равным количеству индивидов в соответствующей возрастной группе $K(a,t)$.

Поясним это утверждение. Если емкость ящика «жизнь» принимается равной количеству индивидов в данной возрастной группе, то это означает, что все индивиды из данной возрастной группы переходят в следующую, т. е. смертность отсутствует. Если емкость ящика «смерть» предполагается также равной $K(a,n,t)$, то это означает, что допускается возможность полного вымирания данной возрастной группы. Описаный стохастический механизм адекватен статистике Ферми [17].

Многократная реализация указанных событий порождает ансамбль распределений $D(a,t)$ количества умерших по возрастным группам в момент времени t. Распределение $D(a,t)$ является случайным. Ансамбль $D(t)$ случайных распределений $D(a,t)$ характеризуется обобщенной информационной энтропией Ферми [12]:

$$H[D(t)]=-\sum_{a\in A}D(a,t)\ln\frac{D(a,t)}{\eta(a,t)}+ \\ +[K(a,t)-D(a,t)]\ln[K(a,t)-D(a,t)], \quad (2)$$

$$\eta(a,t)=\frac{\nu(a,t)}{1-\nu(a,t)}. \quad (3)$$

Обратимся к равенству (1), определяющим связь между возрастными распределениями доживших и умерших в возрастной группу a. Распределение $\widetilde{K}(a,t)$ есть характеристика населения, которое совершит переход в группу $a+1$. Этот переход сопровождается потреблением различных ресурсов (жилье, образование, работа, здравоохранение, экология). Для некоторых из ресурсов удается определить их удельные (на одного индивида) стоимостные оценки. Обозначим их $c_1(a,t),\dots,c_r(a,t)$, где r — количество потребляемых ресурсов, и их запасы — $W_1,\dots,W_r$. Тогда количество потребляемых ресурсов, обеспечивающее переход индивидов из возрастной группы a в возрастную группу $a+1$,

$$\begin{gathered}\sum_{a\in A}c_1(a,t)\widetilde{K}(a,t),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{a\in A}c_r(a,t)\widetilde{K}(a,t)\end{gathered} \quad (4)$$

не должно превышать их запасов $W_1,\dots,W_r$.

В последние годы в связи с проблемами страхования жизни развивается идея об оценке средней «стоимости жизни» индивида возраста a. При построении такой оценки учитывается указанное выше потребление r ресурсов. Обозначим $c(a,t)$ удельную стоимость обеспечения жизни индивида из возрастной группы a в момент времени t. Тогда полная стоимость обеспечения жизни всего населения, дожившего до следующей возрастной группы, определяется следующим выражением:

$$\sum_{a\in A}c(a,t)\widetilde{K}(a,t), \quad (5)$$

и эта величина не должна превышать заданную величину $W(n,t)$, являющуюся композицией величин $W_1,\dots,W_r$.

Возможна декомпозиция этих модельных представлений на распределения умерших мужчин $D_M^*(a,t)$ и женщин $D_F^*(a,t)$. Для этого потребуется информация о поло-возрастной структуре населения, т. е. $K_M(a,t)$ и $K_F(a,t)$, и априорные вероятности дожития до следующей возрастной группы приобретут индекс пола: $\nu_M(a,t)$ и $\nu_F(a,t)$.

Таким образом, *энтропийная модель поло-возрастного распределения умерших* приобретает следующий вид:

$$\begin{gathered}H[D_M(t),D_F(t)]= \\ =-\sum_{a\in A}D_M(a,t)\ln\frac{D_M(a,t)}{\eta_M(a,t)}+ \\ +[K_M(a,t)-D_M(a,t)]\ln[K_M(a,t)-D_M(a,t)]- \\ -\sum_{a\in A}D_F(a,t)\ln\frac{D_F(a,t)}{\eta_F(a,t)}+ \\ +[K_F(a,t)-D_F(a,t)]\ln[K_F(a,t)-D_F(a,t)]\Rightarrow\max,\end{gathered} \quad (6)$$

$$\begin{gathered}\eta_M(a,t)=\frac{\nu_M(a,t)}{1-\nu_M(a,t)},\\ \eta_F(a,t)=\frac{\nu_F(a,t)}{1-\nu_F(a,t)}\end{gathered} \quad (7)$$

при ограничениях на:

1) r (потребляемые ресурсы)

$$\begin{gathered}\sum_{a\in A}c_1(a,t)(D_M(a,t)+D_F(a,t))\geqslant Q_1(t),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{a\in A}c_r(a,n,t)(D_M(a,t)+D_F(a,t))\geqslant Q_r(t),\end{gathered} \quad (8)$$

