Идентификация параметров стохастического дифференциального уравнения*

М. Вуйтович, В. В. Дикусар

Аннотация. Данная работа посвящена разработке «неклассических» методов параметрической идентификации для квазистационарных обьектов, представленных в виде стохастических дифференциальных уравнений. При этом используются метод максимального правдоподобия, метод «хи-квадрат», метод Колмогорова—Смирнова и численное моделирование.

Ключевые слова: *стохастические дифференциальные уравнения, параметрическая идентификация, метод максимального правдоподобия, метод «хи-квадрат», метод Колмогорова Смирнова, численное моделирование.*

Введение

Одним из эффективных методов построения моделей сложных объектов, к которым можно отнести системы управления, на основании наблюдений является идентификация. Теории и методам идентификации посвящено большое число работ. В качестве примера можно привести работы Вапника В. Н., Ивахненко А. Г., Райбмана Н. С., Расстригина Л. Л., Эйкхоффа П., Филатовой Д. В. ([1–6]). Сложные объекты управления характеризуются следующими свойствами: наличием большого числа составляющих элементов и связей между ними; слабой структурированностью; наличием количественных и качественных характеристик; отсутствием полной информации о внешней среде и о связях между параметрами; наличием ошибок в полученных данных; необходимостью использования множества моделей и языков для своего описания.

Часто для такого класса объектов невозможно определить точную модель функционирования. В этом случае строится приближенная модель, которая аппроксимирует истинную зависимость. При этом задача идентификации состоит в выборе моделей из имеющихся классов на основе экспериментальных данных, априорной информации и цели моделирования.

Всю информацию об объекте можно разделить на две части: априорную и апостериорную. Априорная информация — это информация, которая имеется до начала процесса идентификации и должна содержать в себе структуру идентифицируемого объекта и сведения о классе моделей, описывающих данный объект. К апостериорной информации относятся результаты наблюдений входов и выходов объекта.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 10–08–00624, 11–07–00201-а).

В зависимости от априорной информации об объекте управления различают задачи идентификации в узком и широком смысле. Задача идентификации в узком смысле состоит в оценивании параметров объекта по наблюдениям за входными и выходными переменными, описывающими состояние объекта. При этом известна структура объекта и задан класс моделей, к которым относится данный объект. Идентификация в широком смысле включает в себя решение таких задач, как оценка структуры и параметров модели, степени стационарности и возможности представления конкретного объекта стационарной моделью, степени линейности и возможности использования линейной модели; выбор информативных входных переменных; оценка степени идентичности модели реальному объекту. В данной работе рассматривается идентификация в узком смысле.

Задача и процедура идентификации, то есть задача построения модели объекта, отражающей качественные и количественные связи объекта, решаются в зависимости от вида объекта. В работе рассматриваются квазистационарные объекты. Для объектов такого вида предполагается, что параметры их меняются достаточно медленно, чтобы в процессе идентификации не считаться с этим изменением. Благодаря этому свойству модель квазистационарного объекта может быть восстановлена в некоторый момент времени по экспериментальным данным, полученным на первой половине интервала стационарности, и использоваться для управления в пределах второй половины этого интервала. Такие объекты могут быть описаны различными моделями, например регрессионными уравнениями или стохастическими дифференциальными уравнениями. Необходимо отметить, что для квазистационарных объектов параметр времени также формально можно отнести к наблюдаемым переменным, рассматривая этот параметр как одну из компонент вектора входных переменных.

Не смотря на то, что существует значительное число методов параметрической идентификации квазистационарных объектов, остается множество нерешенных задач, к которым можно отнести параметрическую идентификацию объектов, требующих для своего описания, например, мультипликативных моделей или моделей, представленных в виде стохастических дифференциальных уравнений. Прежде эта ситуация была вплотную связана с невозможностью проведения трудоемких вычислений на ЭВМ, однако, теперь уровень развития вычислительной техники позволяет сделать следующий шаг в повышении эффективности решения задач идентификации рассматриваемого класса систем за счет интенсивного использования методов численного моделирования и новых результатов, полученных в теории управления.

