

Динамические системы

Численное исследование перехода к турбулентности в задаче о двумерном течении вязкой сжимаемой проводящей жидкости в канале с симметричным расширением*

Н. М. Евстигнеев, Н. А. Магницкий, О. И. Рябков

Аннотация. В работе рассматривается численный анализ появления и трансформации начальных возмущений в задаче о течении вязкой слабосжимаемой проводящей жидкости в канале с симметричным расширением при малых числах Маха ($M < 0,2$). Для моделирования течения жидкости используются интегро-дифференциальные уравнения Больцмана, разложенные по числу Кнудсена. Для моделирования уравнений магнитной динамики используется векторный аналог уравнения Больцмана. Разложение системы интегро-дифференциальных уравнений по малому параметру дает приближение магнитной гидродинамики для слабосжимаемой жидкости.

Ключевые слова: вязкая несжимаемая жидкость, турбулентность.

Введение

Настоящее исследование продолжает серию работ по применению бифуркационного подхода Фейгенбаума—Шарковского—Магницкого к задачам о различных течениях жидкостей (см., например, [1–3]). В данной работе мы рассматриваем течение проводящей жидкости в канале с симметричным расширением (симметричным уступом). Изучением поведения жидкостей и газов, обладающих свойствами проводимости во внешнем магнитном поле, занимается специальный раздел физики — магнитная гидродинамика (МГД), см. [4, с. 313]. К области применения МГД относятся плазма, жидкие металлы, электролиты и т. д.

Существуют различные подходы к описанию явлений МГД, а также различные методы численного решения соответствующих систем уравнений. В данной работе мы используем так называемый метод сеточного уравнения Больцмана (подробнее см. след. раздел),

что прежде всего связано с его высокой производительностью, необходимой для бифуркационного анализа задачи. В [3] этот метод уже был использован нами при исследовании гидродинамического течения.

В цели данной работы входило: реализовать и протестировать на общеизвестных задачах метод решения зависящих от времени уравнений МГД; применить этот метод для выбранной начально-краевой задачи (двумерное течение в канале с симметричным расширением); обнаружить начальные стадии перехода к турбулентности (хаосу) в рассматриваемой задаче (рождение периодических, квазипериодических, субгармонических решений и т. д.); сопоставить обнаруженный сценарий с ФШМ-сценарием перехода к хаосу.

1. Исходные уравнения, магнитогидродинамическое приближение, численный метод решения

Основная идея применения метода Больцмана на дискретных ячейках (сеточного метода Больцмана)

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 09–07–00078а и 11–07–00126а).

заключается в отображении уравнений изучаемой нелинейной макроскопической системы в дискретное фазовое пространство более высокой размерности с получением кинетических уравнений относительно функций вероятности распределения f_q , которые алгоритмически легко решаются и распараллеливаются (см. [5]). Сложные с вычислительной точки зрения нелинейные операторы адвективного переноса вида $(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U}$ и $(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ (где \mathbf{U} — скорость жидкости и \mathbf{B} — индукция магнитного поля), а также нетривиальное замыкание связи между давлением и скоростью жидкости (либо жесткая система через уравнение состояния, либо уравнение Пуассона для скалярной функции давления) заменяются на простые операторы линейного переноса и локальные операторы соударения для f_q в фазовом пространстве. Более детально сеточный метод Больцмана описан в [5–7].

Начально-краевую задачу МГД можно рассматривать отдельно как гидродинамическую задачу с возмущающим силовым членом и магнитодинамическую задачу (с кососимметричным тензором). Метод численного решения гидродинамической части для данного класса задач нелинейного анализа рассмотрен в работе [3], где для этого используются дискретные кинетические уравнения:

$$\frac{\partial f_q}{\partial t} + e_q \cdot \nabla_x f_q = -\frac{f_q - f_q^{(0)}}{\tau} + \frac{a \cdot (e_q - U)}{C_s^2} f_q^{(0)}. \quad (1)$$