где

$$Q_k(t)=\sum_{a\in A}c_k(a,t)(K_M(a,t)+K_F(a,t))-W_k, \\ k\in[1,r]. \quad (9)$$

2) «стоимость жизни»:

$$\sum_{a\in A} c(a,t)(D_M(a,t)+D_F(a,t)) \geqslant Q(t), \qquad (10)$$

где

$$Q(t)=\sum_{a\in A} c(a,t)(K_M(a,t)+K_F(a,t))-W(t). \quad (11)$$

С помощью указанных моделей получаем энтропийно-оптимальное распределения умерших по поло-возрастным группам $D^*_M(a,t)$ и $D^*_F(a,t)$. Эти распределения позволяют восстановить

1) специфицированные по возрасту коэффициенты смертности (ASMR)

$$\begin{aligned} d^*_M(a,t) &= \frac{D^*_M(a,t)}{P(t)},\\ d^*_F(a,t) &= \frac{D^*_F(a,t)}{P(t)}, \end{aligned} \qquad (12)$$

где $P(t)$ — общее население в момент времени t;

2) общие коэффициенты смертности (TMR)

$$\begin{aligned} d^*_M(t) &= (A+1)^{-1}\sum_{a\in A} d^*_M(a,t),\\ d^*_F(t) &= (A+1)^{-1}\sum_{a\in A} d^*_F(a,t). \end{aligned} \qquad (13)$$

Решение задач (6–10) строится на базе условий оптимальности Куна—Таккера, формулируемых в терминах функции Лагранжа. Покажем процедуру решения для задачи (6–9). В данном случае функция Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned} &L[D_M(t),D_F(t),\lambda]=\\ &=H[D_M(t),D_F(t)]+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k[-Q_k(t)+\\ &+\sum_{a\in A} c_k(a,t)(D_M(a,t)+D_F(a,t)]. \end{aligned} \qquad (14)$$

Условия оптимальности приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} &\nabla_{D_M(a,t)}L=\nabla_{D_M(a,t)}H[D_M(t),D_F(t)]+\\ &+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k c_k(a,t)=0, \quad a\in A;\\ &\nabla_{D_F(a,t)}L=\nabla_{D_F(a,t)}H[D_M(t),D_F(t)]+\\ &+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k c_k(a,t)=0, \quad a\in A;\\ &\nabla_{\lambda_k}L=-\sum_{a\in A} c_k(a,n,t)(D_M(a,t)+D_F(a,t))+\\ &+Q_k(n,t)\geqslant 0, \quad k\in[1,r];\\ &\lambda_k\nabla_{\lambda_k}L=0, \quad \lambda_k\geqslant 0, \quad r\in[1,r]. \end{aligned} \qquad (15)$$

Из первых двух групп уравнений имеем:

$$\begin{aligned} D^*_M(a,t) &= \frac{K_M(a,t)}{1+b_M(a,t)\exp\left(\sum\limits_{k=1}^{r}\lambda_k c_k(a,t)\right)},\\ b_M(a,t) &= [\eta_M(a,t)]^{-1},\\ D^*_F(a,t) &= \frac{K_F(a,t)}{1+b_F(a,t)\exp\left(\sum\limits_{k=1}^{r}\lambda_k c_k(a,t)\right)},\\ b_F(a,t) &= [\eta_F(a,t)]^{-1}. \end{aligned} \qquad (16)$$

Множители Лагранжа определяются из следующей системы нелинейных уравнений:

$$\lambda_k\Phi_k(\lambda)=0, \quad \lambda_k\geqslant 0, \quad k\in[1,r], \qquad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_k(\lambda) &= -Q_k(t)+\sum_{a\in A} c_k(a,t)\times\\ &\times\left[\frac{K_M(a,t)}{1+b_M(a,t)\exp\left(-\sum\limits_{j=1}^{r} c_j(a,n,t)\lambda_j\right)}+\right.\\ &\left.+\frac{K_F(a,t)}{1+b_F(a,t)\exp\left(-\sum\limits_{j=1}^{r} c_j(a,n,t)\lambda_j\right)}\right]. \end{aligned} \qquad (18)$$

Неотрицательные решения системы уравнений (17, 18) будем искать с помощью мультипликативного алгоритма следующего вида [12]:

$$\lambda_k^{s+1}=\lambda_k^s(1+\alpha\Phi_k(\lambda^s)), \quad k\in[1,r], \qquad (19)$$

где α — параметр шага.

