

Исследование перехода к турбулентности в двумерной каверне с движущейся крышкой

О. И. РЯБКОВ

Аннотация. В работе изучены начальные стадии перехода к турбулентности в двумерной задаче о течении в каверне с движущейся крышкой. Обнаружена бифуркация Андронова—Хопфа рождения цикла, что совпадает с первой стадией сценария Ландау—Хопфа и не противоречит обобщенному ФШМ-сценарию перехода к хаосу ([14]). В качестве самого значительного результата работы можно указать нахождение сравнительно простого чисто проекционного метода решения несжимаемых уравнений Навье—Стокса (НС), который позволяет с хорошей точностью аппроксимировать нестационарные аттракторы системы (не всякий метод обладает указанным свойством, см., например, [9]). В то же время такой метод может быть (в отличие от таких методов как SIMPLE и PISO, см. [5]) прозрачно распространен на уравнения несжимаемой магнитной гидродинамики ([4]). Данную работу можно рассматривать как промежуточный шаг на пути к построению метода, способного аппроксимировать нестационарные аттракторы в уравнениях несжимаемой МГД. Расчеты частично проводились на вычислительном комплексе IBM Blue Gene/P факультета ВМК МГУ.

Ключевые слова: система уравнений Навье—Стокса, турбулентность, хаос, бифуркация Андронова—Хопфа, каверна с движущейся крышкой, сценарий Ландау—Хопфа, сценарий ФШМ.

Введение

В работах [9] и [10] были представлены численные результаты, подтвердившие, что начальные стадии перехода от ламинарного режима течения к турбулентному при изменении безразмерных параметров задач гидродинамики (числа Рейнольдса, Прандтля, Релея) — это возникновение нестационарных аттракторов (циклов и торов различных размерностей) в результате различных бифуркаций (Андронова—Хопфа, удвоения периода, седло-узловой). В данных работах были рассмотрены трехмерное течение с уступа и конвекция Релея—Бенара. В первой из указанных задач были обнаружены три бифуркации Андронова—Хопфа, в результате которых последовательно в фазовом пространстве образовались цикл, двумерный тор и трехмерный тор. Во второй задаче после второй бифуркации Андронова—Хопфа и образования двумерного тора произошла бифуркация удвоения периода тора. В целом данные результаты укладываются в обобщенный сценарий перехода к динамическому хаосу, изложенный в [14]. В частности, в задаче с уступом обнаруженные бифуркации могут быть началом реализации сценария Ландау—Хопфа ([7, 11]).

Целью данной работы является изучение начальных стадий перехода к турбулентности в двумерной задаче о течении в каверне с движущейся крышкой (см. разд. 1).

1. Постановка задачи

Рассматривается течение вязкой несжимаемой нетеплопроводной жидкости, описываемой уравнениями Навье—Стокса (см., например, [2, 6, 9]) — в безразмерной форме, а также [13]):

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}, \quad \text{для } i = 1 \dots 2, \\ \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

где по индексу j подразумевается суммирование от 1 до 2. Здесь $V = (v_1, v_2)$ — вектор скорости течения жидкости, а p — давление. Геометрия рассматриваемой задачи — двумерная квадратная (размером 1×1) область (см. рис. 1). С трех сторон область считается ограниченной твердыми стенками с условием непротекания (noslip), которое обычно выбирается для вязкой жидкости. С четвертой стороны