В уравнении (1) функция $f_q : \Omega \times [0, t] \times N \rightarrow \mathbb{R}$ — дискретная функция вероятности распределения; $f_q^{(0)}$ — значение равновесного распределения и для данного оператора соударения является Максвеллианом, зависящим от макроскопических функций жидкости (плотность, скорость); $U : \Omega \times [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^2$ — вектор-функция скорости жидкости; e_q — микроскопическая скорость направления q ; $\rho : \Omega \times [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ — скалярная функция плотности; τ — время релаксации, связано с макроскопической динамической вязкостью, и, следовательно, числом Рейнольдса; $C_s = 1/3$ — скорость распространения возмущений для заданной дискретной ячейки для f_q ; $q \in \{0, \dots, N\}$; ω_q — весовые квадратурные коэффициенты (см. [3, 5, 6]); N — размерность дискретного фазового пространства, зависящая от выбранной дискретной ячейки. Для двумерной (плоской) задачи, рассматриваемой в данной работе, выбирается $N = 8$ (по классификации методов ячейка D2Q9), как наиболее точный дискретный шаблон ячейки для f_q в двумерном случае. Тогда выбранная ячейка будет иметь 9 направлений $q \in \{0, 1, \dots, 8\}$ и вектор микроскопической скорости определяется как:

$$e_q = \frac{\Delta h}{\Delta t} \left\{ \cos\left(\frac{2\pi q}{N}\right); \sin\left(\frac{2\pi q}{N}\right) \right\},$$

где Δh — сторона ячейки а Δt — шаг по времени. Для данной задачи выбирается $\Delta h/\Delta t = 1$. Связь между микроскопическими и макроскопическими функциями производится путем расчета моментов различного порядка. Под моментом порядка m обычно (см. [5, 7]) понимается интеграл вида

$$M_{\underbrace{\alpha, \beta, \dots, \chi}_m} = \int \left[\underbrace{e_\alpha e_\beta \dots e_\chi}_m f(\mathbf{x}, \mathbf{e}, t) \right] dV$$

и, на выбранном шаблоне, его дискретное представление:

$$M_{\underbrace{\alpha, \beta, \dots, \chi}_m} = \sum_{q=0}^N \left[\underbrace{e_{q\alpha} e_{q\beta} \dots e_{q\chi}}_m f_q(\mathbf{x}, e_q, t) \right].$$

Момент нулевого порядка соответствует плотности жидкости $\rho = M(\mathbf{x}, t)$, моменты первого порядка соответствуют импульсу $\rho U_i(\mathbf{x}, t) = M_i(\mathbf{x}, t)$, момент второго порядка — тензору количества движения $\Pi_{jk}(\mathbf{x}, t) = M_{jk}(\mathbf{x}, t)$. Моменты более высоких порядков не имеют смысла в классической гидродинамике и относятся к цепочкам уравнений более высокого класса [5]. Эти цепочки уравнений высших моментов проявляются при больших волновых числах и влияют на устойчивость численного метода в случае недостаточной дискретизации расчетной области («ультрафиолетовая катастрофа»), и для задач с высокими числами Рейнольдса требуют дополнительной стабилизации, см., например, [7, 8]. Для рассматриваемого класса задач данные цепочки уравнений нивелируются повышением количества элементов в области расчета (см. [3]). Подстановка вышеуказанных моментов в (1) и разложение полученных уравнений по малому параметру позволяет получить уравнения сохранения массы и количества движения. Сформулируем соответствующее утверждение. Для этого используем разложение дискретной функции вероятности в ряд по так называемому сеточному числу Кнудсена $\epsilon = \lambda/L$ (здесь λ — сеточная длина свободного пробега, L — характерный размер задачи):

$$f_q = f_q^{(1)} + \epsilon f_q^{(2)} + \epsilon^2 f_q^{(3)} + \dots \quad (2)$$

Обратим внимание на тот факт, что данное разложение является формальным (т. е. не является разложением функции в ряд Тейлора) и его члены определяются исходя из систем уравнений, получающихся в результате подстановки (2) в уравнения (1) и приравнивания соотношений при одинаковых степенях ϵ , а также системы дополнительных условий,

определяющих их моменты:

$$\begin{aligned} \sum_{q=0}^N f_q^{(1)}(\mathbf{x}, e_q, t) = \rho; \quad \sum_{q=0}^N e_{q\alpha} f_q^{(1)}(\mathbf{x}, e_q, t) = \rho U_\alpha; \\ \sum_{q=0}^N f_q^{(n)}(\mathbf{x}, e_q, t) = 0; \quad \sum_{q=0}^N e_{q\alpha} f_q^{(n)}(\mathbf{x}, e_q, t) = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

для $n > 1$.