2. Прогнозирование специфицированного по возрасту распределения умерших (пример)

Рассмотрим энтропийную модель распределения умерших (6, 7, 8, 9) без спецификации по полу. В этой модели случайный распределительный механизм характеризуется обобщенной информационной энтропией Ферми, которая допускает теоретическую возможность «вымирания» возрастных групп, т. е. $D(a,t)=K(a,t)$. Однако вероятность таких событий ничтожно мала и реально имеет место следующее соотношение между емкостью возрастных групп и количеством умерших в них:

$$D(a,t)\ll K(a,t), \quad a\in A. \qquad (20)$$

В этом случае удобно пользоваться асимптотическим выражением обобщенной информационной энтропии Ферми:

$$H_B[D(t)]=-\sum_{a\in A} D(a,t)\ln\frac{D(a,t)}{e\nu(a,t)}, \qquad (21)$$

которое является обобщенной информационной энтропией Больцмана.

В данном примере мы будем ориентироваться на российскую демографическую статистику, в которой выделена 0-группа новорожденных, группа от 1 до 4 лет, остальные возрастные группы имеют длину в 5 лет, последняя имеет максимальный возраст 84 года. Таким образом, интервал $A = \{a : 0, 1, \dots, 17\}$.

В рассматриваемой модели будем учитывать влияние стоимости бесплатного для населения медицинского обслуживания и доли ВВП, направляемый на потребление. Если стоимость медицинского обслуживания, которое обеспечивает государство, непосредственно влияет на смертность, то размеры доли ВВП, направляемой на потребление, является агрегированным фактором влияния, косвенно характеризующий «стоимость жизни».

Таким образом, модель специфицированного по принятым возрастным группам распределения умерших принимает следующий вид:

$$H_B[D(t)] \Rightarrow \max, \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \sum_{a\in A} c_1(a,t)D(a,t) \geqslant Q_1(t), \\ \sum_{a\in A} c_2(a,t)D(a,t) \geqslant Q_2(t), \end{aligned} \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned} Q_1(t) = \sum_{a\in A} c_1(a,t)K(a,t) - W_1(t), \\ Q_2(t) = \sum_{a\in A} c_2(a,t)K(a,t) - W_2(t). \end{aligned} \tag{24}$$

В этих выражениях $W_1(t)$ — стоимость бесплатного для населения медицинского обслуживания и $W_2(t)$ — объем потребляемой части ВВП в момент времени t, $c_1(a,t), c_2(a,t)$ — удельные, специфицированные по возрастным группам, характеристики расходования указанных двух типов ресурсов.

Рассмотрим первый ресурс — медицинское обслуживание. Выделим три класса возрастных групп: младшие ($A_{\min} \in [0 - a_{\min}]$), средние ($A_{av} \in [a_{\min} + +1 - a_{av}]$), старшие ($A_{\max} \in [a_{av} + 1 - a_{\max}+]$). В данном примере приняты следующие параметры классов возрастных групп: $a_{\min} = 14$, $a_{av} = 49$, $a_{\max} = 84$.

С точки зрения медицинского обслуживания средний класс A_{av} требует минимальных затрат. Обозначим удельные затраты

$$c_1(a,t) = M^0, \quad a \in A_{av}. \tag{25}$$

Примем, что затраты на медицинское обслуживание в младшем классе в α и в старшем классе в β раз больше, чем в среднем классе, т. е.

$$c_1(a,t) = \begin{cases} \alpha M^0, & \text{для всех } a \in A_{\min}, \\ \beta M^0, & \text{для всех } a \in A_{\max}, \end{cases} \tag{26}$$

где $\beta > \alpha > 1$.

Рассмотрим теперь второй ресурс — фонд потребления как долю ВВП, опираясь на теже возрастные классы. Зависимость удельного расходования этого ресурса от указанных классов имеет обратную предыдущей форму, а именно, средний класс потребляет наибольшее его количество. Обозначим его удельное потребление

$$c_2(a,t) = C^0, \quad a \in A_{av}. \tag{27}$$

Удельное потребление в младшем классе в γ и в старшем классе в η раз меньше, чем в среднем классе, т. е.

$$c_2(a,t) = \begin{cases} \gamma C^0, & \text{для всех } a \in A_{\min}, \\ \eta C^0, & \text{для всех } a \in A_{\max}, \end{cases} \tag{28}$$

где $\eta < \gamma < 1$.

Перепишем (23, 24) в новых обозначениях:

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{a\in A_{\min}} D(a,t) + \sum_{a\in A_{av}} D(a,t) + \beta \sum_{a\in A_{\max}} D(a,t) \geqslant q_1(t), \\ \gamma \sum_{a\in A_{\min}} D(a,t) + \sum_{a\in A_{av}} D(a,t) + \eta \sum_{a\in A_{\max}} D(a,t) \geqslant q_2(t), \end{aligned} \tag{29}$$

где

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \alpha \sum_{a\in A_{\min}} K(a,t) + \sum_{a\in A_{av}} K(a,t) + \\ &\quad + \beta \sum_{a\in A_{\max}} K(a,t) - \frac{W_1(t)}{M^0}, \\ q_2(t) &= \gamma \sum_{a\in A_{\min}} K(a,t) + \sum_{a\in A_{av}} K(a,t) + \\ &\quad + \eta \sum_{a\in A_{\max}} K(a,t) - \frac{W_2(t)}{C^0}. \end{aligned} \tag{30}$$

Итак, модель специфицированного по возрасту распределения умерших описывается задачей максимизации энтропии (21) на множестве, заданном системой двух неравенств (29).

