

# Бегущие волны, импульсы и диффузионный хаос в возбудимых средах\*

Т. В. КАРАМЫШЕВА, Н. А. МАГНИЦКИЙ

**Аннотация.** В настоящей работе показано, что система дифференциальных уравнений с частными производными типа ФитцХью—Нагумо с фиксированными значениями параметров может иметь бесконечное число различных устойчивых волновых решений, бегущих вдоль пространственной оси с произвольными скоростями, а также бегущие импульсы и бесконечное число различных режимов пространственно-временного (диффузионного) хаоса. Эти решения порождаются каскадами бифуркаций циклов и сингулярных аттракторов в соответствии с теорией ФШМ (Фейгенбаума—Шарковского—Магницкого) в трехмерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, в которую переходит система уравнений типа ФитцХью—Нагумо при соответствующей автомодельной замене переменных.

**Ключевые слова:** возбудимые среды, бегущие волны, импульсы.

## Введение

Большой класс физических, химических и биологических сред, широко изучающихся нелинейной и хаотической динамикой, описывается системой уравнений с частными производными типа реакция-диффузия

$$\begin{aligned}u_t &= D_1 u_{xx} + f(u, v, \mu); \\v_t &= D_2 v_{xx} + g(u, v, \mu),\end{aligned}\quad (1)$$

зависящих от векторного, в общем случае, параметра  $\mu$ . В системах вида (1) по одной из переменных существует, как правило, положительная обратная связь. Такая переменная называется активатором. Вторая переменная, которая замедляет нарастание (развитие) активатора, называется ингибитором.

Частным случаем систем уравнений реакция-диффузия являются системы уравнений типа ФитцХью—Нагумо, описывающие нелинейные процессы, происходящие в так называемых возбудимых средах. Это — распространение импульсов в нервном волокне и сердечной мышце [1–4], а также различные виды автокаталитических химических реакций [5, 6]. Основным свойством, характеризующим класс возбудимых сред, является медленная диффузия одной переменной в системе уравнений реакция-диффузия (1) по сравнению с другой переменной. Поэтому система уравнений типа ФитцХью—Нагумо может быть записана в следующем общем

виде

$$u_t = D u_{xx} + f(u, v, \mu), \quad v_t = g(u, v, \mu), \quad (2)$$

где параметр  $\mu$  в общем случае является вектором. Хорошо известно, что в системах вида (2) в одномерном пространственном случае могут существовать волны переключения, бегущие волны и бегущие импульсы, диссипативные пространственно неоднородные стационарные структуры, а также нерегулярные непериодические нестационарные структуры, называемые иногда биологической (или химической) турбулентностью.

Анализ регулярных решений системы (2) на прямой может быть проведен автомодельной заменой переменных  $\xi = x - ct$  и переходом к трехмерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{u} &= y, \\ \dot{y} &= -\frac{cy + f(u, v, \mu)}{D}, \quad \dot{v} = -\frac{g(u, v, \mu)}{c},\end{aligned}\quad (3)$$

где производная берется по переменной  $\xi$ . При этом волна переключения в системе (2) описывается сепаратрисой системы (3), идущей из ее одной особой точки в другую особую точку, а бегущие волны и бегущий импульс системы (2) описываются предельными циклами и петлей сепаратрисы особой точки системы (3).

В настоящей работе показано, что диффузионный хаос (турбулентность) в системе уравнений типа ФитцХью—Нагумо (2) описывается сингулярными аттракторами системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3) в соответствии с теорией

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 09-07-00078а, 11-07-00126а) и Программы ОНИТРАН № 4 (проект № 2.5).

ФШМ (Фейгенбаума—Шарковского—Магницкого) [7–10]. Для этого, как следует из теории ФШМ, диссипативная система обыкновенных дифференциальных уравнений (3) с нелинейными функциями  $f(u, v, \mu)$  и  $g(u, v, \mu)$  должна иметь особую точку типа седло-фокус, а также субгармонический и гомоклинический каскады бифуркаций сингулярных циклов, сходящихся к гомоклинической петле сепаратрисы этой особой точки.

