Теория конфликтных задач с пересекающимися игровыми множествами участников*

В. Э. Смольяков, Э. Р. Смольяков

Аннотация. Предлагаются основы теории конфликтных задач с частично пересекающимися игровыми множествами участников, никогда не изучавшихся в классической теории игр, т. е. задач, участники которых явно конфликтуют лишь на пересечении их игровых множеств, а их побочные интересы, т. е. дополнительные сферы их индивидуального бизнеса, формально не замешаны в конфликте явно. Формулируется ряд новых понятий оптимальности (равновесности), благодаря которым удается построить теорию, обеспечивающую не только существование, но и почти всегда единственность решения любых подобных задач с побочными доходами участников.

Ключевые слова: *конфликтные задачи, побочные интересы, оптимальность, игровые равновесия*.

Введение

В работах [1–3] построена единая для всех классов конфликтных задач (традиционно рассматривавшихся на общем для всех участников игровом множестве) теория конфликтных равновесий, существенным преимуществом которой над всеми известными классическими теориями игр является то, что в ней для любых конфликтных задач удалось найти никогда не пустое множество A-равновесий, гарантирующее, что любая игровая (конфликтная) задача всегда имеет решение, а на множестве A, в свою очередь, удалось найти еще и множество более сильных равновесий, обеспечивших единственность решения почти любых задач, причем эта теория позволяет решать любые классы игровых задач — антагонистических и бескоалиционных, коалиционных и кооперативных, статических и динамических — в рамках единой методики, в отличие от классической теории игр [4, 5], традиционно разрабатывавшейся для конкретных классов игровых задач и так и не позволившей в большинстве случаев находить не только единственное решение, но даже не гарантирующей в общем случае существование хотя бы какого-либо решения.

А в [2, 3] сделаны первые попытки построения теории задач почти не изученного класса — игровых задач, в которых платежные функции участников определены не на едином для всех игроков множестве, а на их индивидуальных множествах, лишь частично пересекающихся между собой. Это выражает, в частности, реальную ситуацию, когда у каждого из участников имеются еще и побочные доходы (т. е. интересы, лежащие вне единого для всех участников игрового множества допустимых ситуаций), которые могут, как показывается в данной работе, существенно влиять на разрешение конфликтов.

Однако уже первые попытки изучения игровых задач с побочными интересами показали, что в подобных задачах множество A может оказываться пустым. Чтобы преодолеть эту неприятность, необходимо соответствующее обобщение этого множества и некоторые дополнительные понятия оптимальности и равновесности.

В данной работе показано, что теория [1–3] (с соответствующими дополнениями) может быть распространена на конфликтные задачи с побочными интересами участников за счет введения расширенного понятия A-равновесия и дополнительных понятий оптимальности (равновесности), обеспечивших возможность решения любых конфликтных задачах с частично пересекающимися интересами участников.

1. Основные результаты теории

Чтобы не отвлекаться на несущественные в рамках излагаемых результатов вопросы существования максимумов, принимается, без какой-либо потери общности, следующее допущение.

* Работа выполнена по программе РАН «Фундаментальные основы информационных технологий и систем» (проект № 1–3) и при поддержке РФФИ (проект № 09–01–00655-а).

Допущение. Пусть

$$\mathrm{Q_i}, \quad i = 1, \dots, N$$

— метрические пространства,

$$G = \bigcap_{i=1}^{N} G_i$$

— непустое множество в их произведении

$$Q = Q_1 \times \dots \times Q_N,$$

а G_i — компактные множества в Q, в своей совокупности образующие множество

$$G' = \bigcup_{i=1}^{N} G_i;$$

и пусть на множестве G_i определена непрерывная функция (функционал)

$$J_i(q), \quad i = 1, \dots, N, \quad q = q_1 \dots q_N.$$

Предполагается, что i-й участник имеет возможность выбирать свою стратегию (состояние) q_i из проекции $\Pr\limits_{Q_i} G'$ множества G' на пространство Q_i (или из сечения $G'(q^i)$ множества G', где

$$q^i = (q_1 \dots q_{i-1} q_{i+1} \dots q_N),$$

и стремится обеспечить максимум своей платежной функции $J_i(q)$, определенной лишь на множестве G_i.