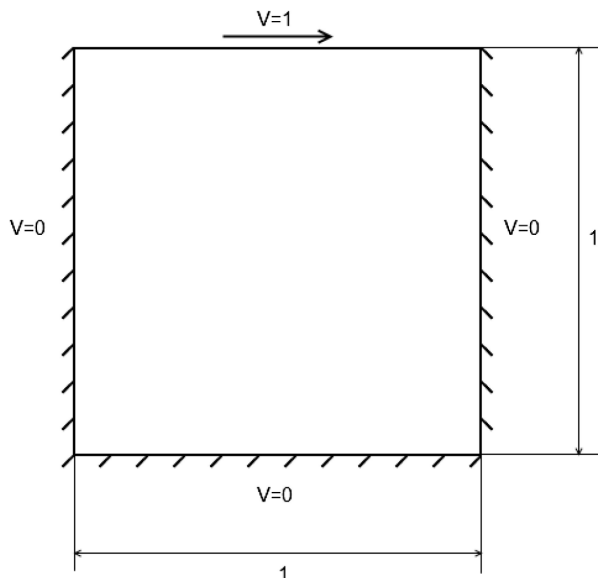


Рис. 1. Геометрия задачи и краевые условия

область примыкает к потоку единичной скорости. Таким образом, на всех границах скорость задается условием Дирихле. На давление ставится однородное условие Неймана. Более подробно о постановке задачи см. [6].

В качестве бифуркационного параметра рассматривается безразмерный комплекс Re (число Рейнольдса).

2. Схема численного решения

Численный метод для решения системы уравнений НС практически целиком взят из работ [2] и [3]. Задача решалась на равномерной регулярной не «шахматной» сетке. Последнее свойство подразумевает, что величины и скоростей, и давления рассматриваются в центрах контрольных объемов, в отличие от «шахматной» сетки, где значения для давления берутся в центрах ячеек, а для скоростей — на гранях. «Шахматная» сетка (staggered grid) применяется для борьбы с «шахматностью» в давлении ([3] и ссылки), однако на данный момент нами не обнаружено способа увеличения порядка аппроксимации в данном подходе. Поскольку исследования нестационарных аттракторов как правило (в особенности в случае трехмерных задач, см. [9]) требуют методов повышенного порядка, нами был выбран метод с не «шахматной» сеткой, как потенциально более гибкий и пригодный для построения на его основе метода высокого порядка. Тем не менее, в данной работе этот метод брался в том виде, в котором он дан в [2], т. е. со вторым порядком точности по пространству и фактически первым порядком точности

по времени. Дело в том, что в случае не «шахматной» сетки для борьбы с «шахматностью» в давлении в дискретное уравнение неразрывности добавляется дополнительный член, который обеспечивает лучшую «меру эллиптичности» получаемого дискретного уравнения Пуассона (см. [1] и [8]). Этот дополнительный член имеет порядок $\Delta t \Delta x^2$, где Δt — шаг по времени, Δx — шаг по пространству. В [8] данная методика интерпретируется как особенный способ интерполяции значения скорости на грани ячеек перед ее подстановкой в уравнение неразрывности. Поскольку теория «меры эллиптичности» и способов ее увеличения подробно изложена в [1], мы предположили, что потенциально имеется возможность построения метода коррекции давления на не «шахматной» сетке с более высоким порядком точности. Это определило наше предпочтение методу на не «шахматной» сетке с точки зрения возможности его распространения на уравнения несжимаемой МГД и увеличения порядка аппроксимации.

В целом, схема выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{V^* - V^n}{\Delta t} + \left[\frac{3}{2} \nabla_h \cdot (V^n V^n) - \frac{1}{2} \nabla_h \cdot (V^{n-1} V^{n-1}) \right] = \\ = -\nabla_h p^{n+1} + \frac{1}{2Re} \Delta_h (V^* + V^n), \\ \Delta_h p_c = \frac{1}{\Delta t} DV^*, \\ V^{n+1} = V^* - \Delta t \nabla_h p_c, \end{aligned} \tag{2}$$

