Комбинаторика гладких продолжений и законы дистрибутивности

В. И. Рабовер

Аннотация. В некоторых задачах редукции нелинейных систем применяются комбинаторные конструкции гладкого продолжения функций многих переменных [1]. С алгебраической точки зрения, комбинаторика продолжений есть комбинаторика расположений идеалов в кольце функций. В работе показано, что свойства этих расположений напрямую связаны со свойствами бинарных операций с идеалами.

Ключевые слова: *продолжение функций, идеалы функций, законы дистрибутивности.*

Введение

Идеалы в произвольном коммутативном кольце можно складывать и пересекать. Эти две операции, вообще говоря, не подчиняются закону дистрибутивности (выполняется лишь более слабый закон модулярности). Тем не менее, в кольцах гладких функций, для идеалов, состоящих из так называемых «плоских» функций (функций, равных на некотором множестве нулю вместе со всеми производными), закон дистрибутивности все-таки выполняется. Этот факт оказался (довольно неожиданно) тесно связан с теорией гладких продолжений, развитой в [1]. Выяснению этой связи (и обоснованию самой дистрибутивности) посвящена эта работа. Необходимые общие сведения из алгебры и анализа можно найти, например, в [2, 3].

1. Идеалы в коммутативных кольцах

Нас в основном будет интересовать алгебра $\mathcal{A} = C^s_V$ — алгебра функций $V \to \mathrm{R}$ класса C^s $(s \geqslant 0)$ на открытом множестве $V \subset \mathrm{R}^n$, однако содержание пп. 2–4 относится и к произвольному коммутативному кольцу $\mathcal{A}$ с единицей.

Напомним, что *идеал* в $\mathcal{A}$ это множество $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$, такое что

$$0 \in \mathcal{J}, \quad \mathcal{J} - \mathcal{J} \subset \mathcal{J}, \quad \mathcal{A}\mathcal{J} \subset \mathcal{J}.$$

Любые конечные суммы и любые пересечения идеалов суть идеалы. Идеал, *порожденный* данным множеством $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ есть пересечение всех идеалов, содержащих $\mathcal{B}$. Идеал, порожденный одним элементом $\alpha \in \mathcal{A}$, называется *главным* и равен $\mathcal{A}\alpha$.

Идеал $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$ задает разбиение $\mathcal{A}$ на классы вычетов, т. е. на множества $\alpha + \mathcal{J}$, где $\alpha \in \mathcal{A}$. Элементы $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ принадлежат одному классу, если и только если $\alpha - \beta \in \mathcal{J}$, что записывают также в виде $\alpha \equiv \beta \bmod \mathcal{J}$ (и говорят, что α, β сравнимы по модулю $\mathcal{J}$).

Классы $(\alpha_1 + \mathcal{J}_1)$, $(\alpha_2 + \mathcal{J}_2)$ пересекаются, если и только если

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \bmod (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2).$$

При этом пересечение есть класс $\alpha + \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$, где α — любой общий элемент классов.

2. Строгие и дистрибутивные тройки идеалов

Тройку идеалов $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3 \subset \mathcal{A}$ назовем *строгой*, если для любых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathcal{A}$, из попарного пересечения классов

$$(\alpha_1 + \mathcal{J}_1), \quad (\alpha_2 + \mathcal{J}_2), \quad (\alpha_3 + \mathcal{J}_3)$$

следует пересечение всей тройки классов.

Тройку идеалов $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3 \subset \mathcal{A}$ назовем *дистрибутивной*, если выполнены 2 условия (для любых разных i, j, k):

$$\text{Д1:} \quad \mathcal{J}_i + (\mathcal{J}_j \cap \mathcal{J}_k) = (\mathcal{J}_i + \mathcal{J}_j) \cap (\mathcal{J}_i + \mathcal{J}_k);$$

$$\text{Д2:} \quad \mathcal{J}_i \cap (\mathcal{J}_j + \mathcal{J}_k) = (\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_j) + (\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_k).$$

(Здесь на самом деле важно включение $\supset$ в условии Д1 и включение $\subset$ в условии Д2. Остальные 2 включения тривиально выполнены всегда.)

