Численные методы решения

Построение нижней оценки стоимости бесконечного опциона Маргграбе[*]

Д. Л. Муравей

Аннотация. Рассматривается задача построения нижней оценки опциона Маргграбе. Искомая нижняя оценка ищется как решение краевой задачи для эллиптического уравнения в полуплоскости.

Ключевые слова: *Бесконечный американский опцион, опцион Margrabe, оценка опционов, дифференциальный метод, краевая задача, эллиптические уравнения, функция Грина.*

Введение

Бесконечный опцион Маргграбе представляет собой ценную бумагу, держатель которой имеет право её предъявления в любой момент времени с целью обмена одного актива на другой. Случай конечного времени рассматривался в [1] и [2]. В данной статье строится нижняя оценка, основанная на следующем пороговом решающем правиле: опцион предъявляется только в тот момент, когда отношение стоимостей двух активов достигает заданного порога. Искомая оценка будет получена как величина максимума свёртки непрерывной граничной функции с функцией Грина эллиптического уравнения в полуплоскости.

1. Постановка задачи

Рассмотрим модель финансового рынка, где банковская процентная ставка r не зависит от времени t, а стоимости активов $S_i(t), i=1,2$ удовлетворяют уравнениям геометрического броуновского движения: $dS_i(t)=S_i(t)\left(\alpha_i dt+\sigma_i dz_i(t)\right)$, где $\sigma_i>0$ — волатильности активов, а $z_i(t)>0$ — стандартные винеровские процессы с коэффициентом корреляции ρ, $|\rho|<1$. Пусть $\delta_i>0$ — интенсивности выплаты дивидендов. Будем рассматривать риск-нейтральную модель рынка, для которой $r=\alpha_i+\delta_i$, $i=1,\ 2$, что означает равенство доходности инвестора по депозитному вкладу и средней доходности каждого актива, включая дивиденды. Предположим, что получаемые по активу дивиденды немедленно реинвестируются, то есть на них покупаются новые акции такого же типа.

Пусть в начальный момент времени $t=0$ выпускается опцион на обмен одного актива на другой по цене исполнения K, — с правом предъявления в любой момент времени t. Без ограничения общности предположим, что второй актив обменивается на первый. Тогда платёж по опциону равен

$$f(S_1(t),S_2(t))=\left(S_1(t)-S_2(t)-K\right)_+ .$$

Обозначим через $S_i=S_i(0),\ i=1,2$ — начальные стоимости активов. Тогда стоимость опциона $V(S_1,S_2)$ может быть определена как

$$C\left(S_1,S_2\right)=\sup_{\{T'\}}E\left[\exp\left(-rT'\right)\left(S_1(t)-S_2(t)-K\right)_+\right],$$

---

[*] Работа поддержана РФФИ (проект № 11–01–00778а).

где $\{T^{'}\}$ — множество всех решающих правил предъявления [3. Т. 2]. Введём следующий класс параметрических пороговых решающих правил: для числа c определим правило остановки T_c: опцион предъявляется только в том случае, когда процесс $p(t)=\dfrac{S_1(t)}{S_2(t)}$ впервые достигает границы $c>\dfrac{S_1}{S_2}$.

При использовании правила T_c средний приведённый платёж по опциону равен

$$F\left(S_1,S_2,c\right)=E\left[\exp(-rT_c)f(S_1(T_c),S_2(T_c))\right].$$

В силу того, что множество правил $\{T_c\}$ является подмножеством $\{T^{'}\}$, то нижнюю оценку стоимости можно определить как $F\left(S_1,S_2\right)=\sup\limits_c F\left(S_1,S_2,c\right)$.

2. Формулировка основного результата

Основной результат данной работы состоит в том, что величина $F\left(S_1,S_2,c\right)$ найдена в явном виде, что позволяет применять численные методы для поиска супремума $\sup\limits_c F\left(S_1,S_2,c\right)$. В свою очередь, нахождение $F\left(S_1,S_2,c\right)$ сводится к решению краевой задачи для общего эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами в бесконечной полуплоскости. Для этого уравнения построена функция Грина и найдены классы существования и единственности.

Доказательство основного результата имеет следующую структуру: в начале изучается эллиптическое уравнение в бесконечной полуплоскости. Вводится понятие граничного потенциала и строится функция Грина в явном виде. Далее рассматриваются специальные классы граничных функций, в них доказываются теоремы существования и единственности. После этого в явном виде ищется решение исходной задачи.

