

О бифуркации удвоения периода двумерного инвариантного тора по первичному циклу

С. В. Сидоров

Аннотация. В диссипативных нелинейных дифференциальных уравнениях в частных производных параболического типа численно исследована особенность механизма рождения двумерных инвариантных торов и последующих бифуркаций удвоения периода этих торов по первичному предельному циклу. Установлено существование бифуркации типа вилки рождения двух устойчивых циклов при потере устойчивости пространственно однородного периодического решения, которая определяет последующую бифуркацию рождения двумерных инвариантных торов и каскад удвоения этих торов по первичному циклу.

Ключевые слова: нелинейная динамика, диссипативные нелинейные системы дифференциальных уравнений в частных производных, бифуркации решений.

Введение

В работах [1–3] было установлено наличие структуры решений в нелинейных диссипативных системах дифференциальных уравнений. В отличие от структуры решений линейных дифференциальных уравнений, где имеет место принцип суперпозиции, в нелинейных уравнениях такой принцип невозможен, и структура представлена бесконечным дискретным множеством устойчивых и неустойчивых решений, которые образуются в каскаде бифуркаций удвоения периода предельного цикла, в субгармоническом и в гомоклиническом каскаде бифуркаций [3–6]. Указанные структуры решений имеют место как в системах дифференциальных уравнений с размерностью три, так и с более высокой размерностью, в том числе в уравнениях с запаздывающим аргументом, которые равносильны бесконечномерным системам обыкновенных дифференциальных уравнений, и в диссипативных нелинейных системах уравнений в частных производных параболического типа. В отличие от трехмерных систем, где элементами структуры являются периодические решения, как правило, предельные циклы, в системах с размерностью более трех такими структурными элементами могут быть инвариантные торы, в частности двумерные торы, представленные топологическим произведением двух циклов. Структура в этом случае определяется множеством решений, порожденных бифуркациями двумерных торов, а точнее, указанными выше бифуркациями предельных циклов, составляющих эти торы.

В настоящее время изучен механизм бифуркации удвоения периода предельного цикла только в трехмерных системах обыкновенных дифференциальных уравнений [7]. В системах дифференциальных уравнений с частными производными, где структура решений представлена двумерными инвариантными торами, бифуркация удвоения периода может иметь место как для исходного первичного цикла, так и для вторичного цикла, образовавшегося в результате бифуркации Андронова—Хопфа при потере устойчивости исходного цикла. В данной работе исследован характер бифуркаций, связанных с исходным первичным циклом во второй краевой задаче для нестационарного уравнения Гинзбурга—Ландау.

1. Механизм удвоения периода

Рассмотрим вторую краевую задачу на отрезке $l = \pi$ для нестационарного уравнения Гинзбурга—Ландау:

$$\begin{aligned} W_t &= W + (1 + ic_1)W_{xx} - (1 + ic_2)W|W|^2, \\ W_x(0, t) &= W_x(l, t) = 0, \quad W(x, 0) = W_0(x), \quad (1) \\ x &\in [0, l], \quad t \in [0, \infty), \end{aligned}$$

где

$$W(x, t) = u(x, t) + iv(x, t)$$

— комплекснозначная функция, c_1 и c_2 — вещественные параметры. Для определенности зафиксируем параметр $c_1 = 2,5$ и исследуем поведение

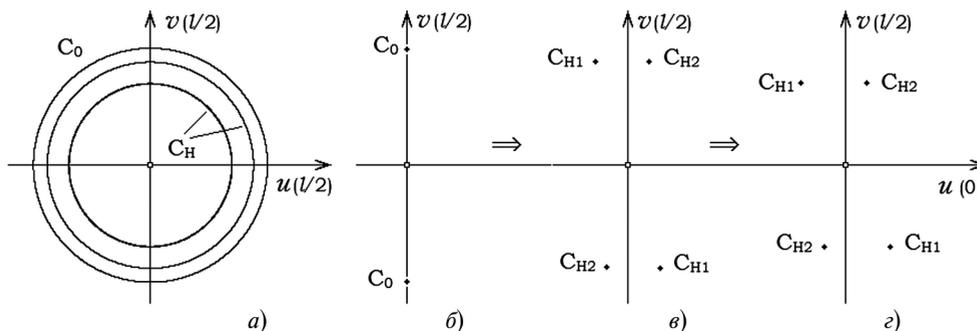


Рис. 1. а) проекции траекторий уравнения (1) в координатах $(u(l/2), v(l/2))$ фазового пространства для пространственно однородного периодического решения C_0 при значениях параметра $c_2 = -1,7$ и пространственно неоднородных периодических решений C_H при $c_2 = -2,1$ и $c_2 = -2,7$; б) проекции отображения Пуанкаре для пространственно однородного периодического решения C_0 ; в) и г) проекции отображения Пуанкаре для пространственно неоднородного периодического решения C_H соответственно при $c_2 = -2,1$ и при $c_2 = -2,7$

устойчивых решений уравнения (1) при различных значениях параметра c_2 .