Это означает, что рассматривается конфликтная задача, в которой i-й участник ищет максимум своей платежной функции J_i на своем индивидуальном игровом множестве $G_i \subseteq Q$, имеющем общее непустое пересечение G с аналогичными индивидуальными игровыми множествами G_k остальных участников, также максимизирующих на своем множестве свою платежную функцию J_K. Т. е по существу это означает, что интересы всех игроков явно сталкиваются только на множестве G.

Назовем побочными доходами (интересами) i-го участника по отношению к коалиции из остальных $N-1$ участников те его доходы, которые он получает на той части своего игрового множества G_i, которая не входит во множество G. Как показывается ниже на примерах, побочные интересы участников могут оказывать существенное влияние на совместный бизнес всех участников на множестве G.

Исходным понятием для построения любых систем конфликтных равновесий служит следующее обобщение понятия A-равновесия [1–3].

Определение 1. Точку (ситуацию) $q* \in G_i$ назовем A_i-экстремальной для i-го участника, если при заданной стратегии q^{i*} остальных $(N-1)$-го участников допустимой для i-го игрока оказывается только одна стратегия $q_i^* = G_i(q^{i*})$ или если любой стратегии

$$q_i \in G_i(q^{i*}) \backslash q_i^*$$

i-го участника можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию

$$\widehat{q}^i = \widehat{q}^i < q_i > \in G_i(q_i)$$

остальных $(N-1)$-го участников так, чтобы имело место следующее отношение:

$$J_i(\widehat{q}^i, q_i) \leqslant J_i(q^*) \tag{1}$$

для задачи 1-го типа;

удовлетворяется (1) или же значение $J_i(\widehat{q}^i, q_i)$ не определено, но при этом значение $J^i(\widehat{q}^i, q_i)$ определено в том смысле, что определено значение хотя бы одного из функционалов (2)

$$J_k(\widehat{q}^i, q_i), k \neq i,$$

для задачи 2-го типа;

удовлетворяется (2) или же оба значения $J_i(\widehat{q}^i, q_i)$ и $J^i(\widehat{q}^i, q_i)$ не определены, т. е. в ситуации $(\widehat{q}^i, q_i)$ значения всех функционалов (3)

$$J_k(\widehat{q}^i, q_i), k = 1, \dots, N,$$

не определены для задачи 3-го типа;

удовлетворяется (1), но при этом задача рассматривается только на множестве G, т. е. на пересечении всех множеств G_i, для задачи 4-го типа (4)

Ситуацию $q^* \in \bigcap\limits_{i=1}^{N} A_i$ назовем A-равновесием в задаче, соответственно, 1-го, 2-го, 3-го или 4-го типа, если, соответственно, условия (1), (2), (3) или (4) удовлетворяются в точке q^* для всех $i = 1, \dots, N,$, т. е. если $A = A_1 \cap \dots \cap A_N$.

Из определения 1 следует, что в задачах 1-го и 4-го типа угрозы (1) самые слабые; более сильные угрозы (2) — в задаче 2-го типа, а самые сильные (3) — в задаче 3-го типа.

Следует отметить, однако, что угрозы 3-го типа носят, скорее, чисто теоретический характер и рассматриваются исключительно ради математической полноты изложения, так как их применение означает просто выход участников из игры.

Поскольку в задачах с частично пересекающимися игровыми множествами участников, потребовавших, помимо определения (1), введения в рассмотрение еще и определений вида (2)–(4), множество A (в отличие от задач на едином для всех участников множестве) может оказаться пустым, то этот факт вынуждает искать какое-то более слабое равновесие, которое было бы непустым и содержало в своем составе A-равновесие. В связи с этим введем следующие определения новых понятий равновесия (оптимальности).

Определение 2. Ситуацию $q^a \in G_i$ назовем P_i^a-экстремальной, если на любую попытку $q_i \in G_i(q^{ai})\backslash q_i^a$ i-го участника увеличить свой выигрыш, реализуемый в ситуации q^a, можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию $\widehat{q}^i = \widehat{q}^i < q_i > \in G_i(q_i)$ остальных $(N-1)$-го участников, такую, чтобы система из следующих неравенств оказалась несовместной

$$J_i(\widehat{q}^i, q_i) \geqslant J_i(q^a), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{5}$$

из которых хотя бы одно строгое. Множество P_i^a-экстремальных ситуаций обозначим P_i^a, а ситуацию $q^a \in P^a = \bigcap_{k=1}^{N} P_k^a$ назовем P^a-оптимальной.