2. Постановка краевой задачи

Из формулы Ито [3, т. 2] и уравнения Беллмана можно вывести, что функция $F\left(S_1,S_2,c\right)$ является решением краевой задачи:

$$\begin{cases}\dfrac{\sigma_1^2}{2}S_1^2F^{''}_{S_1S_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{2}S_2^2F^{''}_{S_2S_2}+\rho\sigma_1\sigma_2S_1S_2F^{''}_{S_1S_2}+\\ +\alpha_1S_1F^{'}_{S_1}+\alpha_2S_2F^{'}_{S_2}-rF=0,\ S_1<cS_2,\\ F\left(S_1,S_2,c\right)=(S_1-S_2-K)_+,S_1=cS_2.\end{cases}$$

Сделаем замены переменных:

$$x_i=\ln S_i,\ \tilde{\alpha}_i=\alpha_i-\frac{\sigma_i^2}{2},\ H(x_1,x_2)=F(S_1,S_2,c),\ i=1,2,$$

и получим следующую краевую задачу (см. рис. 1):

$$\begin{cases}\dfrac{\sigma_1^2}{2}H^{''}_{x_1x_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{2}H^{''}_{x_2x_2}+\rho\sigma_1\sigma_2H^{''}_{x_1x_2}+\tilde{\alpha}_1H^{'}_{x_1}+\\ \quad+\tilde{\alpha}_2H^{'}_{x_2}-rH=0,\ \ \left(x_1,x_2\right)\in\Pi^{\infty},\\ H(x_1,x_2)=\left(e^{x_1}-e^{x_2}-K\right)_+,\ x_2=x_1-\ln c_1.\end{cases}\tag{1}$$

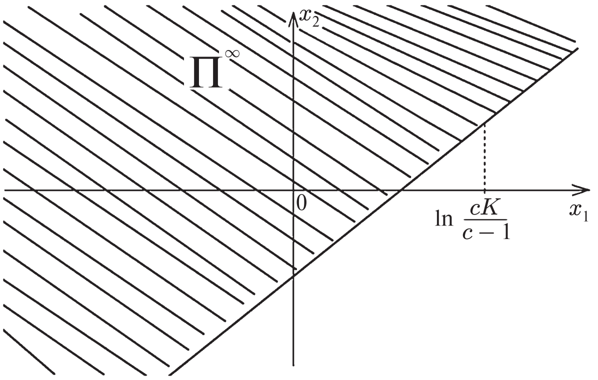

Рис. 1

Задача (1) — краевая задача для эллиптического уравнения в косой полуплоскости Π^{∞}. При заменах

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ \ y=\frac{x_2-x_1+\ln c}{2},\ \ \ H(x_1,x_2)=e^xV(x,y)$$

уравнение (1) перейдёт в задачу (2) в прямой полуплоскости $\hat{\Pi}^{\infty}=\{-\infty<x<+\infty,\ \ 0\le y\le+\infty\}$:

$$\begin{cases}\hat{L}V\overset{def}{=}\hat{\sigma}_1^2V^{''}_{xx}+2\hat{\rho}\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2V^{''}_{xy}+\hat{\sigma}_2^2V^{''}_{yy}+\hat{\alpha}_1V_x+\\ +\hat{\alpha}_2V_y-\hat{r}V=0,\ \left(x,y\right)\in\hat{\Pi}^{\infty},\\ V\,|_{y=0}=\left(c^{1/2}-c^{-1/2}-Ke^{-x}\right)_+,\ x\in\left(-\infty,+\infty\right),\end{cases}\tag{2}$$

Непосредственно проверяется, что коэффициенты уравнения

$$\begin{gathered}\hat{\sigma}_1=\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2}}{2\sqrt{2}},\ \hat{\sigma}_2=\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}}{2\sqrt{2}},\\ \hat{\rho}=-\frac{\sigma_1^2-\sigma_2^2}{\sqrt{(\sigma_1^2-\sigma_2^2)^2+4(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}},\\ \hat{\alpha}_1=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\rho\sigma_1\sigma_2}{2},\ \hat{\alpha}_2=-\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2},\\ \hat{r}=\frac{\delta_1+\delta_2}{2}+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{8},\end{gathered}\tag{3}$$

удовлетворяют следующим условиям:

$$\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{r} > 0, |\hat{\rho}| < 1.$$

В качестве метода решения задачи (2) предлагается использовать метод граничных потенциалов $P^{\infty}(x - x_0, y)$, которые являются специальными решениями уравнения $\hat{L}P^{\infty} = 0$ в полуплоскости $\hat{\Pi}^{\infty}$.