Заметим, что при значении параметра $c_2 > -1,8$ в уравнении (1) имеет место устойчивое периодическое однородное решение. Поэтому в работе исследовались решения уравнения (1) только при отрицательных значениях параметра $c_2 < -1,8$. В дальнейшем при исследовании решений удобно воспользоваться сечением фазового пространства гиперплоскостью, например, $u(l/2) = 0$. Для периодического однородного решения, представленного в фазовом пространстве циклом C_0 (рис. 1 а), отображение Пуанкаре в данной плоскости будет иметь вид двух точек (рис. 1 б), в которых траектория цикла пересекает гиперплоскость $u(l/2) = 0$.

Ранее в [4] было установлено, что при значении параметра $c_2 \approx -1,85$ однородное периодическое решение теряет устойчивость и рождается другое периодическое, но пространственно неоднородное решение с одинаковой амплитудой колебаний переменных $u(x_0, t)$ и $v(x_0, t)$ для любой точки $x_0 \in [0, l]$, которое в фазовом пространстве имеет вид окружности. На рис. 1а эти циклы обозначены C_H . Однако, как установлено в настоящей работе, имеет место рождение не одного решения, а пары устойчивых неразличимых в проекции фазового пространства решений в результате бифуркации типа вилки. Их траектории в фазовом пространстве — окружности C_H одинакового радиуса. Тем не менее, в отображении Пуанкаре траектории, соответствующие этим решениям, пересекают гиперплоскость $u(l/2) = 0$ в разных точках C_{H1} и C_{H2} рис. 1 в). По мере изменения параметра c_2 расстояние между этими циклами в фазовом пространстве увеличивается (рис. 1 г).

Пара циклов C_{H1} и C_{H2} остается устойчивой до тех пор, пока в результате бифуркации Андронова—

Хопфа не происходит одновременное рождение на каждом из этих циклов двух других (вторичных) циклов, топологические произведения которых с первичным циклом порождают пару двумерных инвариантных торов T_1 и T_2 , отображение Пуанкаре которых имеют вид, показанный на рис. 2а. При дальнейшем изменении параметра c_2 эти торы увеличиваются за счет возрастания размера вторичного цикла (рис. 2 б), что приводит к их сближению. При некотором критическом значении параметра $c_2^* \approx -3,135$, когда торы T_1 и T_2 настолько приближаются друг к другу, что появляется возможность их слияния по некоторой линии L , показанной на фазовом портрете в проекции $(u(l/2), v(l/2))$ (рис. 2 г). Однако в силу единственности решения дифференциального уравнения эта сингулярность разрешается путем рождением нового решения — двумерного инвариантного тора, представленного топологическим произведением первичного предельного цикла удвоенного периода на вторичный предельный цикл, появившийся ранее при бифуркации Андронова—Хопфа (рис. 3 а).

Используя отображение Пуанкаре можно проследить дальнейшую эволюцию данного решения, обусловленную изменением параметра c_2 и показанную на рис. 3. В виду симметричности отображения Пуанкаре относительно его поворота на 180° на рис. 3 показан не полный вид этих отображений, а лишь фрагменты, соответствующие входящим в гиперплоскость траекториям только с одной стороны гиперплоскости. В данном случае это соответствует сечению гиперплоскостью верхней части фазового портрета. Как показывают численные исследования, при бифуркации удвоения периода двумерного инвариантного тора по первичному циклу снова рождается не один, а пара устойчивых двумерных инвариантных торов удвоенного по первичному

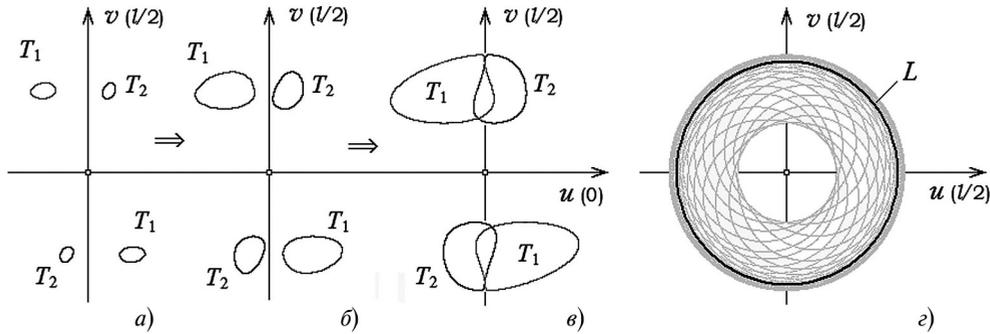


Рис. 2. Проекция на гиперплоскость $(u(0), v(l/2))$ отображения Пуанкаре двумерных инвариантных торов T_1 и T_2 : а) при $c_2 = -2,82$; б) при $c_2 = -2,9$; в) при $c_2 = -3,13$; г) проекция траектории уравнения (1) в координатах $(u(l/2), v(l/2))$ фазового пространства при $c_2 = -3,138$