где сеточный оператор D над сеточным векторным полем $U^{i,j} = (u_1^{i,j}, u_2^{i,j})$ определен как

$$\begin{aligned} (DU)^{i,j} &= \frac{u_1^{i+1/2,j} - u_1^{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{u_2^{i,j+1/2} - u_2^{i,j-1/2}}{\Delta x}, \\ u_1^{i+1/2,j} &= \frac{u_1^{i+1,j} + u_1^{i,j}}{2} + R^{i+1/2,j}, \\ u_2^{i,j+1/2} &= \frac{u_2^{i,j+1} + u_2^{i,j}}{2} + R^{i,j+1/2}, \\ R^{i+1/2,j} &= \Delta t \left[\frac{p^{i+2,j} - p^{i,j}}{2\Delta x} + \frac{p^{i+1,j} - p^{i-1,j}}{2\Delta x} \right] - \Delta t \left[\frac{p^{i+1,j} - p^{i,j}}{\Delta x} \right], \\ R^{i,j+1/2} &= \Delta t \left[\frac{p^{i,j+2} - p^{i,j}}{2\Delta x} + \frac{p^{i,j+1} - p^{i,j-1}}{2\Delta x} \right] - \Delta t \left[\frac{p^{i,j+1} - p^{i,j}}{\Delta x} \right]. \end{aligned} \tag{3}$$

В [2] схема (2) используется итерационно. На первой итерации p^{n+1} полагается равным p^n , после нахождения p_c текущее значение p^{n+1} изменяется на величину p_c . Затем проверяется значение дискретной L_2 -нормы оператора DV (который называется модифицированным дивергентом). Если это значение меньше некоторой пороговой величины ϵ

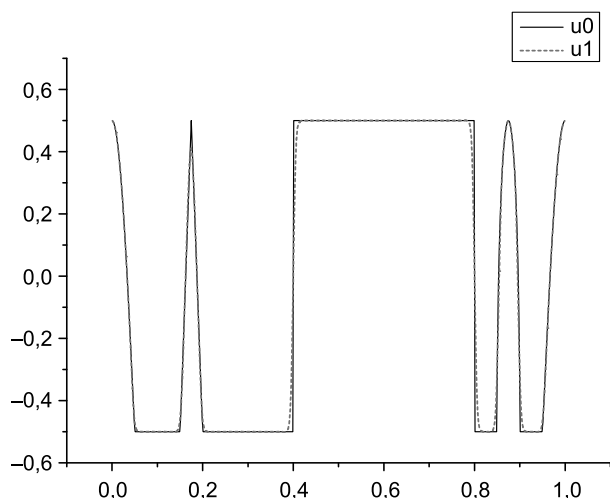


Рис. 2. Решение задачи о переносе: u_0 — точное решение, u_1 — численный результат

текущий шаг по времени завершается. В противном случае итерация повторяется с последними найденными значениями p^{n+1} . В работе [3] было предложено использовать в качестве начального приближения для p^{n+1} величину $2p^n - p^{n-1}$ (т. е. линейную интерполяцию с предыдущих двух шагов), что увеличивает порядок аппроксимации по времени на этапе проекции со второго до третьего. Этот прием был нами использован, хотя суммарный порядок аппроксимации в данной схеме остается первым из-за наличия дополнительных членов в уравнении неразрывности.

В данной схеме для изменения конвекции по времени используется двушаговый метод Адамса—Башфорта, для диффузии — метод Кранка—Нильсона. Для пространственной аппроксимации конвективной части использовалась противопоточная схема с WENO5-реконструкцией (см. например, [4]), а для пространственной аппроксимации диффузионной части — крестообразный шаблон с четвертым порядком точности (5 точек в каждом направлении).

3. Верификация метода

Важным этапом численного исследования является верификация метода на известных задачах. В качестве таковых нами были использованы: задача переноса профиля с различными типами разрывов для тестирования решения конвективной части, задача на двумерное ламинарное течение между пластинами (течение Пуазейля, [12]) для тестирования решения уравнений НС, а также ламинарные режимы в задаче о каверне с движущейся крышкой ([6]).

На рис. 2 изображено решение задачи о переносе профиля вправо на сетке с 500 точками с использованием WENO-5 реконструкции. Задача имеет периодические граничные условия и время счета (количество шагов по времени) таково, что точное решение за это время переносится на один размер области и совпадает с начальными условиями. Поэтому на рис. 2 можно наблюдать отличие между точным решением (которое совпадает с начальными данными) и численным решением. Число Куранта в расчете равно 0,5 (т. е. за два шага происходит перенос на одну ячейку). Интегрирование по времени — метод Эйлера.

