

Бифуркационная диаграмма гамильтоновой системы Матье—Магницкого

М. А. КОРОЛЬКОВА

Аннотация. В настоящей работе осуществлено построение диаграммы бифуркаций двухпараметрической гамильтоновой системы Матье—Магницкого с двумя степенями свободы.

Ключевые слова: гамильтонова система, динамический хаос, бифуркационная диаграмма.

Введение

Настоящая работа затрагивает проблему анализа динамики решений гамильтоновых систем. Необходимость исследования механизма перехода к хаосу в таких системах возникает во многих приложениях небесной механики, квантовой физики, теории относительности, статистической физики. К исследованию такой системы, в частности, сводится известная задача трех тел.

В работах [1, 2] был предложен новый, отличный от классического, подход к анализу решений сложных консервативных систем. Идея подхода заключается в том, что сценарий перехода к хаосу в диссипативных системах имеет место (как предельный случай) и в консервативных и, в частности, гамильтоновых системах [3]. Для диссипативных систем, в свою очередь, в последние годы была разработана теория ФШМ (Фейгенбаума—Шарковского—Магницкого) перехода к хаосу, справедливость которой подтверждена для всех когда-либо исследованных систем [4, 5].

Целью настоящей работы является построение диаграммы бифуркаций двухпараметрической гамильтоновой системы Матье—Магницкого с двумя степенями свободы. При этом численное исследование системы будет проведено согласно методу, изложенному в [1, 2].

1. Система Матье—Магницкого и первые бифуркации

Рассмотрим двухпараметрическую гамильтонову систему с двумя степенями свободы

$$\dot{x} = y; \quad \dot{y} = -(\delta + z)x - x^3; \quad \dot{z} = r; \quad \dot{r} = -z - \frac{x^2}{2}, \quad (1)$$

с гамильтонианом

$$H(x, y, z, r) = \frac{\delta x^2 + y^2 + z^2 + r^2}{2} + z \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} = \epsilon. \quad (2)$$

Система (1)–(2) была впервые построена Н. А. Магницким в работе [2] небольшим изменением консервативной системы, эквивалентной нелинейному консервативному уравнению Матье.

Особенностью системы (1)–(2) является то, что один из параметров (ϵ) не фигурирует непосредственно в дифференциальных уравнениях, а лишь задает уровень энергетической поверхности, по которой происходит движение в системе.

При $\epsilon > 0$ в системе (1)–(2) имеет место цикл $x = y = 0$, задаваемый условием

$$H(z, r) = z^2 + r^2 = 2\epsilon.$$

Система (1)–(2), линеаризованная в окрестности цикла $x = y = 0$, имеет вид классического уравнения Матье

$$\ddot{x} + (\sqrt{2\epsilon} \cos t + \delta)x = 0. \quad (3)$$

К уравнению (3), в свою очередь, применима теорема Флоке—Ляпунова для анализа мультипликаторов цикла $x = y = 0$ [6, с. 305]. Кроме того, для уравнения (3) была разработана теория бесконечных определителей для построения областей неустойчивости на плоскости параметров (δ, ϵ) [7, с. 239].

На основе этих результатов была получена картина областей гиперболичности цикла $x = y = 0$ гамильтоновой системы (1)–(2), которая одновременно является диаграммой Айнса—Стретта [6, с. 316] областей неустойчивости решения уравнения Матье (3) (рис. 1).

Система (1)–(2) имеет бесконечное число чередующихся областей гиперболичности цикла $x = y = 0$. Вне пронумерованных областей цикл $x = y = 0$ (периода $T = 2\pi$) является эллиптическим и в его окрестности не происходит развития хаотической динамики. Границы областей с нечетными номерами n являются линиями бифуркации удвоения периода эллиптического цикла $x = y = 0$. При этом сам цикл $x = y = 0$ становится гиперболическим, а в его

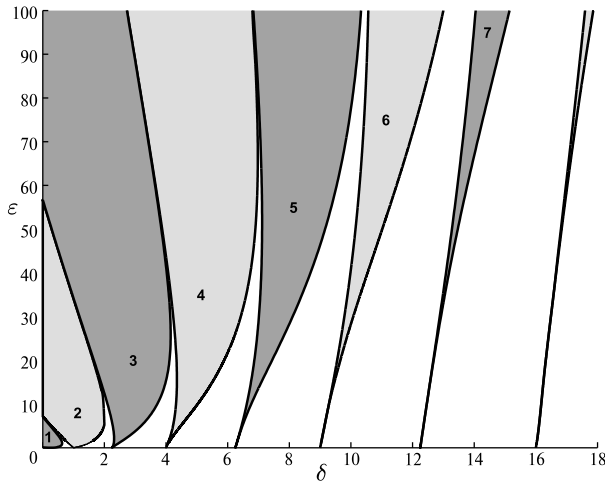


Рис. 1. Диаграмма бифуркаций цикла $x = y = 0$ системы (1)–(2) (цифрами обозначены номера областей гиперболичности)

окрестности рождается эллиптический цикл периода $2T$. Границы областей с четными номерами n являются линиями бифуркации типа вилки эллиптического цикла $x = y = 0$. При этом сам цикл $x = y = 0$ становится гиперболическим, а в его окрестности рождаются два симметричных эллиптических цикла C_1 и C_2 периода T .

n -я область гиперболичности цикла $x = y = 0$ касается оси δ в точке $\delta = (n/2)^2$. При больших номерах n соответствующая область подходит к оси δ узким язычком, ширина которого резко уменьшается с ростом n .