Заметим, что условиям на моменты для $f_q^{(1)}$ всегда подчиняются и равновесные дискретные функции распределения $f_q^{(0)}$. Точнее они выбираются таким образом, чтобы эти соотношения выполнялись, причем макроскопические величины (плотность и импульс) определяются как соответствующие моменты дискретных функций распределения в данной точке \mathbf{x} . Подробнее см. [9]. На данный момент у нас имеются все определения и соотношения, чтобы сформулировать следующее

Утверждение. При указанных выше предположениях относительно дискретной функции распределения из уравнений (1) следуют:

1. закон сохранения массы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial(\rho U_\beta)}{\partial x_\beta} = 0;$$

2. закон сохранения момента импульса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho U_\alpha)}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial(\rho U_\alpha U_\beta)}{\partial x_\beta} = \\ = - \sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial P_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta} + \sum_{\beta=1}^2 \frac{a_\beta}{C_s^2} (\Pi_{\alpha,\beta}^{(0)} - \rho U_\alpha U_\beta), \end{aligned}$$

причем тензор давления $P_{\alpha,\beta}$ определен как:

$$P_{\alpha,\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \sum_{q=0}^N (e_{q\alpha} - U_\alpha)(e_{q\beta} - U_\beta) f_q^{(n+1)}.$$

Доказательство. Для доказательства п. 1 данного утверждения достаточно в уравнении (1) внести e_q под знак дифференцирования и просуммировать уравнение по q . Получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sum_{q=0}^N f_q)}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial(\sum_{q=0}^N e_{q\beta} f_q)}{\partial x_\beta} = \\ = - \frac{\sum_{q=0}^N f_q - \sum_{q=0}^N f_q^{(0)}}{\tau} + \frac{a \cdot (\sum_{q=0}^N e_q f_q^{(0)} - U \sum_{q=0}^N f_q^{(0)})}{C_s^2}, \end{aligned}$$

где суммирование по пространственному индексу β в правой части заменено для краткости значком скалярного произведения. Далее необходимо учесть, что

$$\sum_{q=0}^N f_q = \sum_{q=0}^N f_q^{(0)} = \rho \quad \text{и} \quad \sum_{q=0}^N e_{q\beta} f_q = \rho U_\beta.$$

Правая часть при этом обнулится, и мы приходим к закону сохранения массы.

Для доказательства п. 2 необходимо привлечь разложение (2). Подставим его в уравнение (1), умножим каждое уравнение на $e_{q\alpha}$ и вновь просуммируем по q . Учтем сразу, что

$$\sum_{q=0}^N e_{q\alpha} f_q = \sum_{q=0}^N e_{q\alpha} f_q^{(0)} = \rho U_\alpha:$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho U_\alpha)}{\partial t} = - \sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial(\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \sum_{q=0}^N e_{q\alpha} e_{q\beta} f_q^{(n+1)})}{\partial x_\beta} + \\ + \sum_{\beta=1}^2 \frac{a_\beta}{C_s^2} \left(\sum_{q=0}^N f_q^{(0)} e_{q\alpha} e_{q\beta} - \rho U_\alpha U_\beta \right). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки в выражении для тензора давления $P_{\alpha,\beta}$ получим:

$$\begin{aligned} P_{\alpha,\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \sum_{q=0}^N e_{q\alpha} e_{q\beta} f_q^{(n+1)} - U_\alpha \sum_{q=0}^N e_{q\beta} f_q - \\ - U_\beta \sum_{q=0}^N e_{q\alpha} f_q + U_\alpha U_\beta \sum_{q=0}^N f_q = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \sum_{q=0}^N e_{q\alpha} e_{q\beta} f_q^{(n+1)} - \rho U_\alpha U_\beta. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение под знак дифференциала в правой части предыдущего выражения, завершаем доказательство. \square

Данное утверждение имеет большое значение с точки зрения сопоставления результатов, полученных нами сеточным методом Больцмана с решениями макроскопических уравнений МГД, которые будут приведены ниже. В целом, данный вопрос соотношения результатов получаемых этими двумя методами даже для гидродинамики является довольно сложным и не до конца изученным (см. [9]).