Определение 2 утверждает, что на любую попытку q_i i-го игрока улучшить свой выигрыш, получаемый им в ситуации q^a, найдется хотя бы одна стратегия остальных участников, такая, что ситуация q^a окажется (индивидуально) паретовской по отношению хотя бы к одной из ситуаций из множества $G_i(q_i)$.

Определение 3. Ситуацию $q^a \in G_i$ назовем $\overline{P}^a$-экстремальной, если на любую попытку $q_i \in G_i(q^{ai})\backslash q_i^a$ i-го участника увеличить свой выигрыш, реализуемый в ситуации q^a, все допустимые ответные стратегии остальных участников $\widehat{q}^i = \widehat{q}^i < q_i > \in G_i(q_i)$ приводят к тому, что система из следующих неравенств оказывается несовместной

$$J_i(\widehat{q}^i, q_i) \geqslant J_i(q^a), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{6}$$

из которых хотя бы одно строгое. Множество $\overline{P}_i^a$-экстремальных ситуаций обозначим $\overline{P}_i^a$, а ситуацию $q^a \in \overline{P}^a = \bigcap_{k=1}^{N} \overline{P}_k^a$ назовем $\overline{P}_i^a$-оптимальной.

Некоторое ослабление P^a-оптимальности дает следующее определение.

Определение 4. Ситуацию $q^b \in G_i$ назовем P_i^b-экстремальной, если на любую попытку $q_i \in G_i(q^{bi})\backslash q_i^b$ i-го участника увеличить свой выигрыш, реализуемый в ситуации q^b, можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию $\widehat{q}^i = \widehat{q}^i < q_i > \in G'(q_i)$ остальных $(N-1)$-го участников, такую, чтобы система из следующих неравенств оказалась несовместной

$$J_i(\widehat{q}^i, q_i) \geqslant J_i(q^b), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{7}$$

из которых хотя бы одно строгое. Множество P_i^b-экстремальных ситуаций обозначим P_i^b, а ситуацию $q^b \in P^b = \bigcap_{k=1}^{N} P_k^b$ назовем $\overline{P^b}$-оптимальной.

А естественное усиление понятия P^b-оптимальности предлагается в следующем определении.

Определение 5. Ситуацию $q^b \in G_i$ назовем $\overline{P}_i^b$-экстремальной, если на любую попытку $q_i \in G_i(q^{bi})\backslash q_i^b$ i-го участника увеличить свой выигрыш, реализуемый в ситуации q^b, все допустимые ответные стратегии $\widehat{q}^i = \widehat{q}^i < q_i > \in G'(q_i)$ остальных участников приводят к тому, что система из следующих неравенств оказывается несовместной

$$J_i(\widehat{q}^i, q_i) \geqslant J_i(q^b), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{8}$$

из которых хотя бы одно строгое. Множество $\overline{P}_i^b$-экстремальных ситуаций обозначим $\overline{P}_i^b$, а ситуацию $q^b \in \overline{P}^b = \bigcap_{k=1}^{N} \overline{P}_k^b$ назовем $\overline{P}^b$-оптимальной.

Теорема 1. *Между понятиями оптимальности из определений* 2–5 *имеют место следующие отношения*:

$$P^b \supseteq P^a \supseteq \overline{P}^a \supseteq \overline{P}^b. \tag{9}$$

Доказательства эта теорема не требует, поскольку включения (9) являются по существу следствием определений 2–5.

Определение 6. Ситуацию $q^a \in G_i$ назовем S_i^a-экстремальной, если на любую попытку $q_i \in G_i(q^{ai})\backslash q_i^a$ i-го участника увеличить свой выигрыш, реализуемый в ситуации q^a, можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию $\widehat{q}^i = \widehat{q}^i < q_i > \in G_i(q_i)$ остальных $(N-1)$-го участников, такую, чтобы система из следующих неравенств оказалась несовместной

$$J_i(\widehat{q}^i, q_i) > J_i(q^a), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{10}$$

из которых хотя бы одно строгое. Множество S_i^a-экстремальных ситуаций обозначим S_i^a, а ситуацию $q^a \in S^a = \bigcap_{k=1}^{N} S_k^a$ назовем S^a-оптимальной.