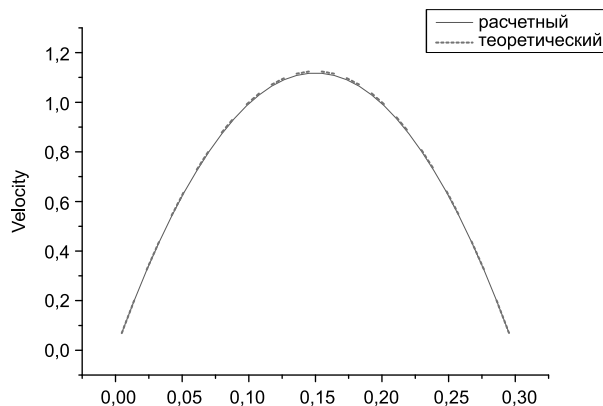


Рис. 4. Течение Пуазейля — профиль скоростей (расчетный и теоретический)

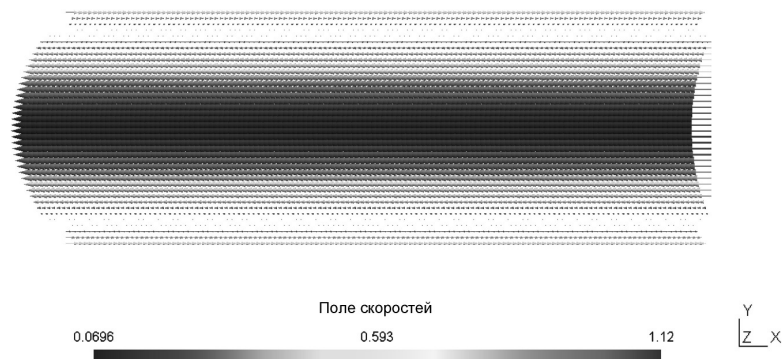


Рис. 3. Течение Пуазейля — поле скоростей

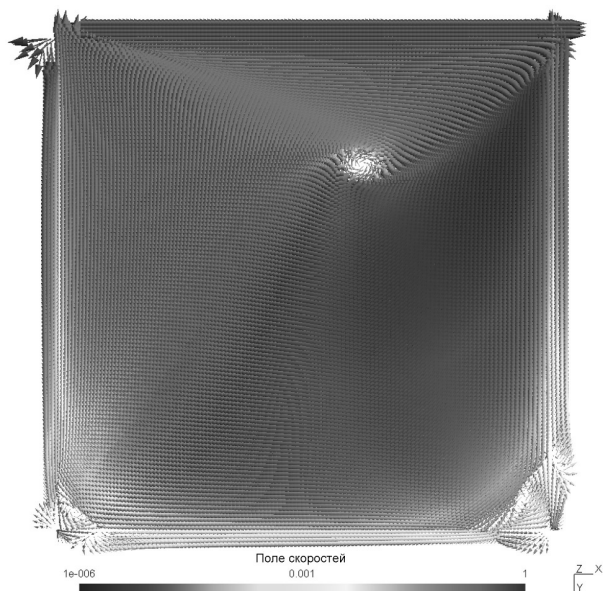


Рис. 5. Течение в каверне при $Re=100$ — поле скоростей

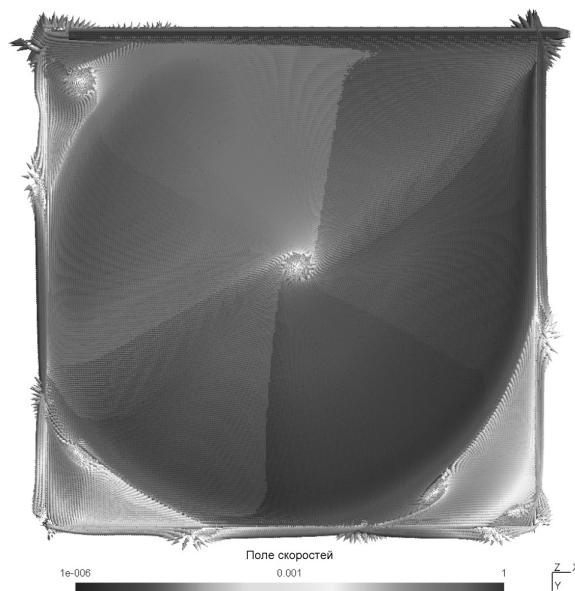


Рис. 7. Течение в каверне при $Re=7500$ — поле скоростей

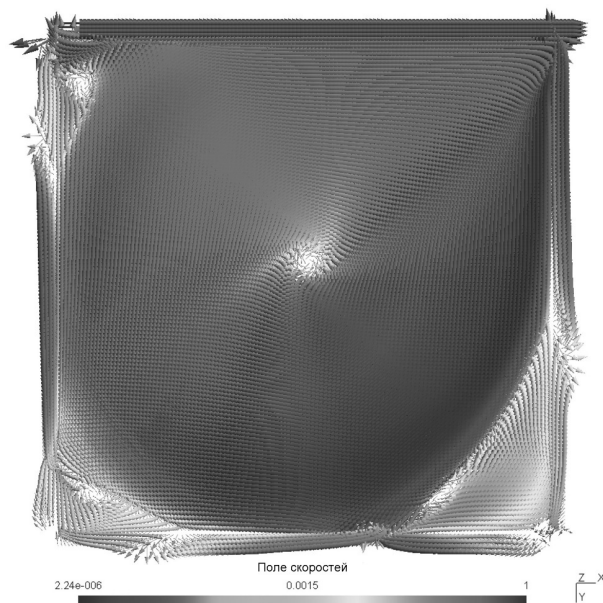


Рис. 6. Течение в каверне при $Re=3200$ — поле скоростей

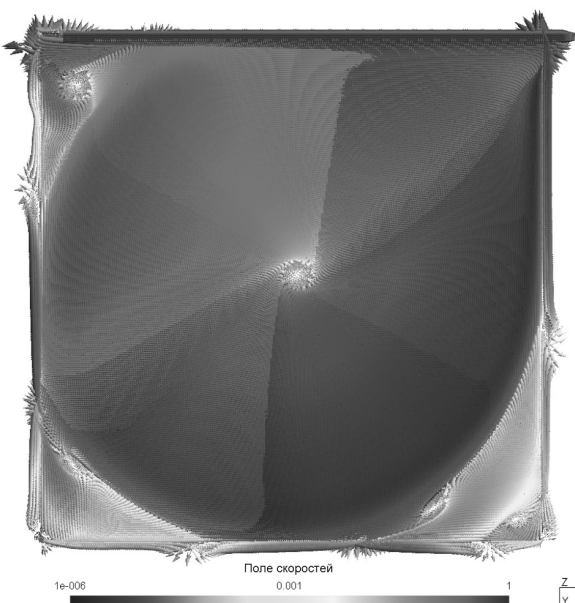


Рис. 8. Течение в каверне при $Re=8500$ — поле скоростей

На рис. 3 и 4 изображено решение задачи о плоскопараллельном течении между пластинами (течение Пуазейля) при значении числа Рейнольдса (Re) равном 100. На рис. 3 показано векторное поле скоростей (расчетное), а на рис. 4 — сравнение расчетного и теоретического профилей скоростей (расчетный профиль взят у левого конца канала, если ориентироваться на рис. 3).

На рис. 5-8 показаны течения в двумерной каверне с движущейся крышкой при различных Re . Основной качественной характеристикой здесь яв-

ляется количество зон рециркуляции. При $Re=100$ имеются две зоны рециркуляции в нижних углах каверны. При $Re=3200$ к ним добавляется еще одна в левом верхнем углу. При $Re=7500$ — еще одна в правом нижнем углу. Результат качественно совпадает с данными в [6], что подтверждает работоспособность выбранного метода. Количественное сравнение в данной задаче не проводилось.