В модель входит некоторое количество параметров, которые разделим на три группы. Первую группу образуют параметры, характеризующие случайный распределительный механизм выбывания индивидов из возрастных групп. Ими являются априорные вероятности $\nu(a,t)$, $a \in A$. Вторую группу образуют внешние параметры, характеризующие состояние социально-экономической среды. К ним относятся объемы фондов бесплатного медицинского страхования $W_1(t)$ и потребления $W_2(t)$, средние «душевые» стоимости медицинского обслуживания M^0, доли фонда потребления в ВВП C^0. В третью группу входят так называемые «сценарные» параметры $\alpha, \beta, \gamma, \eta$, характеризующие распределение удельных стоимостей медицинского обслуживания и доли фонда потребления по возрастным группам.

В данном примере будем ориентироваться на российскую статистику в 2006 и 2008 гг. За двухлетний интервал параметры первой группу практически не меняются, т. е. априорные вероятности для 2006 г. сохраняются и на 2008 г. Параметры второй группы в течение указанного интервала увеличиваются на 15–20%. И наконец, третью группу образует набор сценариев (вариантов), которые приняты одинаковыми для 2006 и 2008 гг.

Значения соответствующих параметров приведены в табл. 1, 2.

Для определения параметров первой группы, а именно, априорных вероятностей $\nu(a, t)$, воспользуемся ретроспективной реальной информацией о распределении $D_r(a, 2006)$ численности умерших и распределением численности $K_r(a, 2006)$ по возрастным группам (табл. 3, первые две колонки).

Для определения «подходящих» априорных вероятностей 2006 года использовалась следующая процедура:

- выбирается 1-ый вариант сценарных параметров из табл. 2;
- для статистики численности умерших и объемов возрастных групп 2006 года решается задача *идентификации* (см. ниже) априорных вероятностей ν^1;
- определяется распределение $D^1(a, 2006, \nu^1)$ умерших по возрастным группам для найденных априорных вероятностей;
- вычисляется относительная средне-квадратическая ошибка между модельным и реальным распределениями умерших по возрастным группам:

$$\varepsilon_1 = \frac{\|D_r(a, 2006) - D^1(a, 2006, \nu^1)\|}{\|D_r(a, 2006)\| + \|D^1(a, 2006, \nu^1)\|}, \qquad (31)$$

где норма

$$\|x\| = \sqrt{\sum_i x_i^2};$$

- выбирается 2-й вариант сценарных параметров, решается задача *идентификации* и вычисляется по формуле (31) ошибка ε_2;
- выбирается вектор априорных вероятностей ν^0 (2006), соответствующий $\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$;
- процедура может быть проведена и для других значений сценарных параметров.

Таблица 1

Внешние параметры (руб.)

Параметры	Годы	
	2006	2008
$W_1 \times 10^9$	425	480
$W_2 \times 10^9$	1200	1440
M^0	1740	4025
C^0	11 950	12 000

Таблица 2

Сценарные параметры

Параметры	Варианты	
	1	2
α	2,0	2,1
β	3,0	3,0
γ	0,50	0,50
η	0,25	0,25

Рассмотрим задачу *идентификации априорных вероятностей* по реальным данным.

Задача идентификации состоит в том, чтобы определить такой вектор ν^1, для которого ошибка

$$\epsilon(\nu) = \sum_{a \in A} [D_r(a) - D^*(a, \nu)]^2 \Rightarrow \min_{\nu}, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant 1, \qquad (32)$$

где $D^r(a)$ — реальное специфицированное по возрасту распределение умерших и $D^*(a, \nu)$ — специфицированное по возрасту распределение умерших, генерируемое моделью (21), (29) при некотором векторе ν.