Данная работа посвящена разработке «неклассических» методов параметрической идентификации.

1. Метод максимального правдоподобия

Рассмотрим процесс, описанный уравнением

$$\frac{dS}{dt} = rS \tag{1}$$

с начальными условиями $t = 0$ и $S = S_0$.

Используя подстановку $y = \ln\,(S/S_0)$, получим запись модели в виде уравнения:

$$r = \frac{dy}{dt}, \tag{2}$$

где $t = 0$ и $y = 0$ — начальные условия.

Пусть r будет задана в виде суммы двух величин: некоторой постоянной величины и величины, описывающей шум (флуктуацию)

$$r = \mu + \mu'. \tag{3}$$

Флуктуация μ' будет рассматриваться как стохастических процесс в виде белого шума с нулевым средним и стационарной функцией автокорреляции, заданной через дельту функцию Дирака, умноженную на некоторую постоянную. Тогда такое представление вызывает то, что постоянная r может меняться бесконечно быстро. Белый шум не имеет физической реализации, так как ни один процесс не может измениться с бесконечной скоростью. Не смотря на это, белый шум часто используют для описания физических систем, заменяя его процессом Винера. Процесс Винера имеет нулевое математическое ожидание и стационарные независимые приращения. Не смотря на то, что процесс Винера не является дифференцируемым, может быть формально показано, что его производные являются белым шумом. В этом случае уравнение (1) для S переходит в

$$dS = f dt + g dW, \quad f = \mu S, \quad g = \sigma S, \tag{4}$$

dW — процесс Винера с дисперсией $E[dW dW] = \sigma^2 dt$ (так как dW — процесс Винера, то $E[dW] = 0$ и $D[dW] \overset{def.}{=} E[(dW - E[dW])^2] = E[(dW)^2]$).

Стохастический интеграл в определении Ито есть

$$\int\limits_a^b g[W(t), t]\, dW = \\ = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{N-1} g[W(t_i), t_i][W(t_{i+1}) - W(t_i)], \tag{5}$$

где $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = b$ — разделение интервала $[a, b]$ с шагом $\Delta t = \max_i(t_{i+1} - t_i)$, lim — «ограничение по среднему» (согласно Язвинскому). В этом случае скорость изменения передаточной функции плотности вероятности p задается обратным уравнением Колмогорова (уравнением Фоккера—Планка)

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial (fp)}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2(g^2 p)}{\partial S^2}, \tag{6}$$

для которого начальные условия имеют вид

$$p(S, 0) = \delta(S_0),$$

что соответствует начальным условиям уравнения (1) Решение уравнения (6) полностью определяет процесс, описываемый уравнением (4).

Оценим значения μ и σ для уравнения (6). Пусть значения процесса S регистрируются в моменты времени $0, t_1, t_2, \ldots, t_N$. Обозначим значения процесса как $S(0) = S_0$, $S(t_1) = S_1$, $S(t_2) = S_2$, ..., $S(t_N) = S_N$, а интервалы между наблюдениями через $t_1 - t_0 = \Delta t_1$, $t_2 - t_1 = \Delta t_2$,..., $t_N - t_{N-1} = \Delta t_N$. Тогда параметры уравнения можно оценить методом максимального правдоподобия:

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{N} \frac{\exp\left\{-\frac{\left[\ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t_i\right]^2}{2\sigma^2\Delta t_i}\right\}}{S_i\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t_i}}. \tag{7}$$

Введем функцию$\widetilde{L}(\mu, \sigma) = \ln\left[L(\mu, \sigma)\right]$. Вычислим те$\mu$ и σ, для которых функция $\widetilde{L}$ достигает локального максимума. В результате имеем:

$$\widetilde{L}(\mu, \sigma) = \sum_{i=1}^{N}\left\{-\frac{\left[\ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t_i\right]^2}{2\sigma^2\Delta t_i} - \right.$$

$$\left. - \ln\left\{S_i\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t_i}\right\}\right\},$$

$$\ln\frac{S_N}{S_0} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_N - t_0) = 0.$$