Обратим внимание на тот факт, что на рисунках 3 и 5-8 помимо внутренних точек области изображены еще и так называемые ghost cells, использу-

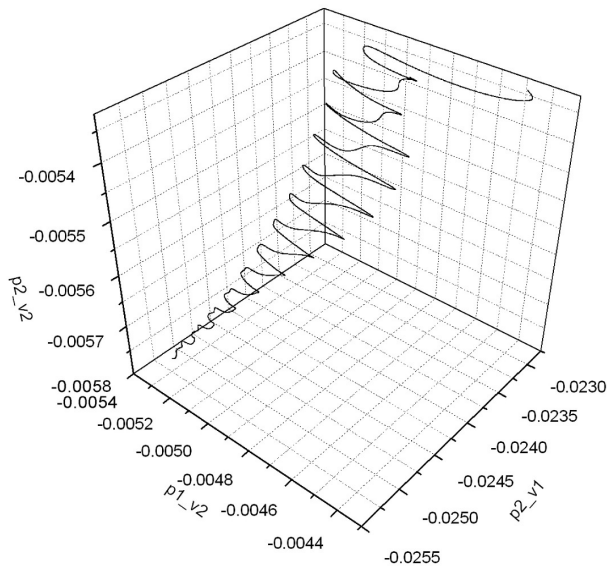


Рис. 9. Проекция фазового пространства системы при $Re=8500$

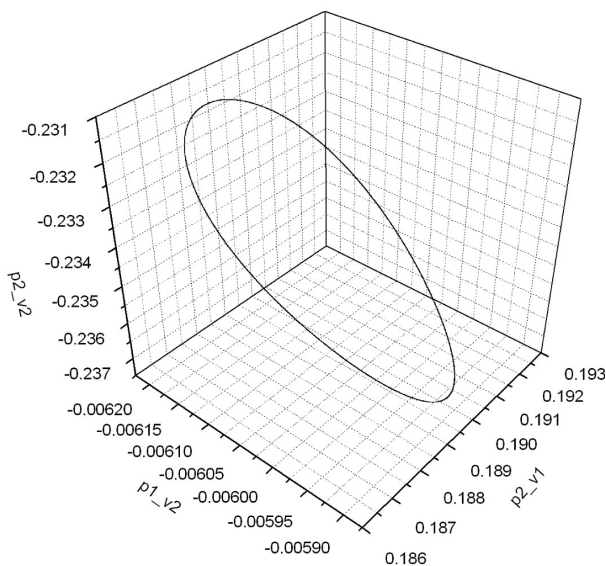


Рис. 10. Проекция фазового пространства системы при $Re=9000$

емые для аппроксимации граничных условий (векторы скорости по краям рисунков).

4. Обнаруженные бифуркации

В рамках данной работы мы обнаружили лишь первую бифуркацию Андронова—Хопфа рождения цикла из устойчивого положения. При значении $Re=8500$ стационарное течение остается устойчивым. На рис. 9 показан процесс сходимости к этому течению в проекции фазового пространства на трехмерное подпространство. Между значениями $Re=$

$=8500$ и $Re=9000$ стационарное течение теряет устойчивость с образованием устойчивого периодического режима — цикла (рис. 10). Согласно дальнейшим расчетам цикл остается аттрактором системы вплоть до значения $Re=14000$. Дальнейший бифуркационный сценарий на данный момент остается невыясненным. В качестве подпространства для проекции использовались 3 координаты: v_2 -компонента скорости в точке p_1 , v_1 и v_2 -компоненты скорости в точке p_2 , где p_1 имеет координаты $(0,5; 0,5)$ (т. е. точка в середине расчетной области), а p_2 — $(0,25; 0,25)$.