Значение возмущающей силы a в (1), как видно из формулы, можно перенести в расчет значения $f_q^{(0)}$. Тогда, как показано в [10], равновесное распределение уже с учетом влияния вектора магнитной индукции (силы Лоренца), переписется как:

$$\begin{aligned} f_q^{(0)}(\rho, \mathbf{U}, \mathbf{B}) = \rho \omega_q \left(1 + 3\mathbf{e}_q \mathbf{U} + \frac{9}{2}(\mathbf{e}_q \mathbf{U})^2 - \frac{3}{2} \mathbf{U}^2 \right) + \\ + \frac{9}{2} \omega_q \left(\frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \mathbf{e}_q^2 - (\mathbf{e}_q \mathbf{B})^2 - \frac{1}{6} \mathbf{B}^2 \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Для описания уравнений Максвелла, Деллар предложил также использовать кинетические уравнения высоких порядков для вектора магнитного поля \mathbf{B} , как и при описании гидродинамической части [10]. Отличие заключается в том, что в соответствии с уравнениями Максвелла, условие соленоидальности

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

должно строго выполняться, поскольку иначе в магнитной части возможно появление нефизических «монополей». Для этого вводятся векторные функции распределения \mathbf{g}_q так, чтобы нулевой момент \mathbf{g} от этих функций давал вектор магнитной индукции:

$$B_i = G_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{q=0}^M g_{iq}; \quad i = \{x, y\}, \quad (5)$$

и кинетические уравнения запишутся как:

$$\frac{\partial \mathbf{g}_q}{\partial t} + c_q \cdot \nabla_x \mathbf{g}_q = -\frac{\mathbf{g}_q - \mathbf{g}_q^{(0)}}{\tau_m}. \quad (6)$$

Тогда первый момент \mathbf{g} будет аналогичен второму моменту \mathbf{M} , т. е. будет соответствовать тензору напряжений, но в отличие от тензора напряжений в уравнении количества движения, из-за первой степени момента тензор напряжений в уравнении магнитной динамики является антисимметричным, т. е.:

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} &= \left(P + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \right) \delta_{ij} + \rho u_i u_j - B_i B_j; \\ \Lambda_{ij} &= G_{ij} = \sum_{q=0}^M [g_{qi} c_{qj}] = u_i B_j - u_j B_i, \end{aligned} \quad (7)$$

таким образом

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ji}, \quad \Lambda_{ij} = -\Lambda_{ji}.$$

Здесь и в (6): $q \in \{0, \dots, M\}$, M — размерность дискретного фазового пространства для уравнений магнитной динамики, при этом $M \neq N$. В данной задаче выбрано $M = 3$; c_q — вектор микроскопической скорости для кинетических уравнений (6), τ_m — магнитное время релаксации, определяющее значение удельного сопротивления жидкости и, следовательно, значение магнитного числа Рейнольдса. В [10] показано, что для получения корректного значения силы Лоренца необходимо применять следующее равновесное распределение для вектора \mathbf{g}_q :

$$g_{iq}^{(0)}(\mathbf{U}, \mathbf{B}) = \omega_q (B_i + c_{jq} (U_j B_i - U_i B_j)). \quad (8)$$

Применяя разложение по малому параметру как для (1) так и для (6) с подстановкой моментов вплоть до третьего порядка можно получить следующую систему уравнений магнитной гидродинамики:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) &= 0; \\ \frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + (U_j \cdot \nabla_j) \rho U_i + \nabla_i (\rho C_s) &= \\ = \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - \mu \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{U}_i \right); \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B});$$

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\nabla \cdot \mathbf{M};$$

$$M_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} |\mathbf{B}|^2 - B_i B_j; \quad i, j = \{x, y\}.$$

Для получения безразмерных уравнений (1) выделяются три группы подобий: число Рейнольдса $Re = \rho L U_0 / \mu$ — отношение динамических сил к вязким, параметр взаимодействия (число Стюарта [11]) $N = \sigma B_0^2 L / (\rho U_0)$ — отношение электромагнитного силового взаимодействия к силе инерции жидкости и магнитное число Рейнольдса $Re_m = \mu_0 \sigma L U_0$ — отношение наведенного магнитного поля к приложенному магнитному полю. Здесь L , U_0 и B_0 — макроскопический характерный размер, скорость жидкости и модуль вектора магнитной индукции, а σ и μ_0 — электропроводность и магнитная проницаемость. Подставив данные комплексы подобий в (1), получим безразмерную систему макроскопических уравнений, при этом $\mu = 1/Re$, $\eta = 1/Re_m$, $\mathbf{J} \times \mathbf{B} \rightarrow N(\mathbf{J} \times \mathbf{B})$, а начально-краевые условия записываются в безразмерном виде. В связи с тем, что моделируются уравнения (1) и (6), а не (1), то пересчет выше записанных критериев подобия в релаксационные времена τ и τ_m выполняется как [3, 10]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} = \mu &= \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \cdot C_s^2 \cdot \Delta t = \frac{\tau}{3} - \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{Re_m} = \eta &= \left(\tau_m - \frac{1}{2} \right) \cdot C_{sm}^2 \cdot \Delta t = \frac{\tau_m}{2} - \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (10)$$

при $\Delta h / \Delta t = 1$.

