Стационарные значения показателей восстановления работоспособности подсистем с последовательно соединенными узлами в составе техногенно-опасных систем*

Г. С. Садыхов, Д. Б. Назаренко, О. В. Некрасова

Аннотация. Для подсистем, узлы которых в составе техногенно-опасной системы соединены последовательно, найдены расчетные формулы для определения продолжительности опасных восстановительных работ и установлены стационарные значения показателей восстановления работоспособности как при низких уровнях интенсивности восстановления, так и при восстановительных работах, проводимых после длительной эксплуатации.

Ключевые слова: *интенсивность восстановления, гамма-процентное время восстановления, вероятность восстановления, среднее время восстановления.*

Введение

Будем считать, что после критического отказа техногенно-опасной системы проводимые ремонтно-восстановительные работы небезопасны.

На рис. 1 приведен примерный график изменения $\mu(t)$ — интенсивности восстановления работоспособности такой системы как функции времени t. Видно, что на начальном участке времени восстановления $(0,\ t_0)$ принимаемые значения интенсивности восстановления меньше, чем на более позднем периоде.

Будем считать, что исследуемая система такова, что все ремонтно-восстановительные работы, проводимые при низких уровнях интенсивности восстановления, более опасны, чем при высоких. Следовательно, участок времени $(0, t_0)$ после критического отказа системы более опасен при проведении ремонтно-восстановительных работ, чем все последующие участки времени такой же продолжительности.

Для нахождения наиболее опасного участка $(0, t_0)$ определим «приемлемый» уровень интенсивности восстановления $\mu_0 = \mu(t_0)$, ниже которого ремонтно-восстановительные работы после критического отказа системы опасны. Очевидно, что этот уровень будет зависеть от многих факторов, и, в первую очередь, от структурных особенностей исследуемой системы. Тогда возникают следующие вопросы:

1) как рассчитать интенсивность восстановления $\mu(t)$ как функцию времени;
2) каким образом определять приемлемый уровень μ_0 и соответствующую ему длительность наиболее опасного участка времени восстановления работоспособности системы после отказа;
3) каковы принимаемые значения показателей восстановления системы на опасном участке времени восстановления.

В настоящей работе на примере самой распространенной подсистемы в составе техногенно-опасной системы, которая состоит из двух последовательно соединенных узлов, решаются эти вопросы.

1. Предельные и стационарные значения показателей восстановления

Рассмотрим подсистему, состоящую из двух последовательно соединенных между собой узлов, восстановительные процессы которых не зависят друг от друга. Пусть интенсивности восстановления постоянны и равны μ_1 для первого узла и μ_2 для второго узла и пусть для определенности

$$\mu_1 < \mu_2. \tag{1}$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Интенсивность восстановления подсистемы $\mu(t)$ как функция времени t монотонно возрастает при $t \leqslant r_\gamma^{(1)}$, где*

$$r_\gamma^{(1)} = \frac{-\ln(1-\gamma)}{\mu_1} \tag{2}$$

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10–08–00607-а).

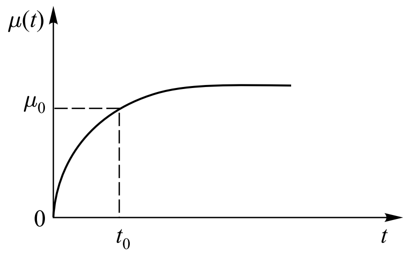

Рис. 1. Примерный график функции интенсивности восстановления

— гамма-процентное ($\gamma \cdot 100\%$) *время восстановления первого узла, здесь уровень «гамма» равен*

$$\gamma = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \tag{3}$$

При этом справедливы следующие соотношения:

$$\mu(0) = 0; \quad \mu\big(r_\gamma^{(1)}\big) = \mu_1; \tag{4}$$

$$\lim_{t\to\infty} \mu(t) = \mu_1 \tag{5}$$

и оценка

$$\mu(t) > \mu_1 \tag{6}$$

при $t > r_\gamma^{(1)}$.

Доказательство. Для вероятности невосстановления подсистемы в течение времени t согласно теореме сложения вероятностей двух независимых событий имеем

$$Q(t) = \exp(-\mu_1 t) + \exp(-\mu_2 t) - \exp(-(\mu_1+\mu_2)t), \tag{7}$$

где первое слагаемое равно вероятности невосстановления первого узла, а второе слагаемое — второго узла в течение того же времени t.