Представим эту модель в визуально более простом виде:

$$H(D) = -\sum_{a \in A} D_a \ln \frac{D_a}{e\nu_a} \Rightarrow \max, \qquad (33)$$

$$G_1(D) = \alpha \sum_{a \in A_{\min}} D_a + \sum_{a \in A_{av}} D_a + \beta \sum_{a \in A_{\max}} D_a \geqslant q_1,$$
$$G_2(D) = \gamma \sum_{a \in A_{\min}} D_a + \sum_{a \in A_{av}} D_a + \eta \sum_{a \in A_{\max}} D_a \geqslant q_2, \qquad (34)$$
$$D_a \geqslant 0, \quad a \in A,$$

$$q_1 = \alpha \sum_{a \in A_{\min}} K_a + \sum_{a \in A_{av}} K_a + \beta \sum_{a \in A_{\max}} K_a - \frac{W_1(2006)}{M^0(2006)},$$
$$q_2 = \gamma \sum_{a \in A_{\min}} K_a + \sum_{a \in A_{av}} K_a + \eta \sum_{a \in A_{\max}} K_a - \frac{W_2(2006)}{C^0(2006)}, \qquad (35)$$

где $D_a = D(a, 2006)$, $K_a = K(a, 2006)$.

Таблица 3

Реальные и модельные распределения

№	Группа	$K_r(a, 2006)$	$D_r(a, 2006)$	$D^1(a, 2006)$	$D^2(a, 2006)$	$\nu^0(a, 2006)$
0	0 – 0	1 333 693	15 079	14 909	17 089	0,0129
1	1 – 4	5 065 658	3968	3773	4497	0,0032
2	5 – 9	6 940 873	2273	2192	2576	0,0019
3	10 – 14	10 406 377	2690	1640	3181	0,0023
4	15 – 19	12 800 628	12 646	11 658	4589	0,0016
5	20 – 24	11 466 404	27 361	25 183	9913	0,0036
6	25 – 29	10 612 976	42 361	38 970	15 341	0,0056
7	30 – 34	9 836 374	50 443	46 398	18 265	0,0067
8	35 – 39	10 216 384	54 694	50 305	19 803	0,0072
9	40 – 44	12 546 470	82 858	76 191	29 994	0,0110
10	45 – 49	11 605 898	125 557	115 437	45 444	0,0166
11	50 – 54	10 071 198	155 578	179 706	266 526	0,0463
12	55 – 59	5 347 399	1 710 230	197 467	292 868	0,0509
13	60 – 64	7 983 062	112 254	129 617	192 239	0,0334
14	65 – 69	6 344 576	258 302	298 231	442 313	0,0769
15	70 – 74	5 897 697	239 391	276 398	409 933	0,0713
16	75 – 79	3 911 286	334 671	386 400	573 078	0,0387
17	80 – 84	1 569 690	262 815	303 442	450 041	0,0782
–	ε	–	–	0,00025	0,262	–

В этой задаче все параметры фиксированы, кроме априорных вероятностей ν, которые являются свободными параметрами. Поэтому ее решение зависит от этих свободных параметров, т. е. $D^* = D^*(\nu)$. В общем случае указанная зависимость определяется условиями оптимальности Куна—Таккера ([18]). Однако, для данной задачи, в которой допустимое множество описыватся двумя неравенствами (34), можно пойти более простым путем, перебирая возможные расположения абсолютного максимума энтропийной функции (33) по отношению к допустимому множеству.

Абсолютный максимум функции (33) достигается в точке с координатами

$$D_a^0 = \nu_a e^{-1}, \quad a \in A. \tag{36}$$

Функция (33) строго вогнутая и допустимое множество, заданное системой неравенств (34), представляет собой многогранник. Поэтому решение задачи может возникать в одной из следующих ситуаций.

- Оба неравенства (34) выполняются строго:

$$G_1(D^0) > q_1, \quad G_2(D^0) > q_2. \tag{37}$$

Тогда решение задачи (33, 34)

$$D_a^* = D_a^0, \quad a \in A. \tag{38}$$

- Первое неравенство выполняется строго, а второе — не выполняется:

$$G_1(D^0) > q_1, \quad G_2(D^0) < q_2. \tag{39}$$

Тогда исходная задача трансформируется в следующую задачу на условный экстремум:

$$H(D) \Rightarrow \max, \quad G_2(D) = q_2. \tag{40}$$

- Второе неравенство выполняется строго, а первое — не выполняется:

$$G_1(D^0) < q_1, \quad G_2(D^0) > q_2. \tag{41}$$

Тогда исходная задача трансформируется в следующую задачу на условный экстремум:

$$H(D) \Rightarrow \max, \quad G_1(D) = q_1. \tag{42}$$

- Оба неравенства не выполняются:

$$G_1(D^0) < q_1, \quad G_2(D^0) < q_2. \tag{43}$$

Тогда исходная задача трансформируется в следующую задачу на условный экстремум:

$$H(D)\Rightarrow\max,\quad G_1(D)=q_1,\quad G_2(D)=q_2. \tag{44}$$

Таким образом, в зависимости от расположения точки абсолютного максимума в допустимом множестве исходная задача математического программирования сводится к трем задачам на условный экстремум, две из которых имеют по одному ограничению-равенству, и третья — два ограничения-равенства.