### 1. Модельный пример возбудимой среды

Рассмотрим один частный случай систем уравнений (2)–(3) с нелинейностями вида

$$f(u, v, \mu) = \frac{-(u - 1)(u - \delta v)}{\varepsilon}, \tag{4}$$

$$g(u, v, \mu) = \arctg(\alpha u) - v,$$

где параметр  $\varepsilon$  является малым параметром. Заметим, что система уравнений (4) с полиномиальной по переменным  $(u, v)$  функцией  $f(u, v, \mu)$  и функцией  $g(u, v, \mu)$ , имеющей при каждом  $v$  конечные предельные значения при  $u \rightarrow \pm\infty$ , описывает некоторые виды автокаталитических химических реакций [6]. Нетрудно видеть, что система (3)–(4) при любых значениях параметров имеет особую точку  $O(0, 0, 0)$ . Кроме того, при  $\alpha > 1/\delta$  система уравнений (3)–(4) имеет еще две симметричные особые точки  $O_{\pm}(\pm u_*, 0, \pm u_*/\delta)$ , где значение  $u_*$  является положительным решением уравнения

$$\delta \arctg(\alpha u_*) = u_*.$$

Следовательно, система уравнений (3)–(4) может иметь при различных значениях параметров  $D, \alpha, \delta, \varepsilon, c$  субгармонические, гомоклинические и гетероклинические каскады бифуркаций устойчивых циклов, сходящихся к гомоклиническим и гетероклиническим сепаратрисным контурам особых точек.

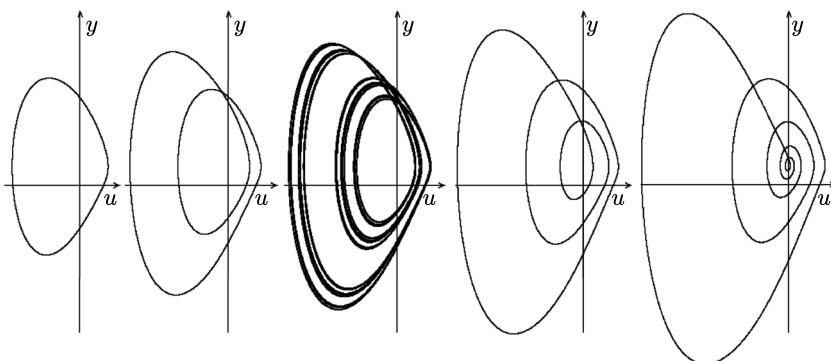


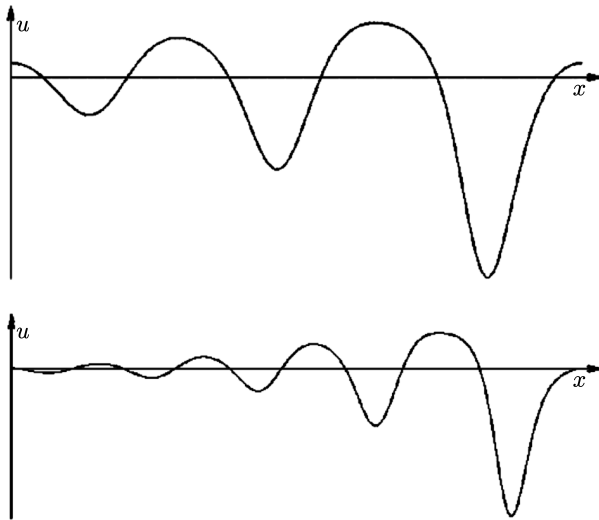
Рис. 1. Сингулярный цикл при  $c = 3$ , цикл удвоенного периода при  $c = 2,9$ , аттрактор Фейгенбаума при  $c = 2,874$ , цикл периода 3 из каскада Шарковского при  $c = 2,838$  и гомоклинический цикл периода 5 при  $c = 2,8073$  в системе уравнений (3)–(4)

Любой такой субгармонический, гомоклинический или гетероклинический каскад бифуркаций содержит бесконечное число различных сингулярных аттракторов системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3) и, соответственно, бесконечное число различных непериодических нестационарных пространственно неоднородных (хаотических, турбулентных) режимов поведения решений исходной системы уравнений типа ФитцХью—Нагумо (2).