Поскольку интенсивность восстановления рассчитывается по формуле [1]

$$\mu(t) = -\frac{Q'(t)}{Q(t)}, \tag{8}$$

то, с учетом выражения (7), найдем

$$\mu(t) = \mu_1 + \frac{\sigma(t)\exp(-\mu_2 t)}{Q(t)}, \tag{9}$$

где

$$\sigma(t) = \mu_2(1 - \exp(-\mu_1 t)) - \mu_1. \tag{10}$$

Используя формулу (3) в (2), а затем полученное в (10), найдем $\sigma\big(r_\gamma^{(1)}\big) = 0$. Учитывая это в соотношении (9), получим $\mu\big(r_\gamma^{(1)}\big) = \mu_1$, что доказывает второе соотношение (4).

Так как, согласно (10), имеем $\sigma(0) = -\mu_1$, то из формулы (9) получим $\mu(0) = 0$, что доказывает первое соотношение (4) теоремы.

Докажем оценку (6). Пусть $t > r_\gamma^{(1)}$, тогда

$$\exp(-\mu_1 t) < \exp(-\mu_1 r_\gamma^{(1)}).$$

Правая часть согласно определению показателя $r_\gamma^{(1)}$ с учетом выражения (3) равна

$$\exp(-\mu_1 r_\gamma^{(1)}) = 1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Следовательно, при $t > r_\gamma^{(1)}$ имеем

$$1 - \exp(-\mu_1 t) > \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Учитывая это в соотношении (10), находим при $t > r_\gamma^{(1)}$ следующую оценку: $\sigma(t) > 0$, которая, будучи использована в формуле (9), доказывает искомую оценку (6).

Точно также доказывается следующая оценка при $t \leqslant r_\gamma^{(1)}$:

$$\sigma(t) \leqslant 0. \tag{11}$$

Далее, используя (7), по формуле (8) находим

$$\mu(t) = \frac{\mu_1\exp(-\mu_1 t) + \mu_2\exp(-\mu_2 t)}{\exp(-\mu_1 t) + \exp(-\mu_2 t) - \exp(-(\mu_1+\mu_2)t)} - \\ - \frac{(\mu_1+\mu_2)\exp(-(\mu_1+\mu_2)t)}{\exp(-\mu_1 t) + \exp(-\mu_2 t) - \exp(-(\mu_1+\mu_2)t)}.$$

Отсюда, умножив числитель и знаменатель дроби на $\exp(\mu_1 t)$ и перейдя к пределу при $t \to \infty$ с учетом (1), получим предельное соотношение (5).

Наконец, используя (9), легко установить следующее соотношение:

$$\mu'(t) = N(t)/M(t),$$

где

$$N(t) = (\exp(-\mu_2 t) - \\ - \exp(-2\mu_2 t))(\mu_1\mu_2 + (\mu_1 - \mu_2)\sigma(t)\exp(\mu_1 t)) + \\ + \mu_2(\mu_1 - \sigma(t))\exp(-(2\mu_2 - \mu_1)t),$$

$$M(t) = (1 + \exp(-(\mu_2 - \mu_1)t) - \exp(-\mu_2 t))^2 > 0.$$

Отсюда с учетом условия (1) и оценки (11) получим $\mu'(t) > 0$ при $t \leqslant r_\gamma^{(1)}$, что и доказывает монотонность интенсивности восстановления как функции времени t и тем самым все утверждения теоремы. □

Примерный график функции интенсивности восстановления подсистемы, иллюстрирующий условия и утверждения теоремы 1, приведен на рис. 2. Видно, что интенсивность восстановления подсистемы $\mu(t)$ принимает значение μ_1, которое равно интенсивности восстановления первого узла. Следовательно, это значение (как заложенная конструктором величина интенсивности восстановления для первого узла) полагаем в качестве приемлемого уровня μ_0 интенсивности восстановления подсистемы, т. е. $\mu_0 = \mu_1$. Тогда согласно теореме 1, соответствующая этому уровню длительность опасного участка

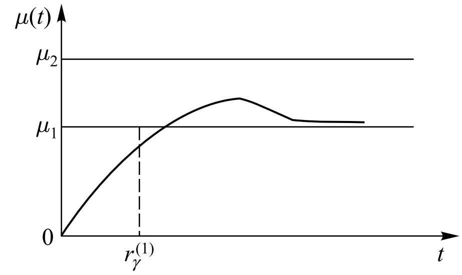

Рис. 2. График функции интенсивности восстановления рассматриваемой подсистемы

ремонтно-восстановительных работ после критического отказа подсистемы равна $t_0 = r_\gamma^{(1)}$.