Определение 7. Ситуацию $q^a \in G_i$ назовем $\overline{S}_i^a$-экстремальной, если на любую попытку $q_i \in G_i(q^{ai})\backslash q_i^a$ i-го участника увеличить свой выигрыш, реализуемый в ситуации q^a, все допустимые ответные стратегии $\widehat{q}^i = \widehat{q}^i < q_i > \in G_i(q_i)$ остальных участников приводят к тому, что система из следующих неравенств оказывается несовместной

$$J_i(\widehat{q}^i, q_i) > J_i(q^a), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{11}$$

Множество $\overline{S}_i^a$-экстремальных ситуаций обозначим $\overline{S}_i^a$, а ситуацию $q^a \in \overline{S}^a = \bigcap_{k=1}^{N} \overline{S}_k^a$ назовем $\overline{S}^a$-оптимальной.

Теорема 2. *Между введенными понятиями оптимальности имеют место следующие включения*:

$$P^a \subseteq S^a, \overline{P}^a \subseteq P^a, \overline{P}^a \subseteq \overline{S}^a \subseteq S^a.$$

Теорема 3. *Всегда имеет место включение* $A \subseteq S^a$.

Согласно теореме 3 на роль множества A, когда оно оказывается пустым в задачах с частично пересекающимися интересами участников, могут претендовать множества, задаваемые определениями 2–7, причем они наиболее полезны в задачах с побочными интересами участников в случае использования слабых угроз (1), так как в случае более сильных угроз (2) и (3) они оказываются слишком обширными. В общем случае, они представляют интерес при решении любых задач вследствие заложенного в них свойства локальной Парето-оптимальности.

Продемонстрируем поиск наисильнейшего равновесия и оптимального дележа в кооперативных играх на примерах матричных конфликтных задач, заданных на частично пересекающихся игровых множествах участников. В этих примерах, помимо приведенных выше равновесий, используются еще и другие равновесия, разработанные в [1–3, 6–9], из которых приведем лишь первое усиление множества A, задаваемое следующим определением.

Определение 8. Ситуацию $q^* \in A_i$ назовем B_i-экстремальной, если образующая ее стратегия остальных игроков удовлетворяет условию

$$\max_{q^i \in A_i(q_i^*)} J^i(q_i, q_i^*) = J^i(q*). \qquad (12)$$

Назовем ситуацию q^* B-равновесием, если $q^* \in \bigcap_{i-1}^{N} B_i$, где B_i — множество всех B_i-экстремальных ситуаций.

2. Примеры решения конфликтных задач

Пример 1. Рассмотрим конфликтную (игровую) задачу с двумя участниками, в которой каждый из игроков максимизирует свою (матричную) платежную функцию на индивидуальном для него игровом множестве, не совпадающем с игровым множеством другого участника, т. е. игру с побочными интересами игроков:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 6 & \cdot & \cdot & 3 \\ 9 & \cdot & \cdot & 4 \\ 8 & 7 & 1 & \cdot \\ 10 & 5 & 11 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} \cdot & 6 & 7 & 10 \\ 1 & 5 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 4 \\ \cdot & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Оба участника располагают четырьмя стратегиями: первый выбирает одну из четырех строк, а 2-й — один из четырех столбцов. В этой задаче игровое множество G_i i-го участника задается теми элементами матрицы J_i, в которых приведены возможные значения его выигрыша. $G' = G_1 \cup G_2$, а $G = G_1 \cap G_2 = (a_{13}, a_{21}, a_{42}, a_{43})$.

Исследуем, в какой мере побочные интересы участников и возможности использования ими разных типов угроз могут влиять на решение игры (13).