Так как $t_0 = 0$, то $\mu = \dfrac{1}{t_N}\ln\dfrac{S_N}{S_0} + \dfrac{\sigma^2}{2}$,

$$\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\sigma} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sigma}\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_N - \ln\frac{S_N}{S_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\Delta t_i}\left[\ln\frac{S_i}{S_{i-1}} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t_i\right]^2 - N\right\} = 0,$$

$$\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_N - \ln\frac{S_N}{S_0} +$$

$$+ \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\Delta t_i}\left[\ln\frac{S_i}{S_{i-1}} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t_i\right]^2 - N = 0.$$

Поскольку $\mu = \dfrac{1}{t_N}\ln\dfrac{S_N}{S_0} + \dfrac{\sigma^2}{2}$, получаем

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta t_i\left[\frac{1}{\Delta t_i}\ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) - \frac{1}{t_N}\ln\left(\frac{S_N}{S_0}\right)\right]^2.$$

2. Метод «хи-квадрат»

Пусть в каждый момент времени t имеется m наблюдений. Разобьем эти наблюдения на классы так, как при стандартном тесте согласия. Затем, используя предполагаемую модель стохастического процесса и начальные значения параметров этой модели, сгенерируем n реализаций этого процесса и классифицируем полученные значения согласно первоначальному разбиению. Тогда для каждого момента t времени можно ввести статистику

$$\chi_t^2 = \sum_{j=1}^{r+1}\frac{(m_j - n_j)_t^2}{(m_j + n_j)_t},$$

где m_j — число наблюдений в классе j, n_j — (ожидаемое) число смоделированных данных в классе j, $r+1$ — общее число классов.

Говорят, что выборки имеют один и тот же закон распределения, если

$$\chi_t^2 < \chi_t^2(r),$$

где $\chi_t^2(r)$ — случайная величина, распределенная по закону хи-квадрат с r степенями свободы.

Очевидно, что значения χ_t^2 должны быть как можно меньше, а неравенство выполнятся для каждого значения t. Поэтому, предполагая независимость величины χ_t^2 от времени t, в качестве целевой функции будем использовать следующее выражение:

$$\Phi = \prod_{t=1}^{T}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}\int\limits_{1/2\chi_t^2}^{\infty} y^{r/2-1}e^{-y}\,dy,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма функция.

Целевая функция должна быть максимизирована относительно параметров СДУ.

3. Метод Колмогорова—Смирнова

Пусть в некоторый момент времени t имеются Y и $\widetilde{Y}$ — две независимые непрерывные случайные переменные с распределениями F_Y и $F_{\widetilde{Y}}$ соответственно. Из этих популяций взяты пробы

$$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad \text{и} \quad \widetilde{Y} = (\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, \widetilde{y}_m)$$

эмпирические функции распределения которых определены как

$$F_{Y,n}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y < y_{(1)}, \\ \dfrac{k}{n}, & \text{если} \quad y_{(k)} \leqslant y < y_{(k+1)} \\ & \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \\ 1, & \text{если} \quad y \geqslant y_{(n)}. \end{cases}$$

и

$$F_{\widetilde{Y},m}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y < \widetilde{y}_{(1)}, \\ \dfrac{k}{m}, & \text{если} \quad \widetilde{y}_{(k)} \leqslant y < \widetilde{y}_{(k+1)} \\ & \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots, m-1, \\ 1, & \text{если} \quad y \geqslant \widetilde{y}_{(m)}. \end{cases}$$

Говорят, что в основе Y и $\widetilde{Y}$ лежит одно и тоже распределение, если для всех $y \in \mathrm{Re}$ (Re — множество действительных чисел) супремум разницы между двумя эмпирическим распределениями $F_{Y,n}(y)$ и $F_{\widetilde{Y},m}(y)$

$$D_{n,m} = \sup_{y \in \mathrm{Re}} \left| F_{Y,n}(y) - F_{\widetilde{Y},m}(y) \right|$$