Для ускорения расчета применялся графический ускоритель Tesla C2050 компании NVIDIA. Эффект ускорения обнаружен при количестве ячеек, большем 500×100 .

Для возможности проведения численных расчетов с высокой точностью используется двойная точность вычислений на графическом процессоре. Заметное ускорение достигается для размеров сеток, больше чем 500×100 . Максимальное ускорение по сравнению с процессорной версией кода (для одного ядра процессора Intel Core 2 Duo) составило 17 раз на сетке 2028×400 .

2. Рассматриваемая начально-краевая задача и тестирование численного метода

В качестве начально-краевой задачи для МГД течения в данной работе рассматривалась двумерная задача о течении в канале с симметричным расширением. Данная задача ранее рассматривалась, например, в [12]. Область Ω из раздела 1 в данном случае является объединением двух прямоугольных областей в \mathbb{R}^2 . Области расположены вдоль оси x (слева направо) таким образом, что центры их примыкающих сторон (параллельных оси y) совпадают (правая сторона левого прямоугольника примыкает к левой стороне правого). Прямоугольники имеют общую ось симметрии — x . Длина и ширина меньшего (расположенного слева) прямоугольника — l и h , большего — L и H . В месте «сочленения» областей (т. е. в месте расширения канала) образуются два симметричных «уступа» размером $(H - h)/2$. Можно выделить три типа граничных условий и соответствующих им границ области Ω : Ω_1 — граничные условия на стенке, Ω_2 — «входные» граничные условия, Ω_3 — «выходные» граничные условия, где Ω_2 — левая сторона меньшей прямоугольной области, Ω_3 — правая сторона большей области, Ω_1 — вся остальная граница Ω (подробнее см. в [12]). На данных границах ставятся следующие условия на макроскопические характеристики среды:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \{0, 0\}, \quad \mathbf{V} = \{0, B\}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \\ \mathbf{U} &= \{U_0(y), 0\}, \quad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n} = 0, \quad \rho = 1 \quad \text{в } \Omega_2, \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n} &= 0, \quad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0 \quad \text{в } \Omega_3. \end{aligned} \quad (11)$$

В Ω_1 мы имеем условие «неприлипания» для скорости и условие Дирихле для индукции магнитного поля, соответствующее внешнему приложенному магнитному полю \mathbf{V} и условию изолирующих (непроводящих) стенок. В качестве $U_0(x)$ берется профиль течения Гартмана (см. ниже). Подробнее о постановке граничных условий для МГД см. в [12] и [13, с. 36].

Перед анализом изложенной задачи построенный численный метод был протестирован на задаче о плоскопараллельном (двумерном) течении между двумя пластинами. Задача ставится в прямоугольной области. С двух противоположных сторон (на стенках) ставятся такие же условия как в Ω_1 . На двух других сторонах ставятся условия Дирихле для давления (плотности) и условия Неймана для скорости и индукции магнитного поля. Данная задача имеет аналитическое решение для системы макроскопических уравнений (1) в виде так называемого течения

Гартмана [13, с. 38]. Последнее аналитическое решение с высокой точностью совпало с численным результатом, полученным с применением использованного в данной работе метода.

3. Результаты

Для выяснения сценария нарастания и трансформации возмущений в диссипативной системе необходимо получить распределение вектор — функции скорости \mathbf{U} и магнитного поля \mathbf{V} за длительный период времени после выхода системы на квазистационарный режим внутри Ω . Для этого было выбрано пять точек внутри Ω с декартовыми координатами

$$x \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{7}, \frac{8}{9}, \frac{1}{3} \right\}; \quad y \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{8}{9}, \frac{1}{2} \right\}$$

в относительных величинах к полным длинам по каждому направлению. По результатам полученных данных строились двумерные подпространства бесконечномерного фазового пространства в координатах составляющих вектор-функции скорости

$$\mathbf{U} = \{U_x, U_y\}$$

и вектора магнитного поля

$$\mathbf{V} = \{B_x, B_y\}.$$

В случае необходимости расширения размерности подпространства использовались данные из указанных выше пяти точек, например,

$$U_x \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right); \quad U_y \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right); \quad U_y \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right).$$

Бифуркационными параметрами системы выступали: число Рейнольдса Re и, следовательно, время релаксации интегрального оператора соударения для уравнений Больцмана и число Гартмана и, следовательно, интенсивность значения вектора \mathbf{V} на границе.