Прежде всего убедимся, что найти в этой задаче какое-либо равновесие в классе слабых угроз (1) (даже наислабейшее A-равновесие) не представляется возможным, поскольку оказывается, что $A = \varnothing$. В самом деле, имеем:

$$A_1 = \begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & + \\ + & + & \cdot & \cdot \\ + & + & + & \cdot \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cdot & + & + & + \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \end{pmatrix}, \qquad (14)$$

$$A = A_1 \cap A_2 = \varnothing.$$

Хотя множество A-равновесий в этой задаче пусто, но, однако, множества понятий оптимальности (равновесности), задаваемые определениями 2–7, не только не пусты, но даже весьма обширны. Множество P^a-равновесий совпадает с множеством G, а множество $\overline{P}^a = (a_{14}, a_{42}, a_{43})$. Элементы множеств $P^a, \overline{P}^a$, P^b, $\overline{P}^b$ обладают полезными для ряда приложений локально-паретовскими качествами и в сомнительных случаях помогают выявить наисильнейшее равновесие.

В случае допущения в исходной задаче (13) сильных угроз (2) множество A уже не оказывается пустым:

$$A_1 = \begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & + \\ + & + & \cdot & \cdot \\ + & + & + & \cdot \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cdot & + & + & + \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \end{pmatrix}, \qquad (15)$$

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & + & + & \cdot \end{pmatrix}.$$

А множество B выделяет из множества A две наиболее сильные игровые ситуации:

$$\begin{aligned} B_1 &= (a_{14}, a_{21}, a_{44}),\\ B_2 &= (a_{14}, a_{21}, a_{42}, a_{43}),\\ B &= (a_{14}, a_{21}), \end{aligned} \tag{16}$$

из которых ситуация a_{14} оказывается еще и $\overline{P}^a$-оптимальной. Однако с точки зрения теории конфликтных задач [1–3] слабое различие в локальных паретовских свойствах этих двух равновесий ($a_{14} \in \overline{P}^a$, а $a_{21} \in P^a$) не может служить сколько-нибудь существенным основанием для того, чтобы считать ситуацию a_{14} более сильным равновесием, чем a_{21}. Согласно [1–3] справедливый дележ кооперативного дохода (равного в данном случае 13 и достигаемого в ситуации a_{14} или a_{43}) по существу зависит только от наисильнейшего равновесия (в данном случае — от найденных двух эквивалентных по устойчивости равновесных ситуаций из множества B). Это означает, что следует воспользоваться формулами (5) из [8] или, что то же самое, формулами 4.3 из [2, с. 175], приводящими к дележу:

$$\begin{aligned} x_1 &= 13\frac{(3+9)}{(3+9)+(10+1)} \approx 6{,}8,\\ x_2 &= 13\frac{(10+1)}{(3+9)+(10+1)} \approx 6{,}2, \end{aligned} \tag{17}$$

т. е. доля x_1, к примеру, 1-го игрока задается произведением кооперативного дохода, равного 13, на дробь, числитель которой равен сумме выигрышей 1-го игрока в наисильнейших эквивалентных равновесных ситуациях, а знаменатель равен сумме выигрышей обоих игроков в этих ситуациях. Аналогично определяется справедливая доля x_2 2-го игрока.

Чтобы оценить влияние побочных доходов участников на решение рассматриваемой игры, необходимо еще рассмотреть вспомогательную игру на пересечении игровых множеств участников, поскольку именно на этом множестве они конкурируют между собой, и посмотреть, в какой мере решение этой игры отличается от полученного выше.

В этой игре на множестве G платежные функции участников следующие:

$$J_1^G = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 3\\ 9 & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & 5 & 11 & \cdot \end{pmatrix}, \quad J_1^G = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 10\\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & 3 & 2 & \cdot \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Для игры (18) найдем сначала множества A_1^G, A_2^G и $A^G = A_1^G \cap A_2^G$ наислабейших всегда существующих равновесий:

$$A_1^G = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & +\\ + & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & + & + & \cdot \end{pmatrix}, \quad A_2^G = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & +\\ + & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & + & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$A^G = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & +\\ + & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & + & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Определим, далее, более сильные базовые равновесия:

$$B_1^G = B_2^G = B^G = (a_{14}, a_{21}, a_{42}). \tag{19}$$

Таким образом, во вспомогательной игре (18) с платежными функциями J_i^G на множестве G уже три (а не как раньше — всего две) ситуации B^G оказываются наисильнейшими эквивалентными равновесиями, среди которых не удается выделить единственное наисильнейшее равновесие.