Кроме того, из формулы (5) следует, что при больших значениях времени t интенсивность восстановления подсистемы стационарна, так как

$$\mu(t) \approx \mu_1,$$

где правая часть не зависит от времени t.

В частности, при $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ из формулы (9) получим следующее выражение для интенсивности восстановления подсистемы:

$$\mu_1(t) = \frac{2\mu(1 - \exp(-\mu t))}{2 - \exp(-\mu t)}.$$

Так как $r_\gamma^{(1)} = \infty$ и

$$\mu_1(t) = \mu - \frac{\mu \exp(-\mu t)}{2 - \exp(-\mu t)} < \mu,$$

то, согласно теореме 1, имеем следующее утверждение.

Следствие. Пусть интенсивности восстановления обоих узлов подсистемы равны друг другу и равны μ. Тогда интенсивность восстановления подсистемы с двумя последовательно соединенными узлами $\mu_1(t)$ как функция времени t монотонно растет на всей временной оси $(0, \infty)$. При этом справедливы следующие соотношения:

$$\mu_1(0) = 0; \quad \mu_1(t) < \mu; \quad \lim_{t\to\infty} \mu(t) = \mu_1.$$

В рассматриваемом случае в качестве приемлемого уровня μ_0 можно взять некоторое значение $\mu_1^{(1)}$, где $\mu_1^{(1)} < \mu$. Выбор такого значения показывает, что нами в неявной форме образована подсистемы с двумя параллельно соединенными узлами, интенсивности восстановления которых равны: $\mu_1^{(1)}$ для первого (мнимого) узла; μ — для второго узла. Следовательно, согласно теореме 1, длительность опасного участка восстановительных работ такой подсистемы должна рассчитываться по формуле (2), а уровень доверия по формуле (3), где $\mu_1 = \mu_1^{(1)}$, $\mu_2 = \mu$.

Поскольку из выражения (2) с учетом (3) следует, что

$$r_\gamma^{(1)} = r_\gamma^{(1)}(\mu_1) = \frac{-\ln\left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)}{\mu_1}, \tag{12}$$

то возникает вопрос: как поведет себя функция $r_\gamma^{(1)}(\mu_1)$, определенная формулой (12) как переменная аргумента μ_1 при наиболее опасном случае, т. е. при $\mu_1 \to +0$.

Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 2. *Функция $r_\gamma^{(1)}(\mu_1)$ как переменная μ_1 монотонно растет на интервале $(0, \mu_2)$. При этом справедливо следующее соотношение*:

$$\lim_{\mu_1\to+0} r_\gamma^{(1)}(\mu_1) = \nu_2, \tag{13}$$

где $\nu_2 = 1/\mu_2$ — среднее время восстановления второго узла подсистемы, а также оценка

$$r_\gamma^{(1)}(\mu_1) > \nu_2, \tag{14}$$

здесь значение γ определено соотношением (3).

Доказательство. Для доказательства (13) заметим, что при $\mu_1 \to +0$ выражение (12) есть неопределенность вида 0/0. Раскрывая эту неопределенность по правилу Лопиталя, найдем

$$\lim_{\mu_1\to+0} r_\gamma^{(1)}(\mu_1) = \lim_{\mu_1\to+0} \frac{\frac{1}{\mu_2}}{1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}}.$$

Отсюда получим искомое соотношение (13).

Для установления оценки (14) предположим противное. Тогда существует, по крайней мере, хотя бы одно значение $\mu_1^{(0)}$, для которого имеет место следующая оценка:

$$\frac{-\ln\left(1 - \frac{\mu_1^{(0)}}{\mu_2}\right)}{\mu_1^{(0)}} \leqslant \nu_2.$$

Далее, учитывая, что $\nu_2 = 1/\mu_2$, получим

$$-\ln\left(1 - \frac{\mu_1^{(0)}}{\mu_2}\right) \leqslant \frac{\mu_1^{(0)}}{\mu_2},$$

чего не может быть. Это противоречие и доказывает оценку (14).