На всех представленных ниже рисунках приведены результаты при значении числа Рейнольдса $Re = 760$ и при значении магнитного числа Рейнольдса $Re_m = 50$. Таким образом, варьируется только интенсивность внешнего приложенного магнитного поля B (определяющая число Гартмана). В целом, происходит усложнение динамики при уменьшении B . Так, при значении магнитного поля $B = 0,5$ в течении имеется устойчивый периодический режим (цикл) (фазовые портреты не показаны). При значении $B = 0,465$ течение становится квазипериодическим (фазовые портреты двумерных торков для

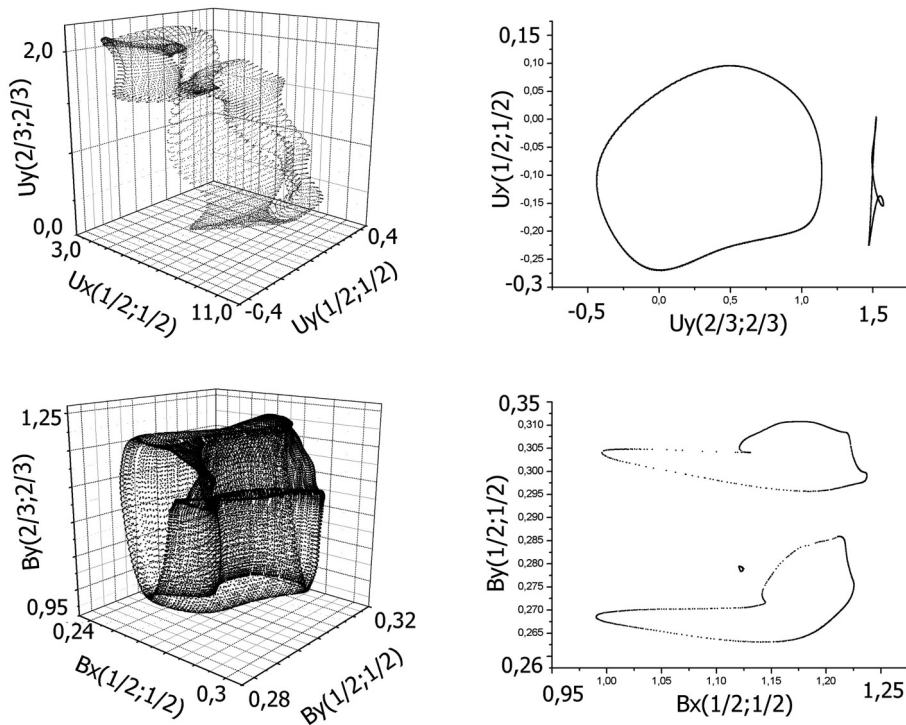


Рис. 1. Фазовые портреты вектор-функций U и V и сечения полученных двумерных торов для $Re = 760$, $Re_m = 50$ и $B = 0,465$