не превосходит статистики Колмогорова—Смирнова

$$KS(D) = 1 - 2\sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j-1} e^{-2j^2 D^2}.$$

Аналогично можно проверить значения статистики Колмогорова—Смирнова в любой момент времени t. Кроме того, большие значения $D_{n,m}$, а следовательно малые значения $KS(D)$, означают отсутствие одинаковой природы распределения двух выборок. Поэтому для идентификации параметров СДУ будем использовать метод, в основе которого лежит целевая функция

$$\Phi = \prod_{t=1}^{T} KS(D_t),$$

которую необходимо максимизировать относительно идентифицируемых параметров.

4. Численное моделирование

Запишем теперь СДУ в общем виде:

$$dy(t) = f(y,t)dt + g(y,t)dW(t),$$

где $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ — произвольные функции, $W(t)$ — стандартный процесс Винера.

Определим несколько специфических СДУ:

$$dy(t) = \mu y(t)dt + \sigma y(t)dW(t), \tag{8}$$

$$dy(t) = y(t)(1-y(t))dt + \sigma y^2(t)dW(t), \tag{9}$$

$$dy(t) = \mu y(t)(1-y(t))dt + \sigma y(t)dW(t), \tag{10}$$

$$dy(t) = \mu y(t)(1-y(t))dt + \frac{1}{5}\sigma y(t)(1-y(t))dW(t), \tag{11}$$

$$dy(t) = y(t)(1-y(t))^{\mu}dt + \frac{1}{2}y^{2\sigma}(t)dW(t), \tag{12}$$

где μ, σ — параметры, которые необходимо идентифицировать.

Уравнение (8) относится к линейным СДУ, а уравнения (9)–(12) к нелинейным СДУ.

Для проверки качества предлагаемых методов идентификации параметров модели необходимо иметь точные значения оценок этих параметров. Из всех перечисленных типов уравнений аналитическое решение имеет только уравнение (8), а это резко осложняет задачу. Однако, для нелинейных СДУ можно получить численные решения, которые достаточно хорошо описывают исходную информацию уравнения, и использовать их как истинные.

Будем использовать две схемы численного решения СДУ: сильную схему Эйлера с сильным порядком сходимости 0,5 и сильную схему Тейлора с сильным порядком сходимости 1,5.

Схема Эйлера:

$$\widetilde{y}(t+1) = \widetilde{y}(t) + f(y,t)\Delta_t + g(y,t)\Delta W(t),$$

где $\widetilde{y}(t)$ — значение $y(t)$, полученное в результате численного решения СДУ; $\Delta_t = \int_{\tau_t}^{\tau_{t+1}} dt = \tau_{t+1} - \tau_t$ — длина временного подинтервала $[\tau_{t+1}, \tau_t]$; $\Delta W(t) = \int_{\tau_t}^{\tau_{t+1}} dW(t) = W_{\tau_{t+1}} - W_{\tau_t}$ — инкремент процесса Винера на подинтервала $[\tau_{t+1}, \tau_t]$ с распределением $N(0, \Delta_t)$.

Схема Тейлора:

$$\begin{aligned} \widetilde{y}(t+1) = \widetilde{y}(t) &+ f(y,t)\Delta_t + g(y,t)\Delta W(t) + \\ &+ \frac{1}{2}g(y,t)g'(y,t)\left\{(\Delta W(t))^2 - \Delta_t\right\} + \\ &+ f'(y,t)g(y,t)\Delta Z_t + \\ &+ \left(f(y,t)f'(y,t) + \frac{1}{2}(g(y,t))^2 f''(y,t)\right)\Delta_t^2 + \\ &+ \left(f(y,t)g'(y,t) + \frac{1}{2}(g(y,t))^2 g''(y,t)\right) \times \\ &\times \{\Delta W(t)\Delta_n - \Delta Z_t\} + \\ &+ \frac{1}{2}g(y,t)\big(g(y,t)g''(y,t) + \\ &+ (g'(y,t))^2\big)\left\{\frac{1}{3}(\Delta W(t))^2 - \Delta_n\right\}\Delta W(t), \end{aligned}$$