Наконец, легко убедиться в том, что $\dfrac{\partial r_\gamma^{(1)}(\mu_1)}{\partial \mu_1} > 0$, откуда следует монотонность функции (12) на интервале $(0, \mu_2)$, что доказывает полностью теорему. □

Из монотонности функции (12) следует, что при любых значениях $\mu_1^{(1)}$, $\mu_1^{(1)} \in (0, \mu_2)$ таких, что $\mu_1^{(1)} < \mu_1^{(2)}$ справедливо соотношение

$$r_{\gamma_1}^{(1)}(\mu_1^{(1)}) < r_{\gamma_2}^{(1)}(\mu_1^{(2)}),$$

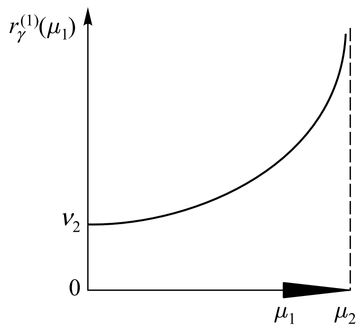

Рис. 3. График функции для расчета длительности опасных ремонтно-восстановительных работ подсистемы

техническая интерпретация которого заключается в том, что первая длительность опасных восстановлений подсистемы, равная $r_{\gamma_1}^{(1)}\left(\mu_1^{(1)}\right)$, имеет уровень доверия

$$\gamma_1 = \frac{\mu_1^{(1)}}{\mu_2},$$

а вторая, равная $r_{\gamma_2}^{(1)}(\mu_1^{(2)})$, имеет другой, — более высокий уровень

$$\gamma_2 = \frac{\mu_1^{(2)}}{\mu_2} > \gamma_1.$$

Заметим, что формула (13) показывает, что оценка (14) предельно достижима при $\mu_1 \to +0$.

Рис. 3 иллюстрирует утверждения теоремы 2.

Условие $\mu \ll \mu_0$ определяет наиболее опасную область ремонтно-восстановительных работ, где очевидно, что вероятность восстановления работоспособности подсистемы мала. В связи с этим возникает вопрос: какова степень малости этой вероятности при $\mu \to 0$. Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $F(r_\gamma^{(1)}(\mu_1))$– вероятность восстановления работоспособности рассматриваемой подсистемы в течение времени $r_\gamma^{(1)}(\mu_1)$. Тогда справедлива следующая формула*:

$$\lim_{\mu_1\to+0} \frac{F(r_\gamma^{(1)}(\mu_1))}{\mu_1} = \nu_2(1-e^{-1}),$$

где ν_2 — среднее время восстановления второго узла подсистемы.

Доказательство. Поскольку

$$F(t) = (1-e^{-\mu_1 t})(1-e^{-\mu_2 t}),$$

то, согласно (12), имеем

$$F(r_\gamma^{(1)}(\mu_1)) = \frac{\mu_1}{\mu_2}\left(1-\exp\left(-\mu_2 r_\gamma^{(1)}(\mu_1)\right)\right).$$

Отсюда с учетом соотношения (13) найдем

$$\lim_{\mu_1\to+0} \frac{F(r_\gamma^{(1)}(\mu_1))}{\mu_1} = \frac{1}{\mu_2}(1-e^{-\mu_2\nu_2}).$$

Так как $\mu_2\nu_2 = 1$, то из последнего получим искомое соотношение, что доказывает теорему. □

Из теоремы 3 следует, что кривая функции $y = F(r_\gamma^{(1)}(\mu_1))$ имеет наклонную асимптоту $y = k\mu_1$, при $\mu_1 \to +0$, угловой коэффициент которой равен $k = \nu_2(1-e^{-1})$. Следовательно, при $\mu_1 \to +0$ имеем

$$F(r_\gamma^{(1)}(\mu_1)) \approx \nu_2(1-e^{-1})\mu_1.$$

2. Стационарные значения показателей остаточного времени восстановления

Пусть

$$Q(\tau) = P_r(\eta > \tau)$$

— вероятность того, что ремонтируемая система в течение времени τ не была восстановлена, где η — время восстановления, $P_r(\cdot)$ — вероятность события, заключенного внутри скобок.