3. Построение потенциала и функции Грина

Определим потенциал $P(x - x_0, y)$:

$$P^{\infty}(x - x_j, y) = \lim_{\varepsilon \to 0} P_{\varepsilon}^{\infty}(x - x_j, y), \tag{4}$$

где $P_{\varepsilon}^{\infty}(x - x_0, y)$ является обобщённым решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \hat{L}P_{\varepsilon} = 0, \\ P_{\varepsilon}|_{y=0} = e^{-\varepsilon(x-x_0)}\theta(x - x_0), \\ P_{\varepsilon}|_{y=+\infty} = 0 . \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $\theta(x - x_0)$ — функция Хевисайда

($\theta(x - x_0) = 0$ при $x < x_0$

и $\theta(x - x_0) = 1$ при $x \geq x_0$).

Введём оператор Фурье:

$$FU(x, y) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} U(x, y) dx = v(\xi, y). \tag{6}$$

Найдём значения $FP_{\varepsilon}^{\infty}(x - x_0, y)$ на границах $y = 0$, $y = +\infty$:

$$v_{0,\varepsilon}(\xi, 0) = \frac{e^{i\xi x_0}}{\varepsilon - i\xi}, \quad v_{0,\varepsilon}(\xi, +\infty) = 0. \tag{7}$$

Применяя преобразование Фурье к оператору $\hat{L}P_{\varepsilon}$, получим уравнение

$$\begin{aligned} \tilde{L}v_{\varepsilon} &= \hat{\sigma}_2^2 \frac{d^2 v_{\varepsilon}}{(dy)^2} + (\hat{\alpha}_2 - 2i\xi\hat{\rho}\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2)\frac{dv_{\varepsilon}}{dy} - \\ &-(\hat{\sigma}_1^2 \xi^2 + i\xi\hat{\alpha}_1 + \hat{r})v_{\varepsilon} = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Тогда, для $v_{\varepsilon}(\xi, y)$ имеем граничную задачу (9):

$$\begin{cases} \tilde{L}v_{\varepsilon} = 0, \\ v_{\varepsilon}(\xi, 0) = \dfrac{e^{i\xi x_0}}{\varepsilon - i\xi}, \\ v_{\varepsilon}(\xi, +\infty) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Решая задачу (9) находим $v_{\varepsilon}(\xi, y)$:

$$\begin{aligned} &v_{\varepsilon}(\xi, y) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon - i\xi} \exp\left(i\xi x_0 - \right. \\ &\left. -y\left(\frac{\hat{\alpha}_2 - 2i\xi\hat{\rho}\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2 + \sqrt{\left(\hat{\alpha}_2 - 2i\xi\hat{\rho}\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\right)^2 + 4\hat{\sigma}_2^2\left(\hat{\sigma}_1^2\xi^2 + i\xi\hat{\alpha}_1 + \hat{r}\right)}}{2\hat{\sigma}_2^2} \right)\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Заметим, что функция $v_{\varepsilon}(\xi, y)$ аналитична в комплексной плоскости за исключением полюса $\xi = -i\varepsilon$ и двух точек ветвления, которые являются решениями уравнения

$$\left(\hat{\alpha}_2 - 2i\xi\hat{\rho}\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\right)^2 + 4\hat{\sigma}_2^2\left(\hat{\sigma}_1^2\xi^2 + i\xi\hat{\alpha}_1 + \hat{r}\right) = 0 .$$

По формуле обращения потенциал P_{ε}^{∞} равен

$$P_{\varepsilon}^{\infty}(x - x_0, y) = F^{-1}\left[v_{\varepsilon}(\xi, y)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} v_{\varepsilon}(\xi, y) d\xi,$$

откуда $P^{\infty}(x - x_0, y) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} F^{-1}\left[v_{\varepsilon}(\xi, y)\right]$.