где $f'(y,t)$, $g'(y,t)$ — первые производные функций $f(y,t)$ и $g(y,t)$; $f''(y,t)$, $g''(y,t)$ — вторые производ-

Таблица 1

Результаты вычислительного эксперимента

Метод оценивания (критерий)	Способ генерации истинных значений	Среднее значение оцененного параметра	Стандартное отклонение оцененного параметра
χ^2 (1)	схема Тейлора	$\mu = 1{,}0468$ $\sigma = 0{,}5466$	$s_\mu = 0{,}0407$ $s_\sigma = 0{,}0374$
	схема Эйлера	$\mu = 1{,}0420$ $\sigma = 0{,}5412$	$s_\mu = 0{,}0371$ $s_\sigma = 0{,}0345$
KS (1)	схема Тейлора	$\mu = 1{,}0189$ $\sigma = 0{,}5224$	$s_\mu = 0{,}0335$ $s_\sigma = 0{,}0324$
	схема Эйлера	$\mu = 1{,}0152$ $\sigma = 0{,}5192$	$s_\mu = 0{,}0313$ $s_\sigma = 0{,}0299$
χ^2 (2)	схема Тейлора	$\sigma = 0{,}5130$	$s_\sigma = 0{,}0297$
KS (2)	схема Тейлора	$\sigma = 0{,}5189$	$s_\sigma = 0{,}0211$
χ^2 (3)	схема Тейлора	$\mu = 1{,}1257$ $\sigma = 0{,}5832$	$s_\mu = 0{,}0933$ $s_\sigma = 0{,}0564$
KS (3)	схема Тейлора	$\mu = 1{,}0552$ $\sigma = 0{,}5353$	$s_\mu = 0{,}0447$ $s_\sigma = 0{,}0271$
χ^2 (4)	схема Тейлора	$\mu = 1{,}0237$ $\sigma = 0{,}5615$	$s_\mu = 0{,}0267$ $s_\sigma = 0{,}0404$
KS (4)	схема Тейлора	$\mu = 0{,}9906$ $\sigma = 0{,}5155$	$s_\mu = 0{,}0103$ $s_\sigma = 0{,}0310$
χ^2 (5)	схема Тейлора	$\mu = 1{,}0897$ $\sigma = 0{,}5150$	$s_\mu = 0{,}0847$ $s_\sigma = 0{,}0168$
	схема Эйлера	$\mu = 1{,}0823$ $\sigma = 0{,}5125$	$s_\mu = 0{,}0873$ $s_\sigma = 0{,}0145$
KS (5)	схема Тейлора	$\mu = 1{,}0418$ $\sigma = 0{,}5009$	$s_\mu = 0{,}0455$ $s_\sigma = 0{,}0145$

ные функций $f(y,t)$ и $g(y,t)$ (предполагается существование первой и второй производных функций $f(y,t)$ и $g(y,t)$); ΔZ_t — случайная составляющая, имеющая нормальный закон распределения с параметрами $N(0, 1/3\Delta_t^3)$ и ковариацию $M\{\Delta Z_t \Delta W(t)\} = 1/2\Delta_t^2$.

Прежде чем описывать схему вычислительного эксперимента, необходимо определить способ моделирования процесса Винера и генерации случайных составляющих с заданными характеристиками.

Определим процесс Винера $W = \{W(t), t \geqslant 0\}$ как непрерывный процесс Гаусса с независящими инкрементами такой, что $W(0) = 0$ с вероятностью единица, $M\{W(t)\} = 0$, $D\{W(s) - W(t)\} = t - s$ для всех $0 \leqslant s \leqslant t$.