Пример недистрибутивной тройки идеалов (в алгебре гладких функций) будет приведен ниже.

3. Китайская теорема

Следующий результат показывает, что строгая тройка и дистрибутивная тройка это одно и то же. Близкое к этому утверждение под названием «китайская теорема» сформулировано в книге Бурбаки [4] в качестве упражнения.

Теорема 1. *Строгость тройки идеалов* $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3 \subset \mathcal{A}$ *равносильна ее дистрибутивности. Точнее, имеют место импликации*

$$\text{Д2} \Leftrightarrow \text{С} \Rightarrow \text{Д1},$$

где С — *условие строгости.*

Доказательство. С $\Rightarrow$ Д1. Пусть тройка $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$ — строгая. Покажем, что любое $\alpha \in (\mathcal{J}_i+\mathcal{J}_j)\cap(\mathcal{J}_i+\mathcal{J}_k)$ лежит в $\mathcal{J}_i+(\mathcal{J}_j\cap\mathcal{J}_k)$. Рассмотрим 3 класса: $(\alpha+\mathcal{J}_i)$, $\mathcal{J}_j$, $\mathcal{J}_k$. Они попарно пересекаются (ij — поскольку $\alpha \in \mathcal{J}_i + \mathcal{J}_j$; ik — поскольку $\alpha \in \mathcal{J}_i + \mathcal{J}_k$; jk — поскольку 0 лежит в обоих классах). Поэтому, ввиду строгости, пересечение

$$\Gamma = (\alpha + \mathcal{J}_i) \cap \mathcal{J}_j \cap \mathcal{J}_k$$

непусто. Возьмем какое-то $\gamma \in \Gamma$, тогда $\gamma = \alpha + \alpha_i$ (где $\alpha_i \in \mathcal{J}_i$), откуда

$$\alpha = -\alpha_i + \gamma \in \mathcal{J}_i + (\mathcal{J}_j \cap \mathcal{J}_k),$$

что и требовалось.

С $\Rightarrow$ Д2. Пусть тройка $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$ — строгая. Покажем, что любое $\alpha\in\mathcal{J}_i\cap(\mathcal{J}_j+\mathcal{J}_k)$ лежит в $(\mathcal{J}_i\cap\mathcal{J}_j)+$ $+(\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_k)$. Рассмотрим 3 класса: $\mathcal{J}_i$, $\mathcal{J}_j$, $(\alpha + \mathcal{J}_k)$. Они попарно пересекаются (ij — поскольку 0 лежит в обоих классах; ik — поскольку α лежит в обоих классах; jk — поскольку $\alpha \in \mathcal{J}_j + \mathcal{J}_k$). Поэтому, ввиду строгости, пересечение

$$\Gamma = \mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_j \cap (\alpha + \mathcal{J}_k)$$

непусто. Возьмем какое-то $\gamma \in \Gamma$, тогда $\gamma = \alpha + \alpha_k$ (где $\alpha_k \in \mathcal{J}_k$). При этом $\alpha_k\in\mathcal{J}_i$ (поскольку $\gamma,\alpha\in\mathcal{J}_i$). Таким образом,

$$\alpha = \gamma - \alpha_k \in (\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_j) + (\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_k),$$

что и требуется.

Д2 $\Rightarrow$ С. Пусть тройка $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$ удовлетворяет условию Д2. Возьмем 3 класса $(\alpha_1 + \mathcal{J}_1)$, $(\alpha_2 + \mathcal{J}_2)$, $(\alpha_3 + \mathcal{J}_3)$ с непустыми попарными пересечениями $\Gamma_{12}, \Gamma_{23}, \Gamma_{13}$, и покажем, что общее пересечение Γ_{123} непусто. Для этого мы возьмем 2 элемента $\alpha_{12} \in \Gamma_{12}$, $\alpha_{13} \in \Gamma_{13}$, и покажем, что пересечение

$$\Gamma = (\alpha_{12} + \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2) \cap (\alpha_{13} + \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_3)$$