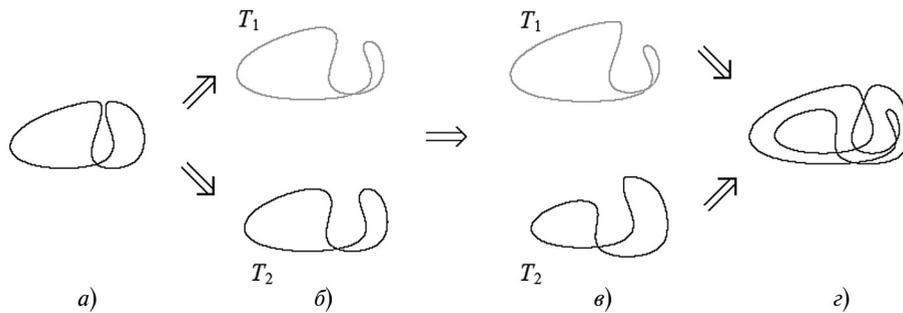


Рис. 3. Проекция на гиперплоскость $(u(0), v(l/2))$ отображения Пуанкаре двумерных инвариантных торов T_1 и T_2 удвоенного по первичному предельному циклу периода: а) при $c_2 = -3,15$; б) при $c_2 = -3,5$; в) при $c_2 = -3,536$; г) проекция отображения Пуанкаре двумерного инвариантного тора учетверенного по первичному предельному циклу периода при $c_2 = -3,6$

циклу периода. Эти торы расположены настолько близко друг к другу, что неразличимы даже в отображении Пуанкаре. Однако, начиная со значения параметра $c_2 \approx -3,45$ их различия в отображении Пуанкаре по мере изменения параметра c_2 становятся все более заметными. При этом двумерные инвариантные торы удвоенного по первичному циклу периода снова сближаются друг с другом до почти слияния по некоторой линии. Невозможность их соприкосновения вновь разрешается повторной бифуркацией удвоения периода по первичному предельному циклу. Таким образом, этот процесс завершается образованием новой пары устойчивых решений — двумерных инвариантных торов, представленных топологическим произведением первичного предельного цикла учетверенного периода на вторичный предельный цикл.

Численно указанный процесс бифуркаций удвоения периода двумерных инвариантных торов по первичному циклу удалось проследить до рождения двумерных торов, имеющих в топологическом произведении период первичного предельного цикла, кратный восьми.

Заключение

В работе показано, что во второй краевой задаче уравнения Гинзбурга—Ландау имеет место бифуркация типа вилки, в результате которой при потере устойчивости однородного периодического решения рождается пара устойчивых неоднородных периодических решений. В дальнейшем оба эти решения, теряя устойчивость, порождают двумерные инвариантные торы, которые в ходе изменения параметра, увеличиваясь в размерах, сближаются друг с другом. Катастрофа слияния решения разрешается бифуркацией удвоения периода этих торов по исходному первичному циклу. Аналогичным образом рождаются торы с 4-, 8- и т. д. кратным периодом по исходному первичному циклу. Работа поддержана проектом РФФИ № 090700078А.

Литература

1. Сидоров С. В. О структуре решений в нелинейных дифференциальных уравнениях // Третьи Курдюмовские чтения: Синергетика в естественных науках. Материалы Международной междисциплинарной научной

- конференции. Тверь: Тверской гос. ун-т, 19–24 марта 2007. С. 127–131.
2. *Сидоров С. В.* О структуре решений в диссипативных системах нелинейных дифференциальных уравнений // Вторая Международная конференция «Системный анализ и информационные технологии». 10–14 сент. 2007. Обнинск, Россия. С. 280–284.
 3. *Магницкий Н. А., Сидоров С. В.* Новые методы хаотической динамики. М.: URSS, 2004. 320 с.
 4. *Сидоров С. В.* О механизме перехода к диффузионному хаосу // Первая международная конференция «Системный анализ и информационные технологии» САИТ-2005 (12–16 сентября 2005 г., Переславль-Залесский, Россия): Труды конференции. В 2 т. Т. 1. М.: КомКнига/URSS, 2005. С. 124–129.
 5. *Magnitskii N. A., Sidorov S. V.* New Methods for Chaotic Dynamics. Singapore: World Scientific, 2006. 363 p.
 6. *Сидоров С. В.* Универсальность перехода к хаосу в динамических диссипативных системах дифференциальных уравнений // Динамика неоднородных систем. Труды ИСА РАН. Вып. 9. М.: URSS, 2006. С. 51–87.
 7. *Сидоров С. В.* Динамика показателей Флоке в каскаде бифуркаций удвоения периода // Дифференциальные уравнения. Т. 45. № 8. 2009. С. 1213–1214.

Сидоров Сергей Васильевич. С. н. с. ИСА РАН, д. ф.-м. н., доцент Окончил Московский горный институт в 1972 г., МГУ им. М. В. Ломоносова — в 1995 г. Количество печатных работ: 116, из них 6 авторских свидетельств, 2 монографии. Область научных интересов: нелинейная динамика.
E-mail: sidorovsv@mail.ru