Согласно этому определению $W(s) - W(t)$ имеет нормальное распределение с параметрами $N(0; t-s)$.

Большинство пакетов прикладных программ имеют встроенный генератор псевдослучайных чисел. Как правило эти числа имеют равномерное распределение. Для получения желаемого (в нашем случае нормального распределения с заданными параметрами) можно использовать методы, преобразующие равномерное распределение в требуемое. Для генерирования двух независимых случайных нормально распределенных величин будем использовать такой подход:

- при помощи встроенного датчика псевдослучайных чисел сгенерировать две случайные величины v_1 и v_2, имеющие равномерный закон распределения $U(0,1)$ и удовлетворяющие условию
$$w = v_1^2 + v_2^2 \leqslant 1,$$
где w имеет равномерный закон распределения $U(0,1)$, а величина $\varphi = \arctan(v_1/v_2)$ — с параметрами $U(0, 2\pi)$ (используя свойства единичной окружности и тот факт, что $\cos\varphi = v_1/\sqrt{w}$

и $\sin\varphi = v_2/\sqrt{w}$, $w = v_1^2 + v_2^2 \leqslant 1$ действительно имеет место);

- используя полученные значения v_1 и v_2, вычислить значения двух независимых случайных нормально распределенных величин

$$g_1 = v_1\sqrt{\frac{-2\ln(w)}{w}}$$

и

$$g_2 = v_2\sqrt{\frac{-2\ln(w)}{w}}.$$

Для генерирования пары коррелированных случайных нормально распределенных величин с заданными характеристиками (таких, как в схеме Тейлора) будем использовать следующую процедуру:

- сгенерировать пару псевдослучайных гауссовых величин g_1 и g_2;
- преобразовать g_1 и g_2 с учетом заданных характеристик. Для схемы Тейлора такое преобразование можно выполнить как

$$\Delta W_t = \sqrt{\Delta_t} g_1$$

и

$$\Delta Z_t = \frac{1}{2}\Delta^{3/2}\left(g_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} g_2\right).$$

Вычислительный эксперимент (см. табл. 1) был выполнен при следующих условиях. Входная переменная t менялась от 0 до 100, начальное значение выходной переменной составляло $y(0) = 0{,}5$, истинные значения параметров $\mu = 1{,}0$ и $\sigma = 0{,}5$, количество реализаций каждой ветви составило m=100.

Литература

1. *Вапник В. Н.* Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. М.: Наука, 1979. 448 с.
2. *Ивахненко А. Г.*, *Жолпарский А. А.* Оценка коэффициентов полиномов в параметрических алгоритмах МГУА по улучшенному методу инструментальных переменных // Автоматика. 1992. № 3. С. 25–33.
3. *Льюинг Л.* Идентификация систем. Теория пользователя. М.: Наука, 1991. 432 с.
4. *Райбман Н. С.* Что такое идентификация? М.: Наука, 1970. 345 с.
5. *Расстригин Л. А.*, *Маджаров Н. Е.* Введение в идентификацию объектов управления. М.: Энергия, 1977. 216 с.
6. *Дикусар В. В.*, *Филатова Д. В.* Идентификация параметров стохастических дифференциальных уравнений // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. Выпуск 6 (8). М.: ВЦ РАН. 2004. С. 12–29

Вуйтович Марек. Доцент Радомского технического университета, г. Радом, Польша, к. ф.-м. н. Окончил Радомский технический университет в 2000 г. Область научных интересов: математическое моделирование, численные методы, оптимальное управление, теория и методы устойчивости.
E-mail: mar.wojtowicz@gmail.com

Дикусар Василий Васильевич. Гл. н. с. ВЦ РАН, д. ф.-м. н. Окончил МФТИ в 1966 г. Количество печатных работ: более 126. Область научных интересов: математическое моделирование, численные методы, опт. управление, теория и методы устойчивости, распределенные вычисления, исследование операций.
E-mail: dikussar@yandex.ru