Наибольший интерес, естественно, представляет случай, когда бифуркационным параметром является параметр  $c$ , не входящий явно в систему уравнений (2) и являющийся величиной скорости распространения возмущений вдоль оси  $x$ . Этот случай означает, что система уравнений типа ФитцХью—Нагумо (2) с фиксированными параметрами может иметь бесконечное число различных автоволновых решений произвольного периода, бегущих вдоль пространственной оси с различными скоростями, а также бесконечное число различных режимов пространственно-временного (диффузионного) хаоса.

Проиллюстрируем последнее утверждение примером системы уравнений (3)–(4) с фиксированными значениями параметров  $D = 1, \alpha = 2, \delta = 6, \varepsilon = 0,195$ . При этих значениях параметров нулевая особая точка  $O$  системы (3)–(4) является устойчивым фокусом при  $c > \sqrt{1 + (\alpha\delta - 1)/(1 - \varepsilon)} \approx 3,83$ . При меньших значениях параметра  $c$  из нулевой особой точки в результате бифуркации Андронова—Хопфа рождается предельный цикл, который остается устойчивым до  $c \approx 2,9635$ . Сама особая точка  $O$  становится седло-фокусом. При уменьшении значений параметра  $c$  в системе (3)–(4) реализуется каскад бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода устойчивых предельных циклов вплоть до образования первого сингулярного аттрактора — аттрактора Фейгенбаума при  $c \approx 2,874$ .

При дальнейшем уменьшении значений параметра  $c$  в системе (3)–(4) реализуется полный субгармонический каскад бифуркаций устойчивых циклов в соответствии с порядком Шарковского и затем неполный гомоклинический каскад бифуркаций устойчивых циклов, сходящихся к гомоклиническому контуру — петле сепаратрисы седло-фокуса  $O$  (рис. 1). Однако, самой петле сепаратрисы седло-фокуса при данных значениях



**Рис. 2.** Бегущие волны системы уравнений возбудимой среды (2), (4), соответствующие гомоклиническим циклам периодов 3 и 5 автомодельной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3)–(4)

параметров в системе (3)–(4) обнаружить не удалось. Для нахождения поверхности существования петли сепаратрисы седло-фокуса в многомерном пространстве параметров системы (3)–(4) можно воспользоваться методом, разработанным одним из авторов настоящей статьи и описанным в работах [7, 9], в которых рассмотрены примеры отыскания поверхностей и кривых существования гомоклинических и гетероклинических контуров особых точек в системе уравнений Лоренца, включая гомоклиническую и гетероклиническую бабочки.

На рис. 2 изображены бегущие вдоль пространственной оси  $x$  волны системы уравнений возбудимой среды (2), (4), соответствующие гомоклиническим циклам периодов 3 и 5 автомодельной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3)–(4). Бегущий импульс в возбудимой среде порождается, очевидно, гомоклинической петлей сепаратрисы особой точки системы обыкновенных дифференциальных уравнений типа седло-фокус.

## 2. Система, описывающая реакцию окисления молекул СО на поверхности платины Pt(1 1 0)

Примером реальной возбудимой среды является каталитическое окисление молекул СО на поверхности платины Pt(1 1 0), для которого эксперименты показали большое разнообразие пространственно-временных структур на поверхности катализатора, таких как бегущие импульсы, спиральные волны и химическая турбулентность (диффузионный хаос).