Кооперативное решение в игре (18) находится по аналогии с решением (17), но с учетом трех эквивалентных наисильнейших равновесий, и оказывается равным:

$$x_1 \approx 8{,}3, \quad x_2 \approx 4{,}7. \tag{20}$$

Из сравнения этого решения с решением (17) видно, что побочные доходы участников могут оказывать весьма заметное влияние на решение подобных игр.

Если сильные угрозы в игре (13) допустимы, то кооперативный дележ дается формулами (17), а если не допустимы, то формулами (20).

Пример 2. Пусть в игре с двумя участниками каждый из них максимизирует свою (матричную) платежную функцию

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5\\ \cdot & 3 & \cdot\\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 5 & \cdot & 4\\ 7 & 2 & 6\\ \cdot & 3 & 1 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Оба игрока располагают тремя стратегиями: первый игрок выбирает одну из трех строк, а 2-й — один из трех столбцов. В этой задаче

$$\begin{aligned} G_1 &= (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{32}, a_{33}),\\ G_2 &= (a_{11}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{32}, a_{33}),\\ G &= (a_{11}, a_{13}, a_{22}, a_{32}, a_{33}). \end{aligned}$$

Игровое множество G' включает все 9 элементов матриц.

Для задачи (21) найдем предварительно матрицы A_1, A_2, A наиболее слабых равновесий в естественном классе слабых угроз (т. е. рассмотрим вспомогательную задачу 1-го типа):

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cdot & + & + \\ \cdot & + & \cdot \\ + & \cdot & + \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot \\ + & + & \cdot \\ \cdot & + & \cdot \end{pmatrix}, \quad A = \varnothing.$$

Поскольку множество A оказалось пустым, то, прежде чем обращаться к сильным угрозам, найдем сначала оптимальные (равновесные) множества из определений 2–5: $P^a = G, \overline{P}^a = (a_{11}, a_{13}, a_{33})$, среди которых, можно ожидать, удастся найти наисильнейшее равновесие в игре (21).

Обратимся теперь к поиску множества A-равновесий в случае допущения в задаче сильных угроз. Так как в платежных матрицах (21) отсутствуют ситуации, в которых одновременно у обоих игроков платежные функции не определены, то угрозы (3) в этой задаче невозможны и следует рассмотреть только угрозы (4). Прежде всего находим

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cdot & + & + \\ \cdot & + & \cdot \\ + & + & + \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} + & \cdot & + \\ + & + & + \\ \cdot & + & + \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & + \\ \cdot & + & \cdot \\ \cdot & + & + \end{pmatrix}.$$

Далее, на основе определения 8 получаем

$$B_1 = (a_{13}, a_{22}, a_{32}), \quad B_2 = (a_{\partial 11}, a_{22}, a_{33}), \quad B = a_{22}.$$

Таким образом, наиболее сильным равновесием оказывается ситуация a_{22}. Учитывая, что кооперативный выигрыш в этой игре реализуется в ситуации a_{13} и равен 9, найдем оптимальный (справедливый) дележ кооперативного дохода (всецело зависящего от ситуации наисильнейшего равновесия a_{22}), задаваемого формулой (4) из [8] или формулой (4.2) из [2, с. 174]:

$$x_1 = 9 \cdot \frac{3}{5} = \frac{27}{5} = 5{,}4, \quad x_2 = 9 \cdot \frac{2}{5} = \frac{18}{5} = 3{,}6. \quad (22)$$

Так что в случае допущения в игре (21) сильных угроз справедливый дележ кооперативного дохода должен производиться по формулам (22).