Исследование дальнейших бифуркаций в системе (1)–(2) в указанных областях гиперболичности проводилось с использованием численных методов.

2. Численное исследование

Следуя подходу, изложенному в работах [1, 2], запишем возможную расширенную диссипативную систему для исследуемой гамильтоновой системы (1)–(2):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y; & \dot{y} &= -(\delta + z)x - x^3 - \mu y; \\ \dot{z} &= r; & \dot{r} &= -z - \frac{x^2}{2} + (\epsilon - H(x, y, z, r))r. \end{aligned} \quad (4)$$

По сравнению с системой (1)–(2), в системе (4) появляется третий параметр μ , отвечающий за диссипацию энергии. Дивергенция правой части системы (4) на решениях системы (1)–(2) равна $-\mu - r^2$ и, следовательно, отрицательна при всех $\mu > 0$. Таким образом, расширенная диссипативная система уравнений (4) удовлетворяет условиям теоремы из [1, 2].

Устойчивые решения (аттракторы) системы (4) являются сколь угодно точными приближениями

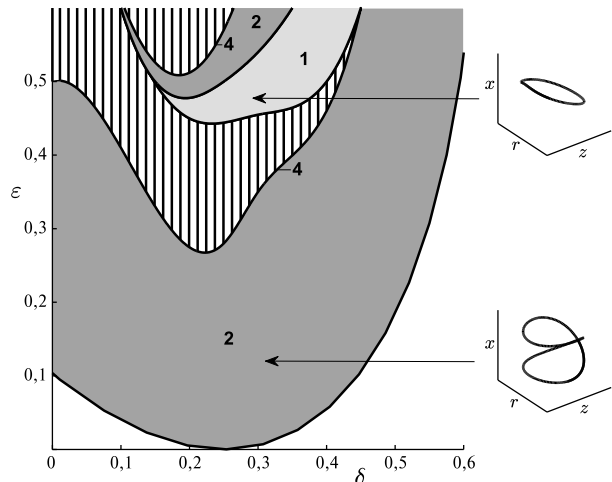


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма первой области гиперболичности цикла $x = y = 0$ системы (1)–(2) (цифрами обозначены периоды циклов, заштрихованные области соответствуют хаотическим движениям).

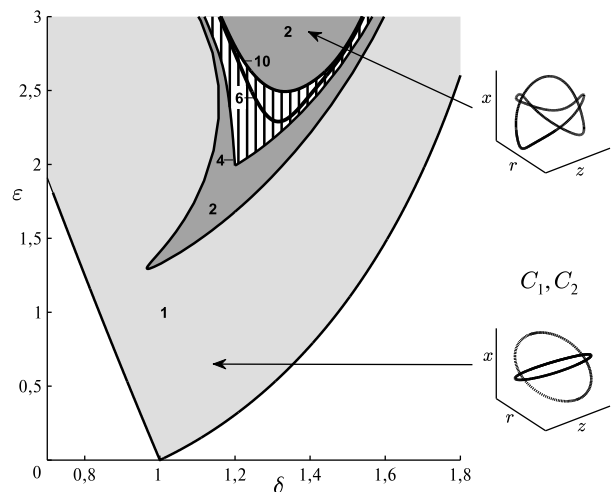


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма второй области гиперболичности цикла $x = y = 0$ системы (1)–(2) (цифрами обозначены периоды циклов, заштрихованные области соответствуют хаотическим движениям)

к решениям исходной гамильтоновой системы (1)–(2) (при стремлении параметра диссипации к нулю). Они были найдены численными методами с использованием результатов универсальной теории ФШМ и окончательной проверкой существования близкого решения в исходной гамильтоновой системе (1)–(2) (рис. 2, 3). Периоды всех найденных в системе циклов соотнесены с периодом $T = 2\pi$ исходного цикла $x = y = 0$.