Обозначим через $\rho_\gamma(\tau)$ гамма-процентное остаточное время восстановления системы после времени τ $(\gamma \cdot 100\%)$, определяемое из уравнения

$$1 - \frac{Q(\tau+t)}{Q(\tau)} = \gamma \qquad (15)$$

как решение относительно $t(t = \rho_\gamma(\tau))$ при заданном значении γ, где $\gamma \in (0, 1)$, [2].

В частности, при $\tau = 0$ получаем определение выше рассмотренного показателя r_γ, т. е. $\rho_\gamma(0) = r_\gamma$. В этом случае показатель r_γ является корнем уравнения $1-Q(t) = \gamma$, которое следует из соотношения (15), так как $Q(0) = 1$.

Из выражения (15) легко заметить, что показатель $\rho_\gamma(\tau)$-это продолжительность ремонта системы после времени τ, в течение которого восстановление системы будет осуществлено с заданной вероятностью, равнойγ.

Для систем с длительными сроками эксплуатации важное значение имеет оценка показателя $\rho_\gamma(\tau)$ при больших значениях τ. Поэтому докажем следующее утверждение.

Теорема 4. *Для рассматриваемой подсистемы справедлива следующая формула*:

$$\lim_{\tau\to\infty} \rho_\gamma(\tau) = r_\gamma^{(1)}, \qquad (16)$$

где $r_\gamma^{(1)}$ — гамма-процентное время восстановления первого узла подсистемы.

Доказательство. Поскольку ([3])

$$\rho_\gamma(\tau) = \int\limits_0^\gamma \frac{dx}{(1-x)\mu(\tau+\rho_x(\tau))}, \tag{17}$$

то используя формулу (5), перейдем к пределу при $\tau \to \infty$ в соотношении (17).

Тогда имеем

$$\lim_{\tau\to\infty} \rho_\gamma(\tau) = \frac{1}{\mu_1}\int\limits_0^\gamma \frac{dx}{(1-x)}.$$

Вычисляя интеграл, получим

$$\lim_{\tau\to\infty} \rho_\gamma(\tau) = \frac{-\ln(1-\gamma)}{\mu_1}.$$

Так как правая часть, согласно (2), равна $r_\gamma^{(1)}$, то справедливость формулы (16) доказана. □

Из формулы (16) следует, что при больших значениях τ гамма-процентное остаточное время восстановления после времени τ для рассматриваемой подсистемы стационарно, поскольку при $\tau > \tau_0$ имеем

$$\rho_\gamma(\tau) \approx r_\gamma^{(1)},$$

где правая часть не зависит от времени τ.

Заметим, что в работе [4] установлено следующее соотношение:

$$\lim_{\gamma\to+0} \frac{\rho_\gamma(\tau)}{-\ln(1-\gamma)} = \frac{1}{\mu(\tau)},$$

из которого находим следующее выражение в области наиболее опасных восстановлении подсистемы при $\mu_1 \to +0$:

$$\frac{\rho_{\mu_1/\mu_2}(\tau)}{\mu_1} = \frac{\rho_2}{\mu(\tau)} + \vartheta(\mu_1).$$

Определим еще один показатель восстановления работоспособности системы.

Пусть на момент времени τ восстановление системы еще не завершено. Тогда время восстановления системы, равное η будет больше τ, т. е. $\eta > \tau$. Рассмотрим время восстановления системы после времени τ, которое будет равно

$$\eta_\tau = (\eta - \tau) |\, \eta > \tau.$$

$R(\tau)$– математическое ожидание величины η_τ называют средним остаточным временем восстановления системы после времени τ, т. е.

$$R(\tau) = M(\eta_\tau),$$

где $M(\cdot)$ — математическое ожидание величины, стоящей внутри скобок [5].

При длительной эксплуатации рассматриваемой подсистемы возникает вопрос о принимаемых значениях показателя $R(\tau)$ при больших значениях времени τ. В связи с этим докажем следующее утверждение.