Рассмотрим первую из них — задачу на условный экстремум с одним ограничением-равенством:

$$\begin{gathered} H(D)=-\sum_{a\in A}D_a\ln\frac{D_a}{e\nu_a}\Rightarrow\max,\\ G_1(D)=\alpha\sum_{a\in A_{\min}}D_a+\sum_{a\in A_{av}}D_a+\beta\sum_{a\in A_{\max}}D_a=q_1,\\ q_1=\alpha\sum_{a\in A_{\min}}K_a+\sum_{a\in A_{av}}K_a+\beta\sum_{a\in A_{\max}}K_a-\frac{W_1(2006)}{M^0(2006)}. \end{gathered} \tag{45}$$

Используя технику множителей Лагранжа, для каждого фиксированного вектора ν можно получить решение этой задачи в следующем виде:

$$D_a^*(\nu)=\begin{cases} u_*^{\alpha}(\nu), & \text{для } a\in A_{\min},\\ \nu_a\,u_*(\nu), & \text{для } a\in A_{av},\\ u_*^{\beta}(\nu), & \text{для } a\in A_{\max}. \end{cases} \tag{46}$$

Здесь $u_*=\exp(-\lambda)$ — экспоненциальный множитель Лагранжа, значение которого определяются решением следующго уравнения:

$$\begin{gathered} f(u)=\frac{1}{q_1^{av}(\nu)}\left(u+\alpha R_{\min}(\nu)u^{\alpha}+\beta R_{\max}(\nu)u^{\beta}\right)=1,\\ \beta>\alpha>1, \end{gathered} \tag{47}$$

где

$$\begin{gathered} R_{\min}(\nu)=\frac{\sum\limits_{a\in A_{\min}}\nu_a}{\sum\limits_{a\in Aav}\nu_a},\quad R_{\max}(\nu)=\frac{\sum\limits_{a\in A_{\max}}\nu_a}{\sum\limits_{a\in Aav}\nu_a},\\ q_1^{av}(\nu)=\frac{q_1}{\sum\limits_{a\in Aav}\nu_a}. \end{gathered} \tag{48}$$

Вторая задача аналогичная предыдущей, но с другим ограничением:

$$\begin{gathered} H(D)=-\sum_{a\in A}D_a\ln\frac{D_a}{e\nu_a}\Rightarrow\max,\\ G_2(D)=\gamma\sum_{a\in A_{\min}}D_a+\sum_{a\in A_{av}}D_a+\eta\sum_{a\in A_{\max}}D_a=q_2,\\ q_2=\gamma\sum_{a\in A_{\min}}K_a+\sum_{a\in A_{av}}K_a+\eta\sum_{a\in A_{\max}}K_a-\frac{W_1(2006)}{M^0(2006)}. \end{gathered} \tag{49}$$

Ее решение имеет следующий вид:

$$D_a^*(\nu)=\nu_a\begin{cases} v_*^{\gamma}(\nu), & \text{для } a\in A_{\min},\\ v_*(\nu), & \text{для } a\in A_{av},\\ v_*^{\eta}(\nu), & \text{для } a\in A_{\max}. \end{cases} \tag{50}$$

Здесь $v_*=\exp(-\mu)$ — экспоненциальный множитель Лагранжа, значение которого определяются решением следующго уравнения:

$$\begin{gathered} h(v)=\frac{1}{q_2^{av}(\nu)}\left(v+\gamma R_{\min}(\nu)v^{\gamma}+\eta R_{\max}(\nu)v^{\eta}\right)=1,\\ \eta<\gamma<1, \end{gathered} \tag{51}$$

где

$$q_2^{av}(\nu)=\frac{q_2}{\sum\limits_{a\in Aav}\nu_a}. \tag{52}$$

И наконец, третья задача на условный экстремум имеет два ограничения равенства:

$$H(D)=-\sum_{a\in A}D_a\ln\frac{D_a}{e\nu_a}\leftrightarrow\max, \tag{53}$$

$$\begin{gathered} G_1(D)=\alpha\sum_{a\in A_{\min}}D_a+\sum_{a\in A_{av}}D_a+\\ +\beta\sum_{a\in A_{\max}}D_a=q_1,\\ G_2(D)=\gamma\sum_{a\in A_{\min}}D_a+\sum_{a\in A_{av}}D_a+\\ +\eta\sum_{a\in A_{\max}}D_a=q_2, \end{gathered} \tag{54}$$

Ее решение имеет вид:

$$D_a^*(\nu)=\nu_a\begin{cases} u^{\alpha}(\nu)v^{\gamma}(\nu), & \text{для } a\in A_{\min},\\ u(\nu)\,v(\nu), & \text{для } a\in A_{av},\\ u^{\beta}(\nu)v^{\eta}(\nu), & \text{для } a\in A_{\max}. \end{cases} \tag{55}$$