На рис. 2 видно, что цикл, родившийся в результате бифуркации удвоения периода цикла $x = y = 0$, претерпевает свой каскад Фейгенбаума, который переходит в область хаотического движения. Затем в

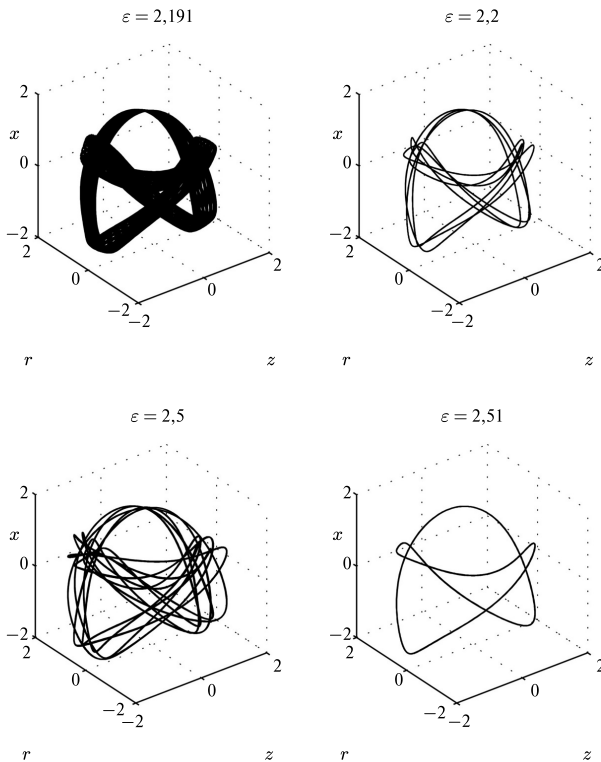


Рис. 4. Решения гамильтоновой системы (1)–(2), найденные при $\delta = 1,3$

системе в результате седлоузловой бифуркации рождается эллиптический цикл периода один (в паре с аналогичным гиперболическим циклом), который, в свою очередь, также претерпевает каскад удвоения периода, ведущий к возникновению хаотической динамики.

На рис. 3 обозначен каскад Фейгенбаума для двух симметричных циклов C_1 и C_2 , родившихся в результате бифуркации типа вилки цикла $x = y = 0$. Область хаотической динамики заканчивается встречным (нисходящим по параметру ϵ) каскадом Шарковского бифуркаций цикла периода 2. На рис. 4 приведены решения из этого каскада — хаотическое, периодов 6, 10 и 2 соответственно.

Заключение

В работе рассмотрена двухпараметрическая гамильтонова система Матье—Магницкого с двумя степенями свободы. На основе результатов, полученных для классического уравнения Матье, построена диаграмма бифуркаций исходного цикла системы на плоскости двух параметров.

В целях проведения численного исследования системы рассмотрена расширенная диссипативная система. Методами численного моделирования с использованием результатов универсальной теории Фейгенбаума—Шарковского—Магницкого найдены бифуркации и каскады бифуркаций, возникающие в диссипативной системе при различных значениях параметров. На основе найденных каскадов методом наследования начальных условий и продолжения параметра диссипации до нуля построена бифуркационная диаграмма исходной гамильтоновой системы.

Полученные результаты показали, что развитие хаотической динамики в рассматриваемой гамильтоновой системе также происходит в соответствии с ФШМ-теорией через каскады бифуркаций рождения эллиптических циклов и сингулярных траекторий.

Построенная бифуркационная диаграмма не является полной. На ней отражены каскады бифуркаций, порожденные лишь одним изначально существовавшим в системе циклом. Тем не менее, полученные результаты еще раз подтверждают, что развитие хаоса в консервативных системах происходит не одномоментным разрушением некоторого регулярного состояния системы, а бесконечным каскадом бифуркаций рождения все более сложных периодических и квазипериодических решений.

Литература

1. *Магницкий Н. А.* Неклассический подход к анализу гамильтоновых и консервативных систем // *Нелинейная динамика и управление*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. Вып. 7. С. 95–126.
2. *Магницкий Н. А.* Новый подход к анализу гамильтоновых и консервативных систем // *Дифференциальные уравнения*. 2008. Т. 44. № 12. С. 1618–1627.
3. *Магницкий Н. А., Сидоров С. В.* Применение теории Фейгенбаума—Шарковского—Магницкого к анализу гамильтоновых систем // *Дифференциальные уравнения*. 2007. Т. 43. № 11. С. 1474–1479.
4. *Магницкий Н. А.* Универсальная теория динамического и пространственно-временного хаоса в сложных системах // *Динамика сложных систем*. 2007. Т. 1. № 1. С. 18–39.
5. *Магницкий Н. А., Сидоров С. В.* Новые методы хаотической динамики. М.: URSS, 2004. 320 с.
6. *Горяченко В. Д.* Элементы теории колебаний. М.: Высшая школа, 2001. 395 с.
7. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976. 320 с.

Королькова Маргарита Андреевна. Стажер ОАО «Объединенная Металлургическая Компания». Окончила Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана в 2011 г. Количество печатных работ: 3. Область научных интересов: хаотическая динамика, управление техническими системами. E-mail: korolkova.margaret@yandex.ru