Теорема 5. *Для рассматриваемой подсистемы справедлива следующая формула*:

$$\lim_{\tau\to\infty} R(\tau) = \nu_1, \tag{18}$$

где $\nu_1 = 1/\mu_1$ *— среднее время восстановления первого узла.*

Доказательство. Воспользуемся следующей формулой ([6])

$$R(\tau) = \frac{1}{Q(\tau)}\int\limits_\tau^\infty Q(t)\,dt,$$

из которой видно, что при $\tau \to \infty$ имеем неопределенность вида 0/0. Раскрывая эту неопределенность по правилам Лопиталя, получим

$$\lim_{\tau\to\infty} R(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{-Q(\tau)}{Q'(\tau)}.$$

Далее, используя формулу (8), имеем

$$\lim_{\tau\to\infty} R(\tau) = \frac{1}{\lim\limits_{\tau\to\infty}\mu(\tau)}.$$

Отсюда, согласно (5), получим искомую формулу (18). □

Из формулы (18) следует, что при больших значениях τ среднее остаточное время восстановления исследуемой подсистемы стационарно, поскольку при $\tau > \tau_0$

$$R(\tau) \approx \nu_1,$$

где правая часть не зависит от времени τ.

В заключение заметим, что аналогичным образом находятся стационарные значения для подсистем, состоящих из последовательно соединенных узлов, число которых более двух.

Заключение

После критического отказа техногенно-опасной системы начинаются небезопасные ремонтно-восстановительные работы ее подсистем. Особую опасность представляют работы, проводимые после длительной эксплуатации, а также работы, проводимые с низким уровнем интенсивности восстановления работоспособности подсистем. Поэтому для самой распространенной подсистемы, узлы которой соединены последовательно, найдены расчетные формулы для определения продолжительности опасных восстановительных работ в зависимости от показателей надежности узлов. При этом установлено, что найденные значения для показателей восстановления работоспособности подсистем имеют устойчивый и стационарный характер как при низких уровнях интенсивности восстановления, так и при восстановительных работах, проводимых после длительной эксплуатации.

Литература

1. *Кокс Д.*, *Смит В.* Теория восстановления. М.: Советское радио, 1967.
2. *Sadykhov G. S.*, *Savchenko V. P.*, *Gulyaev Ju. V.* Estimation of the Residual Life for Items of Equipment, Based on a Physical Model of Additive Accumulation of Damages // The Smithsonian/NASA Astrophysics Data System, Physics-Doklady. Aug. 1995. V. 40, Iss. 8. P. 397–400.
3. *Sadykhov G. S.*, *Savchenko V. P.*, *Fedorchuk Kh. R.*, *Gulyaev Ju. V.* A Nonparametric Method for Estimation of the Lower Confidence Limit of the Mean Residual Life of Equipment Items // The Smithsonian/NASA Astrophysics Data System, Physics-Doklady. July 1995. V. 40. Iss. 7. P. 343–345.
4. *Sadykhov G. S.*, *Savchenko V. P.* Dependence of the Operating-Life Index on the Characteristics of Life-Reserve Spending // The Smithsonian/NASA Astrophysics Data System, Physics-Doklady. July 1998. V. 43, Iss. 7. P. 412–414.
5. *Садыхов Г. С.*, *Алшехаби С.* Оценка длительности безопасной эксплуатации и допустимого числа безопасных срабатываний свыше назначенных уровней для стареющих техногенно-опасных объектов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 3. С. 120–126.
6. *Садыхов Г. С.*, *Некрасова О. В.* Расчет показателей безопасности эксплуатации подсистемы с параллельно нагруженными элементами в составе техногенно-опасного объекта // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2011. № 1. С. 107–113.

Садыхов Гулам Садыхович. Д. т. н., профессор, гл. н. с. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Окончил Азербайджанский государственный педагогический институт в 1962 г. Количество печатных работ: 207, 7 монографий. Область научных интересов: системный анализ и обработка информации для принятия управляющих решений по обеспечению безопасной и надежной эксплуатации техногенно-опасных обьектов.
E-mail: gsadykhov@gmail.com
Сайт: www.sadykhov.ru

Назаренко Дмитрий Борисович. Аспирант МГТУ им. Н. Э. Баумана. Окончил МГТУ им. Н. Э. Баумана в 1989 г. Количество печатных работ: 3. Область научных интересов: теория надежности.
E-mail: nazardb@gmail.com

Некрасова Ольга Валерьевна. Инженер-программист ракетно-космической корпорации «Энергия» им. С. П. Королева. Окончила в 2007 г. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Количество печатных работ: 12. Область научных интересов: теория надежности и безопасности.
E-mail: olka.nekrasova@gmail.ru