Химическая кинетика окисления молекул СО на поверхности Pt(1 1 0) описывается тремя уравнениями: уравнение баланса для концентрации атомов О на поверхности Pt, аналогичное уравнение для концентрации молекул СО и уравнение, характеризующее изменение состояния поверхности Pt, которое зависит от покрытия и описывается функцией  $f(u)$  (см. ниже). После добавления в эти уравнения диффузии молекул СО и адиабатического исключения переменной, описывающей покрытие атомами кислорода, получаем следующий частный случай двухкомпонентной системы уравнений реакция-диффузия типа ФитцХью—Нагумо [6]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon}u(u-1)\left(u - \frac{b+v}{a}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial v}{\partial t} = f(u) - v, \end{cases} \quad (5)$$

$$f(u) = \begin{cases} 0, & 0 \leq u < 1/3; \\ 1 - 6,75u(u-1)^2, & 1/3 \leq u \leq 1; \\ 1, & 1 < u, \end{cases}$$

где  $f(u)$  — экспериментальная зависимость скорости изменения структуры поверхности,  $u$  — покрытие (поверхностная концентрация) адсорбированного СО, а  $v$  — величина, характеризующая состояние поверхности. Параметры модели удовлетворяют условиям  $0 < a < 1$ ,  $b > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  и характеризуют соответственно парциальные давления О и СО и температуру.

При помощи замены переменных  $\xi = x - ct$  перейдем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{u} = y; \\ \dot{y} = -cy + \frac{1}{\varepsilon}u(u-1)\left(u - \frac{b+v}{a}\right); \\ \dot{v} = \frac{1}{c}(v - f(u)), \end{cases} \quad (6)$$

где производная берется по переменной  $\xi$ . Система (6) имеет пять особых точек:

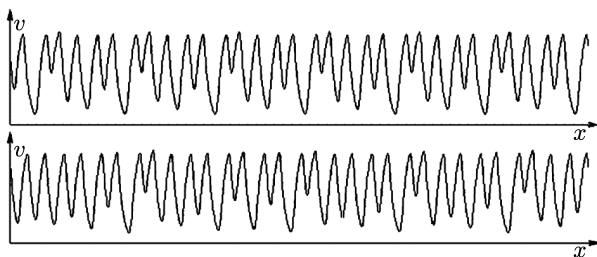
$$O_1(0, 0, 0), \quad O_2(1, 0, 1), \quad O_3\left(\frac{b}{a}, 0, 0\right) \quad \text{при } 3b < a,$$

$$O_4\left(\frac{b+1}{a}, 0, 1\right) \quad \text{и} \quad O_5(u_5, 0, 1 - 6,75u_5(u_5 - 1)^2),$$

где  $u_5$  — решение уравнения

$$au_5 = b + 1 - 6,75u_5(u_5 - 1)^2,$$

удовлетворяющее условию  $1/3 \leq u \leq 1$ . При фиксированных значениях параметров  $a = 0,25$ ,  $b = 0,042$ ,  $\varepsilon = 0,09$  и отрицательных значениях параметра  $c$  особая точка  $O_3(0,168, 0, 0)$  системы (6) является седло-



**Рис. 3.** Бегущие волны в системе уравнений (5), соответствующие циклу периода 5 системы (6) при  $C = -0,54293$  (вверху) и сингулярному аттрактору системы (6) при  $c = -0,5425$  (внизу)

фокусом. При  $c < 0$  вплоть до значения  $c \approx -0,519$  в фазовом пространстве переменных  $(u, y, v)$  существует устойчивый предельный цикл. При дальнейшем уменьшении значений параметра  $c$  в системе (6) реализуется каскад бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода устойчивых предельных циклов и неполный субгармонический каскад бифуркаций устойчивых циклов в соответствии с порядком Шарковского, аналогичный начальной стадии каскада бифуркаций циклов, изображенного на рис. 1. Цикл удвоенного периода существует в системе (6) при  $c = -0,53$ , цикл периода 8 — при  $c = -0,5370$ , аттрактор Фейгенбаума — при  $c = -0,5382$ , циклы периодов 7 и 5 из субгармонического каскада Шарковского — при  $c = -0,54205$  и  $c = -0,54293$ , соответственно.