непусто. (Это как раз то, что нужно, поскольку

$$\Gamma = (\alpha_1+\mathcal{J}_1)\cap(\alpha_2+\mathcal{J}_2)\cap(\alpha_1+\mathcal{J}_1)\cap(\alpha_3+\mathcal{J}_3) = \Gamma_{123}.)$$

Заметим, что $\alpha_{12}-\alpha_{13} \in \mathcal{J}_1$ (поскольку $\alpha_{12}, \alpha_{13} \in$ $\in (\alpha_1 + \mathcal{J}_1)$). С другой стороны, $\alpha_{12} - \alpha_{13} \in \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3$ (поскольку α_{12}, α_{13} — представители 2-х пересекающихся классов по идеалам $\mathcal{J}_2$ и $\mathcal{J}_3$). В итоге, с учетом условия Д2, имеем

$$\alpha_{12} - \alpha_{13} \in \mathcal{J}_1 \cap (\mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3) = (\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2) + (\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_3).$$

По критерию пересечения классов это и означает, что Γ непусто. □

4. Плоские функции

Пусть $\mathcal{A} = C^s_V$ — алгебра C^s-функций $V \to \mathrm{R}$ в открытом $V \subset \mathrm{R}^n$. Напомним некоторые понятия из [1]. Функция $f \in \mathcal{A}$ называется *s-плоской* на множестве $A \subset V$, если все ее частные производные порядка $0, \ldots, s$ обращаются в 0 на A. Функции $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ *s-касаются* на множестве $A \subset V$, если на множестве A они имеют одинаковые значения всех частных производных порядка $0, \ldots, s$ (т. е. если разность $f_1 - f_2$ — s-плоская на A).

Для любого замкнутого подмножества $A \subset V$ через $\mathcal{J}_A \subset \mathcal{A}$ мы обозначаем идеал функций, s-плоских на A. Идеалы $\mathcal{J}_A \subset \mathcal{A}$ находятся в биективном соответствии с замкнутыми подмножествами $A \subset V$, причем

$$A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{J}_A \supset \mathcal{J}_B,$$
$$\mathcal{J}_{A\cup B} = \mathcal{J}_A \cap \mathcal{J}_B,$$
$$\mathcal{J}_{A\cap B} \supset \mathcal{J}_A + \mathcal{J}_B.$$

Заметим, что в терминах идеалов s-касание функций $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ на замкнутом множестве $A \subset V$ равносильно сравнению

$$f_1 \equiv f_2 \bmod \mathcal{J}_A.$$

5. Циклы и касания

Пусть по прежнему $\mathcal{A} = C^s_V$ — алгебра C^s-функций $V \to \mathrm{R}$ на открытом множестве $V \subset \mathrm{R}^n$. Следуя [1], мы называем тройку замкнутых подмножеств $A_1, A_2, A_3 \subset V$ *регулярной* (в классе C^s), если для любых функций $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{A}$, таких что каждая пара f_i, f_j s-касается на $A_i \cap A_j$, найдется функция $f \in$ $\mathcal{A}$, которая на каждом A_i s-касается f_i. В терминах идеалов это означает что: для любых $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{A}$, таких что $f_i \equiv f_j \bmod \mathcal{J}_{A_i\cap A_j}$, найдется $f \in \mathcal{A}$, такое что $f \equiv f_i \bmod \mathcal{J}_{A_i} \forall\, i$.

Тройку множеств A_1, A_2, A_3 мы называем *цикличной*, если каждое из них покрыто двумя другими,

$$A_i \subset A_j \cup A_k$$

(для любых разных i, j, k). Следующее утверждение («теорема о цикле») доказано в [1].

Теорема 2. *Всякая цикличная тройка замкнутых подмножеств $A_1, A_2, A_3 \subset V$ открытого множества $V \subset \mathrm{R}^n$ регулярна (в любом классе C^s).*

Как мы увидим ниже, этот факт оказывается (довольно неожиданно) напрямую связан с дистрибутивностью троек идеалов.