Экспоненциальные множители Лагранжа u, v определяются решением следующей системы уравнений:

$$\begin{gathered} f(u,v)=\frac{1}{q_1^{av}(\nu)}\left(uv+\alpha R_{\min}(\nu)u^{\alpha}v^{\gamma}+\right.\\ \left.+\beta R_{\max}(\nu)u^{\beta}v^{\eta}\right)=1,\\ h(u,v)=\frac{1}{q_2^{av}(\nu)}\left(uv+\gamma R_{\min}(\nu)u^{\alpha}v^{\gamma}+\right.\\ \left.+\eta R_{\max}(\nu)u^{\beta}v^{\eta}\right)=1,\\ \beta>\alpha>1,\quad \eta<\gamma<1. \end{gathered} \tag{56}$$

Итак, при решении той или иной из перечисленных задач определяется энтропийно-оптимальное распределение умерших $D^*(\nu)$, специфицированное по возрастным группам при заданных внешних и сценарных параметрах и при выбранном векторе априорных вероятностей ν.

Поскольку зависимость $D^*(\nu)$ довольно сложная (определяется решением задач на условный экстремум), минимизацию указанной ошибки целесообразно проводить методом случайного поиска.

Общая структура алгоритма идентификации имеет вид:

шаг 0) ввод внешних и сценарных параметров;

шаг 1) ввод начального вектора ν^0;

шаг 2) определение координат D_a^0 абсолютного максимума (36);

шаг 3) проверка условий (37, 39, 41, 43) и определение типа задачи на условный экстремум;

шаг 4) применение метода случайного поиска для определения вектора ν^1, минимизирующего ошибку ϵ (32);

шаг 4а) на каждом шаге случайного поиска решаются уравнения (47, 51) или (56) в зависимости от типа задачи на условный экстремум. В силу специфики этих уравнений (положительность решений) удобными оказываются мультипликативные алгоритмы следующего вида:

$$u^{s+1} = u^s f^\omega(u^s), \quad v^{s+1} = v^s h^\omega(v^s);$$

$$u^{s+1} = u^s f^\omega(u^s, v^s), \quad v^{s+1} = v^s h^\omega(u^s, v^s);$$

где s — номер итерации, ω — коэффициент шага;

шаг 5) возврат к шагу 0.

Результаты расчета представлены в табл. 3. Согласно проведенным расчетам сценарные параметры модели (33) равны $\alpha = 2{,}0$; $\beta = 3{,}0$; $\gamma = 0{,}5$; $\eta = 0{,}25$, а значения априорных вероятностей приведены в табл. 3.

Теперь воспользуемся данной моделью для прогнозирования возрастного распределения умерших в 2008 г. Необходимые для расчета данные приведены в табл. 4, значения внешних парметров приведены в колонке «2008» в табл. 1.

Ошибку между реальным и прогнозируемым распределением определим по формуле, аналогичной (31)

$$\varepsilon_{pr} = \frac{\|D_r(a, 2008) - D(a, 2008)\|}{\|D_r(a, 2008)\| + \|D(a, 2008)\|}. \tag{57}$$

Величина ошибки прогноза указана в табл. 4 и составляет 11 %.

Таблица 4

Прогноз распределения $D(a, 2008)$

№	Группа	$K_r(a, 2008)$	$D_r(a, 2008)$	$D(a, 2008)$
0	0 – 0	1 598 051	14 750	9321
1	1 – 4	5 850 956	3440	3876
2	5 – 9	6 481 478	2050	1897
3	10 – 14	6 893 736	2650	2098
4	15 – 19	10 206 862	11 469	10 987
5	20 – 24	12 764 030	26 009	25 987
6	25 – 29	11 475 294	39 234	38 098
7	30 – 34	10 492 913	47 129	48 087
8	35 – 39	9 702 459	51 876	52 876
9	40 – 44	9 804 060	72 109	72 989
10	45 – 49	11 954 654	115 001	116 432
11	50 – 54	10 947 652	143 327	144 065
12	55 – 59	9 349 536	164 239	163 987
13	60 – 64	4 898 103	110 567	110 054
14	65 – 69	6 601 783	233 002	234 765
15	70 – 74	5 198 430	236 123	237 876
16	75 – 79	4 213 458	315 498	316 123
17	80 – 84	2 505 423	262 769	263 432
–	ε	–	–	0,11