Обратим внимание на тот факт, что для получения с приемлемой точностью установившегося режима при значении $Re=7500$ оказалось недостаточно той сетки, которая использовалась при значении $Re=3200$ (128×128 ячеек). Сетка была увеличена до размера 256×256 ячеек. Аналогичная ситуация возникла при значении $Re=14000$, когда при использовании сетки размером 256×256 ячеек не удалось получить периодическое (или любое другое) установившееся решение. Внешне это проявлялось следующим образом: сначала траектория двигалась так, как это происходит в процессе сходимости к циклу, а затем срывалась, уходила на некоторое расстояние и процесс сходимости начинался заново. В физическом пространстве задачи при этом никаких артефактов не наблюдалось. Дальнейший расчет был продолжен на сетке 384×384 ячейки. Данное обстоятельство подчеркивает важность дальнейшего поиска методов повышенного порядка точности, что в особенности будет актуально для трехмерных задач.

Заключение

Для верификации способности построенного численного метода находить нестационарные аттракторы необходимо обнаружить хотя бы еще одну бифуркацию в рассмотренной задаче (это также важно с точки зрения выяснения собственно сценария перехода к турбулентности в данной задаче, поскольку неясно, что будет происходить при увеличении Re : рождение аттракторов все большей размерности согласно сценарию Ландау—Хопфа или каскады бифуркаций циклов согласно базовому сценарию ФШМ). В то же время дальнейшая исследовательская деятельность будет в основном направлена на перенос метода на уравнения несжимаемой МГД и на поиск методов данного типа повышенного порядка точности. Следует также установить, какую роль играет дополнительный член в аппроксимации дивергенции в методе, предложенном в [2], поскольку в этой же работе предлагается неитерационный метод без этого регуляризирующего члена.

Литература

1. *Armfield S. W.* Ellipticity, Accuracy, and Convergence of the Discrete Navier—Stokes Equations // *Journal of Computational Physics*. 1994. Vol. 114. P. 176–184.
2. *Armfield S. W., Street R.* Fractional step methods for the Navier—Stokes equations on non-staggered grids // *ANZIAM Journal*. 2000. Vol. 42. P. 134–156.
3. *Armfield S. W., Street R.* Modified fractional-step methods for the Navier—Stokes equations // *ANZIAM Journal*. 2004. Vol. 45. P. 364–377.
4. *Cheng-Chin Wu.* A high order WENO finite difference scheme for incompressible fluids and magnetohydrodynamics // *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*. 2007. Vol. 101. № 1. P. 37–61.
5. *Chung T. J.* *Computational Fluid Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
6. *Ghia U., Ghia K. N., Shin T.* High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier—Stokes Equations and Multigrid Method // *Journal of Computational Physics*. 1982. Vol. 48. P. 387–411.
7. *Hopf E.* A mathematical example displaying the features of turbulence // *Comm. Pure Appl. Math*. 1948. Vol. 1. P. 303–322.
8. *Rhie C. M., Chow W. L.* A numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation // *American Institute of Aeronautics And Astronautics*. 1982. Paper 82–0988.
9. *Евстигнеев Н. М., Магницкий Н. А., Сидоров С. В.* О природе турбулентности в задаче движения жидкости за уступом // *Дифференциальные уравнения*. 2009. Т. 45. № 1.
10. *Евстигнеев Н. М., Магницкий Н. А.* О возможных сценариях перехода к турбулентности в конвекции Рэлея—Бенара // *Доклады Академии Наук*. 2010. Т. 433. № 3.
11. *Ландау Л. Д.* К проблеме турбулентности // *Доклады Академии Наук СССР*. 1944. Т. 44. С. 339–342.
12. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* *Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика*. М.: Наука, 1986.
13. *Лотов К. В.* *Физика сплошных сред*. М.: Университет компьютерных исследований, 2002.
14. *Магницкий Н. А., Сидоров С. В.* *Новые методы хаотической динамики*. М.: URSS, 2004.

Рябков Олег Игоревич. Инженер-исследователь ИСА РАН. Окончил МГУ в 2009 г. Кол-во печатных работ: 3. Область научных интересов: нелинейная динамика, хаос.
E-mail: oleg.ryabkov.87@gmail.com