6. Дистрибутивность и идеалы функций

Свойство дистрибутивности для идеалов, как уже отмечалось, выполняется далеко не всегда. Примеры недистрибутивных троек идеалов можно указать в кольцах полиномов от нескольких переменных, кольцах гладких функций и в других ситуациях. Тем не менее, в алгебре C^s_V (алгебре C^s-функций на открытом $V \subset \mathrm{R}^n$) можно выделить класс идеалов, для которых дистрибутивность имет место всегда. Это идеалы плоских функций из п. 5; соответствующее утверждение («теорема о дистрибутивности») доказано в следующем п. 7, а здесь мы приведем пример недистрибутивной тройки идеалов. (Это тоже будут идеалы гладких функций, но не состоящие из плоских функций.)

Пример. Пусть $U \subset \mathrm{R}^2$ — открытое множество, содержащее начало координат $O = (0, 0)$. В алгебре C^1_U (алгебре C^1-функций $U \to \mathrm{R}$) рассмотрим 3 главных идеала, порожденных соответственно функциями x, y, $x+y$. Обознчим эти идеалы $\mathcal{J}_x$, $\mathcal{J}_y$, $\mathcal{J}_{x+y}$. Тогда

$$(\mathcal{J}_x + \mathcal{J}_y) \cap \mathcal{J}_{x+y} \not\subset \mathcal{J}_x \cap \mathcal{J}_{x+y} + \mathcal{J}_y \cap \mathcal{J}_{x+y}$$

(и значит тройка идеалов недистрибутивна).

Доказательство. Мы покажем, что функция $x + y$ из левой части не представима в виде суммы из правой части. Предположим противное. Тогда для некоторых функций $f, g, h \in C^1_U$ верно

А) $x + y = xf + yg$;

Б) $x + y = xf + (x + y)h$.

Значения f, g, h в точке O обозначим f_0, g_0, h_0. Возьмем частную производную от А по x в точке O, получим $f_0 = 1$. Далее, возьмем частную производную от Б по y в точке O, получим $h_0 = 1$. Наконец, беря частную производную от Б по x в точке O, мы получим $f_0 + h_0 = 1$, что невозможно, ибо f_0 и h_0 равны 1. □

Замечание. Идеалы $\mathcal{J}_x$, $\mathcal{J}_y$, $\mathcal{J}_{x+y}$, заведомо не состоят из одних плоских функций. Например, функции $x \in \mathcal{J}_x$, $y \in \mathcal{J}_y$, $x + y \in \mathcal{J}_{x+y}$ — нигде не 1-плоские.

7. Теорема о дистрибутивности

Пусть $\mathcal{A} = C^s_V$ — алгебра C^s-функций на открытом множестве $V \subset \mathrm{R}^n$.

Теорема 3. *Для любых замкнутых подмножеств $A_1, A_2, A_3 \subset V$ тройка идеалов $\mathcal{J}_{A_1}, \mathcal{J}_{A_2}, \mathcal{J}_{A_3} \subset \mathcal{A}$ дистрибутивна.*

Эта теорема и теорема о цикле из п. 5, внешне весьма далекие утверждения, оказываются связанными самым непосредственным образом. Как показывает приводимое ниже доказательство, это просто 2 равносильных утверждения. (Для краткости мы обозначаем их ТД и ТЦ — «теорема о дистрибутивности» и «теорема о цикле».)

Доказательство. ТЦ $\Rightarrow$ ТД. Вместо дистрибутивности тройки $\mathcal{J}_{A_1}$, $\mathcal{J}_{A_2}$, $\mathcal{J}_{A_3}$ мы будем доказывать ее строгость (ввиду китайской теоремы из п. 3, это одно и то же). Пусть какие-то три класса

$$(f_1 + \mathcal{J}_{A_1}), \quad (f_2 + \mathcal{J}_{A_2}), \quad (f_3 + \mathcal{J}_{A_3})$$

попарно пересекаются, скажем в точках f_{12}, f_{13}, f_{23}. Покажем, что эти классы имеют общую точку пересечения. Каждая функция f_{ij} касается f_i на A_i и касается f_j на A_j. Рассмотрим цикл A_{12}, A_{13}, A_{23}, из объединений $A_{ij} = A_i \cup A_j$. (Тройка парных объединений всегда образует цикл.)