Заключение

Показатели процесса смертности — общий (TMR) и специфицированный по возрасту (ASMR) коэффициенты смертности — рассматриваются как макропараметры многочисленных индивидуальных случайных и независимых событий, храктеризуемых априорными вероятностями. Генерируется множество этих макропараметров и определяется функция распределения вероятностей на этом множестве и энтропия. Указанные вероятностные характеристики при достаточно большом объеме множества элементарных событий имеют «острый» максимум, что позволяет постулировать реализуемость единственного макропараметра, максимизирующего энтропию. В данном случае макропараметром является специфицированный по возрасту коэффициент смертности, максимизирующий энтропию при ограниченных ресурсах. Энтропийно-оптимальное распределение по возрасту коэффициента смертности зависит от вероятностных характеристик реализации элементарных событий (индивидуальных смертей), а именно от априорных вероятностей реализации этих событий. Предлагается восстанавливать их по ретроспективным данным и использовать получаемые оценки для среднесрочного (2–3 года) прогнозирования.

Литература

1. *Орлова И. В.* Смертность в современной России: характер и особенности // Сайт ИСПИ РАН, [Электронный ресурс] http://www.ispr.ru/BIBLIO/JOURNAL/Science/journal109.html.
2. *Jozan P.* Some features of mortality in the member states of the ECE // Paper at the Regional Population Meeting, 7–10 Dec. 1998, Budapest, Hungary.
3. *Hilderink H.* World population in Transition, An Integrated Regional Modelling Framework // Phd Thesis, Groningen, Holland, 2000.
4. *Hoorn van Wim*, *Broekman R.* Uniformity and Diversity Scenarios for Mortality // European Studies of Population, Kluwer Academic Publishers, 1999. V. 7. P. 71–90.
5. *Mackenbach J. P.* Inequalities in health in The Netherlands according to age, gender, maritual status, level of education, degree of urbanisation, and region // European Journal of Public Health. V. 3. № 2. P. 112–118.
6. *Omran A. R.* The epidemiologic Transition: A theory of the epidemiology of population change // The Millbank Memorial Fund Quarterly. V. 49. № 4. P. 509–538.
7. *Olshansky S. J.*, *Ault A. B.* The fourth stage of the epidemiologic transition: The age of delayed degenerative diseases // The Millbank Memorial Fund Quarterly. V. 64(3). P. 353–391.
8. *Spijker J. J. A.*, *Tabeua E.*, *van der Veen W. J.* Regional differences in cause-specific mortality in eleven European countries in 1990–1991 // Working Paper № 1998/4, Hague, Netherlands, NIDI.
9. *Tabeau E.* Human longevity in the future: The Dutch perspective // Working paper № 1996/2, Hague, Netherlands: NIDI.
10. *van der Veen W. J.* Regional Mortality Differences in Belgium, Germany, and The Netherlands // Demographic report 18. Faculty of Spatial Sciences, University of Groningen, 1994, Netherlands.
11. *Молчанов В. А.*, *Михальский А. И.* Оценка динамики факторов риска методом динамической регрессии // Автоматика и телемеханика. 2008. № 1. С. 135–151.
12. *Popov Yu. S.* Macrosystems Theory and Applications. Lecture Notes in Control and Information Sciences 203, Springer, 1995, London.
13. *Manton K. G.*, *Vaupel J. W.* Survival after the age of 80 in the United States, Sweden, France, England and Japan // New England Journal of Medicine. 1995. V. 333. P. 1232–1235.
14. *Zeng Yi*, *Gu D.*, *Land K. C.* A New Method for Correcting Underestimation of Disabled Life Expectancy and Application to Chinese Oldest-Old // Demography. 2004. V. 42, № 2, P. 453–465.
15. *Yashin A. I.*, *Cypser J. R.*, *Johnson T. E.*, *Michalski A. I.*, *Boyko S. I.*, *Novoseltsev V. N.* Ageing and survival after different doses of heat shock: the results of analysis of data from stress experiments with the nematode worm Caenorhabditis elegans // Mechanisms of Ageing and Development. Elsevier. 2001. V. 122. P. 1477–1495.
16. *Anisimov V. N.*, *Alimova I. N.*, *Baturin D. A.*, *Popovich I. G.*, *Zabezhinski M. A.*, *Manton K. G.*, *Semenchenko A. V.*, *Yashin A. I.* The effect of melatonin treatment regimen on mammary adenocarcinoma development in HER-2/neu transgenic mice // Int. J. Cancer. 2003. V. 103, ser. 3. 300–305.
17. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967.
18. *Попков Ю. С.* Теория макросистем. М.: URSS, 1999

Попков Юрий Соломонович. Д. т. н., директор ИСА РАН, профессор. Окончил МЭИ в 1960 г. Количество печатных работ: 151. Область научных интересов: системный анализ, математическое моделирование.
E-mail: popkov@isa.ru