Чтобы в явном виде оценить влияние побочных доходов на решение игры, рассмотрим еще и вспомогательную задачу на пересечении игровых множеств

$$G = G_1 \cap G_2,$$

т. е. именно на том множестве, на котором игроки явно вступают в конфликт друг с другом (заметим, что для задач на G-сильные угрозы (2) не существуют, а еще более сильные угрозы (3) можно трактовать как выход обоих участников из игры, что едва ли интересно):

$$J_1^G = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & 5 \\ \cdot & 3 & \cdot \\ \cdot & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad J_2^G = \begin{pmatrix} 5 & \cdot & 4 \\ \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & 3 & 1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Для этой вспомогательной игры находим:

$$A_1^G = \begin{pmatrix} + & \cdot & + \\ \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & + \end{pmatrix}, \quad A_2^G = \begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot \\ \cdot & + & \cdot \end{pmatrix},$$

$$A^G = \begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Далее, имеем

$$B_1^G = (a_{11}, a_{22}, a_{33}), B_2^G = (a_{11}, a_{22}) = B^G,$$

причем и более сильные понятия равновесия из [1–3, 6–9] не позволяют из пары наисильнейших равновесий (a_{11}, a_{22}) выделить наисильнейшее равновесие, в связи с чем эти два равновесия следует считать эквивалентными. Причем тот факт, что ситуация a_{11} обладает несколько более сильными локально-паретовскими свойствами по сравнению с ситуацией a_{22} (поскольку ситуация a_{11} является $\overline{P}^a$-оптимальной, в то время как a_{22} — всего лишь P^a-оптимальна), явно недостаточен с точки зрения теории конфликтных задач [1–3], чтобы принять, что ситуация a_{11} сколько-нибудь заметно сильнее ситуации a_{22}.

В этом случае справедливый дележ кооперативного дохода во вспомогательной игре (23) определяется по формуле (5) из [8] или по формуле (4.3) из [2, с. 175] и равен

$$x_1 = 9\frac{(1+3)}{(1+3)+(5+2)} \approx 3{,}3, \qquad x_2 = 9\frac{(5+2)}{(1+3)+(5+2)} \approx 5{,}7, \quad (24)$$

причем он существенно отличается от решения (22).

Таким образом, оказывается, что побочные доходы могут весьма существенно влиять на решение конфликтных задач, если в задаче допустимо использование сильных угроз. А поскольку очевидно, что сильные угрозы (2) в задачах на едином для участников игровом множестве (а следовательно, и на множестве G) не существуют, то в случае допущения в конфликтной задаче только слабых угроз (1) единственным решением задачи (22) оказывается только решение (24).

Приведенные примеры наглядно демонстрируют, что влияние на результат игры как побочных доходов участников, так и возможности использования ими разных угроз может в ряде случаев быть весьма существенным.

Таким образом, теорию конфликтных равновесий, построенную в [1–3] для задач на едином для всех участников игровом множестве, удается распространить на задачи с частично пересекающимися игровыми множествами несмотря даже на то, что в последних A-равновесие может оказываться пустым.

Литература

1. *Смольяков Э. Р.* Теория конфликтных равновесий. М.: URSS, 2005.
2. *Смольяков Э. Р.* Методы решения конфликтных задач. М.: МГУ, 2010.
3. *Смольяков Э. Р.* Обобщенное оптимальное управление и динамические конфликтные задачи. М.: МГУ, 2010.
4. *Воробьев Н. Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, 1984.
5. *Вайсборд Э. М.*, *Жуковский В. И.* Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. М.: Советское радио, 1980.
6. *Смольяков Э. Р.* Конфликтные индивидуально-паретовские равновесия // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 1. С. 139–145.
7. *Смольяков Э. Р.* Конфликтно устойчивые Парето-подобные равновесия // ДАН. 2009. Т. 429. № 1. С. 31–34.
8. *Смольяков Э. Р.* Понятие справедливого дележа в кооперативных играх и его поиск // Кибернетика и системный анализ. 2008. № 6. С. 131–141.
9. *Смольяков Э. Р.* Теория антагонизмов и дифференциальные игры. М.: URSS, 2000.

Смольяков Владимир Эдуардович. Главный специалист подразделения ИСА РАН. Окончил Международную академию оценки и консалтинга в 2005 г. Количество печатных работ: 14. Область научных интересов: моделирование систем.

Смольяков Эдуард Римович. Д. ф.-м. н., профессор МГУ. Окончил МФТИ в 1962 г. Количество печатных работ: 225, монографий — 10. Область научных интересов: теория конфликтов и игр, оптимальное управление, теоретическая физика, философия эзотеризма.
E-mail: ser-math@rambler.ru