Покажем, что на каждом пересечении

$$A_{ij} \cap A_{ik} = A_i \cup (A_j \cap A_k)$$

функции f_{ij}, f_{ik} касаются. На множестве A_i это действительно так, ибо обе функции касаются f_i. На пересечении $A_j \cap A_k$ это тоже верно, поскольку здесь касаются сами функции f_j, f_k. (В самом деле, ввиду пересечения классов, $f_j - f_k \in \mathcal{J}_{A_j} + \mathcal{J}_{A_k}$, а эта сумма идеалов лежит в идеале $\mathcal{J}_{A_j \cap A_k}$, в итоге

$$f_j \equiv f_k \bmod \mathcal{J}_{A_j \cap A_k},$$

что и означает касание.) Таким образом, касание функций f_{ij} на пересечениях множеств A_{ij} установлено.

В этих условиях, согласно ТЦ, найдется функция f, которая на каждом A_{ij} касается f_{ij}. Тем самым, эта функция f на каждом A_i касается f_i, и значит f принадлежит всем 3-м исходным классам.

ТД $\Rightarrow$ ТЦ. Пусть задан цикл из замкнутых подмножеств $A_1, A_2, A_3 \subset V$ и функции $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{A}$, которые касаются на пересечениях:

$$f_i \equiv f_j \bmod \mathcal{J}_{A_i \cap A_j}.$$

Надо указать функцию $f \in \mathcal{A}$, такую что

$$f \equiv f_i \bmod \mathcal{J}_{A_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Возьмем тройку множеств B_1, B_2, B_3, где $B_i = A_j \cap A_k$ (для разных i, j, k). Тройка идеалов $\mathcal{J}_{B_1}, \mathcal{J}_{B_2}, \mathcal{J}_{B_3} \subset \mathcal{A}$, согласно ТД, дистрибутивна, и значит (по китайской теореме) строгая. Рассмотрим 3 класса

$$(f_1 + \mathcal{J}_{B_3}), \quad (f_2 + \mathcal{J}_{B_1}), \quad (f_3 + \mathcal{J}_{B_2}).$$

Заметим, что для любых разных i, j, k

$$f_i - f_j \in \mathcal{J}_{B_k} \subset \mathcal{J}_{B_k} + \mathcal{J}_{B_i}.$$

Это означает, что указанные 3 класса попарно пересекаются. Но тогда, в силу строгости, они имеют общий элемент f:

$$f \equiv f_1 \bmod \mathcal{J}_{B_3},$$
$$f \equiv f_2 \bmod \mathcal{J}_{B_1},$$
$$f \equiv f_3 \bmod \mathcal{J}_{B_2}.$$

Это и будет искомое f. В самом деле, условие цикличности $A_i \subset A_j \cup A_k$ равносильно условию

$$A_i = (A_i \cap A_j) \cup (A_i \cap A_k).$$

Таким образом,

$$A_i = B_j \cup B_k,$$

и значит

$$\mathcal{J}_{A_i} = \mathcal{J}_{B_j} \cap \mathcal{J}_{B_k}.$$

Искомые касания $f \equiv f_i \bmod \mathcal{J}_{A_i}$ теперь следуют из того, что для любых разных i, j, k выполнено $f \equiv f_i \equiv f_j \bmod \mathcal{J}_{B_k}$. □

Литература

1. *Рабовер В. И.* Идеалы плоских функций и гладкие продолжения // Труды ИСА РАН. Динамика неоднородных систем. М.: Поли Принт Сервис, 2009.
2. *Нарасимхан Р.* Анализ на действительных и комплексных многообразиях. М.: Мир, 1971.
3. *Атья М.*, *Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру. М.: Мир, 1972.
4. *Бурбаки Н.* Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы. М.: Наука, 1965.

Рабовер Владимир Ильич. Н. с. ИСА РАН, к. ф.-м. н. Окончил МФТИ в 1977 г. Кол-во печатных работ: 20 Область научных интересов: нелинейный анализ и теория управления.
E-mail: golvic@isa.ru