Найденным решениям системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6), записанной относительно фазовых переменных  $(u, y, v)$ , соответствуют бегущие волны в системе уравнений с частными производными (5). На рис. 3 изображены бегущие со скоростью  $c$  вдоль пространственной оси  $x$  волны  $v(x)$ , соответствующие циклу периода 5 (вверху) при  $c = -0,54293$  и сингулярному аттрактору с хаотическим поведением (внизу) при  $c = -0,5425$ .

### Заключение

В работе показано, что система дифференциальных уравнений с частными производными типа ФитцХью—Нагумо с фиксированными значениями параметров может иметь бесконечное число различных устойчивых волновых решений, бегущих вдоль

пространственной оси с произвольными скоростями, а также бегущие импульсы и бесконечное число различных режимов диффузионного хаоса (химической или биологической турбулентности). Эти решения порождаются каскадами бифуркаций циклов и сингулярных аттракторов в соответствии с теорией ФШМ в трехмерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, в которую переходит система уравнений типа ФитцХью—Нагумо при соответствующей автомодельной замене переменных. При этом бифуркационным параметром, не входящим явно в исходную систему уравнений, является величина скорости распространения возмущений вдоль пространственной оси.

### Литература

1. Резниченко Г. Ю. Математические модели в биофизике и экологии. Ижевск: Институт компьютер. исследований, 2006. 184 с.
2. FitzHugh R. A. Impulses and physiological states in theoretical model of nerve membrane // Biophys. J., 1961, 1. P. 445–466.
3. Hodgkin A. L., Huxley A. F. A quantitative description of membrane current and its application conduction and excitation in nerve // J. Physiol., 1952, 117. P. 500–504.
4. Zeeman E. C. Differential equations for the heartbeat and nerve impulses. Mathematical Institute, Univer. of Warwick, Coventry. 1972.
5. Merkin J. H., Petrov V., Scott S. K., Showalter K. Wave-Induced Chemical Chaos // Phys. Rev. Letters, 1996. V. 76, 3. P. 546–549.
6. Zimmermann M. G., Firlie S. O., Natiello M. A. et al. Pulse bifurcation and transition to spatio-temporal chaos in an excitable reaction-diffusion model // Physica D., 1997. V. 110. P. 92–104.
7. Магницкий Н. А., Сидоров С. В. Новые методы хаотической динамики. М.: URSS, 2004. 318 с.
8. Магницкий Н. А. Универсальная теория динамического и пространственно-временного хаоса в сложных системах // Динамика сложных систем, 2007. Т. 1. № 1. С. 18–39.
9. Magnitskii N. A., Sidorov S. V. New methods for chaotic dynamics (monograph). Singapore, World Scientific, 2006. 363 p.
10. Magnitskii N. A. Universal theory of dynamical chaos in dissipative systems of differential equations // Comm. Nonlin. Science. Numer. Simul., Elsevier, 2008, 13. P. 416–433.

**Карамышева Таисия Владимировна.** Аспирантка МГУ им. М. В. Ломоносова. Окончила МГУ в 2009 г. Количество печатных работ: 4. Область научных интересов: нелинейная динамика, хаос. E-mail: taisia.karamysheva@gmail.com

**Магницкий Николай Александрович.** Заведующий лабораторией ИСА РАН. Д. ф.-м. н., профессор, академик РАЕН. Окончил МГУ в 1974 г. Количество печатных работ: более 200, 6 монографий. Область научных интересов: нелинейные дифференциальные уравнения, теория управления, хаотические динамические системы, искусственные нейронные сети и экономико-математическое моделирование. E-mail: nmag@isa.ru