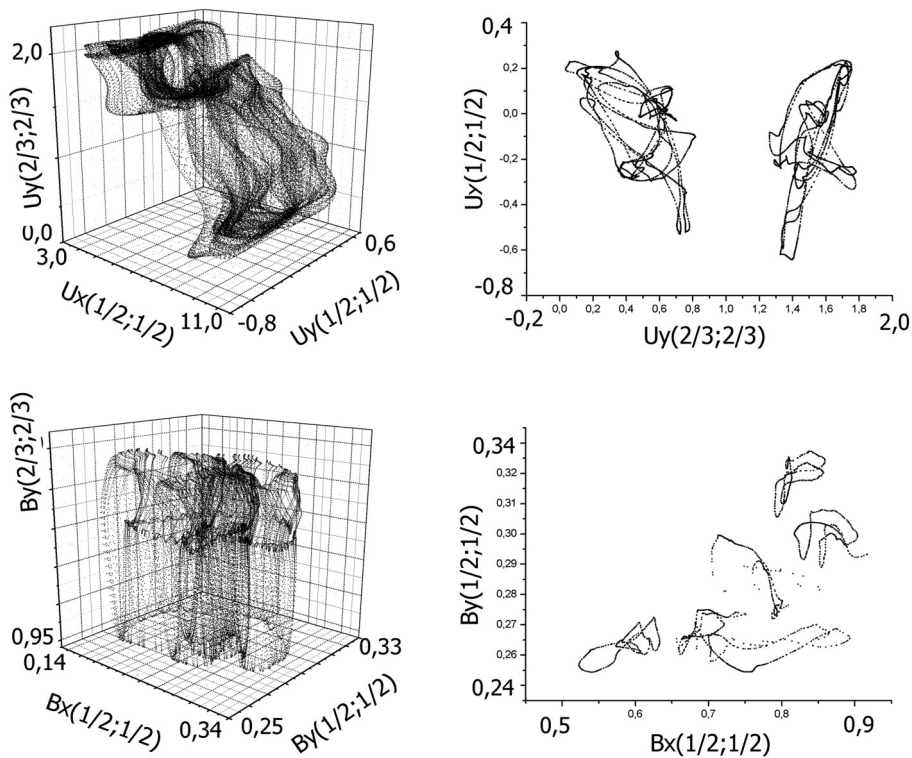


Рис. 2. Фазовые портреты вектор-функций U и V и сечения полученных двумерных торов удвоенного периода для $Re = 760$, $Re_m = 50$ и $B = 0,455$

U и V и замкнутые кривые в сечениях этих токов показаны на рис. 1). При уменьшении значений внешнего магнитного поля это квазипериодическое решение сильно деформируется, и при значении $B = 0,455$ удваивается по одной из частот с образованием двумерного тора удвоенного периода, о чем свидетельствуют фазовые портреты и соответствующие им сечения на рис. 2. Помимо представленных на рисунках решений нами было обнаружено субгармоническое квазипериодическое решение при значениях $Re = 760$, $Re_m = 1$, $B = 0,01$ (т. е. при практически отсутствующем влиянии магнитного поля). Однако относительный период этого решения определить не удалось.

Здесь целесообразно привести физическую интерпретацию некоторых терминов применяемых при бифуркационном анализе систем. Пусть при определенных значениях параметров (в данном случае это числа Рейнольдса и величина приложенного магнитного поля) течение является ламинарным (стационарным по времени). Пусть теперь при переходе одного из параметров через некоторое критическое значение решение начинает осциллировать на определенной частоте. Эту осцилляцию в терминах бифуркационного анализа мы называем периодическим решением (циклом), а сам этот переход от стационарного решения к осциллирующему — бифуркацией Хопфа. Важно отметить, что данные осцилляции являются существенно нелинейными, и они не связаны с каким-либо внешним периодическим возмущением. Их амплитуда и частота определены однозначно при заданных параметрах задачи. Пусть далее при переходе через следующее критическое значение решение становится квазипериодическим, т. е. представимым в виде декартова произведения колебаний на двух различных частотах. При этом в спектре задачи будут видны два резких максимума на соответствующих значениях частот. Такая бифуркация также называется бифуркацией Хопфа. Еще одна часто встречающаяся локальная бифуркация называется удвоением периода. Такая бифуркация соответствует появлению в задаче периодического или квазипериодического решения, один из периодов которого в два раза больше, чем период ранее существовавшего в задаче периодического или квазипериодического решения. Соответствующая частота в два раза меньше, чем у исходного решения. Стоит обратить внимание на тот факт, что исходное решение (так же, как и в случае бифуркации Хопфа) сохраняется в задаче, но теряет устойчивость. Существуют нелокальные бифуркации, наиболее распространенной из которых является седло-узловая бифуркация. Нелокальные бифуркации отличаются от локальных тем, что появляющиеся в них решения

не лежат в окрестности каких-либо ранее существовавших в задаче решений. В ходе седло-узловой бифуркации в задаче появляется пара периодических или квазипериодических решений с одинаковым набором частот и прочих параметров, одно из которых является устойчивым, а другое — неустойчивым.

Заключение

Обнаруженный в рассматриваемой задаче бифуркационный сценарий для $Re = 760$ при уменьшении B от значения 0,5 укладывается в обобщенную схему ФШМ-сценария: появление в системе второй частоты (бифуркация Хопфа рождения устойчивого квазипериодического решения из периодического), а затем — субгармонический каскад по одной из частот квазипериодического решения. Интересным представляется изучение поведения жидкости при все возрастающем значении индукции приложенного магнитного поля B , поскольку обнаружить устойчивое ламинарное течение нам не удалось. Возможно, это связано с некоторыми численными эффектами решения задачи. Как правило предполагается, что именно сильное внешнее магнитное поле в ряде технических устройств может быть использовано для подавления МГД турбулентности.

Важно указать, что двухмерная по пространству постановка задачи является гипотетическим, упрощенным случаем и не может являться точным описанием физических процессов, происходящих в МГД течениях. В то же время важно показать, что обнаруженный сценарий усложнения решений может быть справедлив как для двухмерного, упрощенного случая, так и для трехмерного, что будет являться дальнейшей работой авторов. Полученные предварительные результаты могут быть использованы для нахождения метастабильных режимов в МГД течениях для данной геометрии в зависимости от интенсивности внешнего поля.

В качестве возможных вариантов дальнейшего исследования можно назвать рассмотрение трехмерной задачи, моделирование каналов в реальных конструкциях МГД генераторов, а также моделирование макроскопической системы уравнений несжимаемой или сжимаемой МГД с целью сравнения бифуркационных сценариев при использовании различных подходов к описанию динамики жидкости и поля.

Литература

1. *Евстигнеев Н. М., Магницкий Н. А., Сидоров С. В.* О природе турбулентности в задаче движения жидкости за уступом // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 1. С. 69–73.

2. *Евстигнеев Н. М., Магницкий Н. А.* О возможных сценариях перехода к турбулентности в конвекции Рэлея—Бенара // Доклады РАН. 2010. Т. 433. № 3. С. 318–322.
3. *Евстигнеев Н. М., Магницкий Н. А.* Нелинейная динамика в начально-краевой задаче течения жидкости с уступа для гидродинамического приближения уравнений Больцмана // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 12. С. 1794–1798.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Том VIII. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
5. *Succi S.* The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond. Clarendon Press, 2001.
6. *Alexander J. Wagner.* A Practical Introduction to the Lattice Boltzmann Method. North Dakota State University. Fargo, 2008.
7. *Евстигнеев Н. М.* Применение графического процессора для ускорения численного сеточного метода Больцмана с энтропийной стабилизацией // Труды ИСА РАН. 2010. Т. 53. № 14. С. 111–123.
8. *Евстигнеев Н. М.* О стабилизации сеточного метода Больцмана для высоких чисел Рейнольдса при моделировании турбулентного режима течения жидкости // Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Физика, математика. 2010. № 2. С. 53–62.
9. *Nourgaliev R. R., Dinh T. N., Theofanous T. G., Joseph D.* The Lattice Boltzmann Equation Method: Theoretical Interpretation, Numerics and Implications // International Journal of Multiphase Flow. 2003. V. 29. No.1. P. 117–169.
10. *Dellar P. J.* Lattice kinetic schemes for magnetohydrodynamics // J. Comput. Phys. 2002. 179. P. 95–126.
11. *Sarris I. E., Kassinos S., Knaepen B., Carati D.* Large-eddy simulations of the turbulent Hartmann flow close to the transitional regime // Center for Turbulence Research. Proceedings of the Summer Program. 2006. P. 387–397.
12. *Mistrangelo C.* Three-dimensional MHD flow in sudden expansions // Wissenschaftliche Berichte FZKA. 2006. V. 7201.
13. *Muller U., Buhler L.* Magnetofluidynamics in Channels and Containers. Springer, 2001.

Евстигнеев Николай Михайлович. К. т. н., окончил МИФИ в 2002 г., с. н. с. лаборатории 11-3 ИСА РАН, количество печатных работ — более 50. Область научных интересов — численные методы решения нелинейных уравнений. E-mail: evstigneevnm@yandex.ru

Магницкий Николай Александрович. Д. ф-м. н., проф., заведующий лабораторией ИСА РАН; окончил МГУ им. М. В. Ломоносова в 1974 г., количество печатных работ — более 200. Область научных интересов — нелинейная и хаотическая динамика. Адрес: 119607, Москва, ул. Раменки, д. 9, к. 2, кв. 240, т. (495) 931 87 31 (д.), 8 (916) 056 31 64 (моб.). E-mail: nmag@isa.ru; mag@su29.ru

Рябков Олег Игоревич. Аспирант Факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова; окончил МГУ им. М. В. Ломоносова в 2009 г., количество печатных работ — 7. Адрес: Москва, Воробьевы горы, д. 1, ком. Б1307л., т. 8 (906) 755 49 45. E-mail: oleg.ryabkov.87@gmail.com, roi-techsup@yandex.ru