Обозначая за $s_0(x, y) = x_0 - x + \dfrac{\hat{\rho}\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_2} y$, получаем:

$$\begin{aligned} &F^{-1}\left[v_{\varepsilon}(\xi, y)\right] = \frac{e^{-\frac{\hat{\alpha}_2 y}{2\hat{\sigma}_2^2}}}{2\pi} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(i\xi s_0(x,y) - y\dfrac{\sqrt{\left(\hat{\alpha}_2 - 2i\xi\hat{\rho}\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\right)^2 + 4\hat{\sigma}_2^2\left(\hat{\sigma}_1^2\xi^2 + i\xi\hat{\alpha}_1 + \hat{r}\right)}}{2\hat{\sigma}_2^2} \right)}{\varepsilon - i\xi} d\xi \end{aligned} \tag{11}$$

Сделаем замены:

$$\xi = \frac{\tilde{\xi}}{2\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\sqrt{1 - \hat{\rho}^2}} - i\frac{\dfrac{\hat{\alpha}_1}{\hat{\sigma}_1} - \dfrac{\hat{\rho}\hat{\alpha}_2}{\hat{\sigma}_2}}{2\hat{\sigma}_1(1 - \hat{\rho}^2)},$$

$$a^2 = \hat{\alpha}_2^2 + 4\hat{\sigma}_2^2\hat{r} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{(1 - \hat{\rho}^2)}\left(\frac{\hat{\alpha}_1}{\hat{\sigma}_1} - \frac{\hat{\rho}\hat{\alpha}_2}{\hat{\sigma}_2}\right)^2,$$

$$\beta = \frac{\dfrac{\hat{\alpha}_1}{\hat{\sigma}_1} - \dfrac{\hat{\rho}\hat{\alpha}_2}{\hat{\sigma}_2}}{2\hat{\sigma}_1(1 - \hat{\rho}^2)}$$

Учитывая замену $C_v = \dfrac{e^{-\frac{\hat{\alpha}_2 y}{2\sigma_2^2}} e^{-\beta(x - x_0 - y\frac{\hat{\rho}\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_2})}}{2\pi \cdot 2\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\sqrt{1 - \hat{\rho}^2}}$,

$F^{-1}\left[v_{0,\varepsilon}(\xi, y)\right]$ примет вид:

$$F^{-1}\left[v_{\varepsilon}(\xi,y)\right]=$$

$$=C_{v}\int\limits_{L}\frac{1}{\varepsilon-\dfrac{i\tilde{\xi}}{2\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\sqrt{1-\hat{\rho}^2}}-\beta}\times$$

$$\times\ \exp\left(-\frac{i\tilde{\xi}}{2\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\sqrt{1-\hat{\rho}^2}}\left(x-x_0-y\frac{\hat{\rho}\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_2}\right)-\right.$$

$$\left.-\ \frac{y}{2\sigma_2^2}\sqrt{\tilde{\xi}^2+a^2}\right)d\tilde{\xi}.$$

Обозначая за $\mathbf{\Phi}_{\varepsilon}(\tilde{\xi})$ подынтегральную функцию в $F^{-1}\left[v_{\varepsilon}(\xi,y)\right]$, и далее, пользуясь теоремой о вычетах и леммой Жордана (см. рис. 2), получаем:

$$P_{\varepsilon}^{\infty}(x-x_0,y)=$$

$$=\begin{cases}-C_v\displaystyle\int\limits_{L_1+L_2}\mathbf{\Phi}_{\varepsilon}(\tilde{\xi})d\tilde{\xi}, \\ \qquad\qquad x_0-x+\dfrac{\hat{\rho}\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_2}y>0, \\ -C_v\displaystyle\int\limits_{L_3+L_4}\mathbf{\Phi}_{\varepsilon}(\tilde{\xi})d\tilde{\xi}-C_v 2\pi i\mathrm{Res}\mathbf{\Phi}_{\varepsilon}(\tilde{\xi}=\tilde{\xi}_{\varepsilon}), \\ \qquad\qquad x_0-x+\dfrac{\hat{\rho}\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_2}y<0,\end{cases}$$

где $\tilde{\xi}_{\varepsilon}=i\dfrac{-\hat{\rho}\hat{\alpha}_2\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2\hat{\alpha}_1}{\hat{\sigma}_1\sqrt{1-\hat{\rho}^2}}-2i\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\sqrt{1-\hat{\rho}^2}\,\varepsilon$.

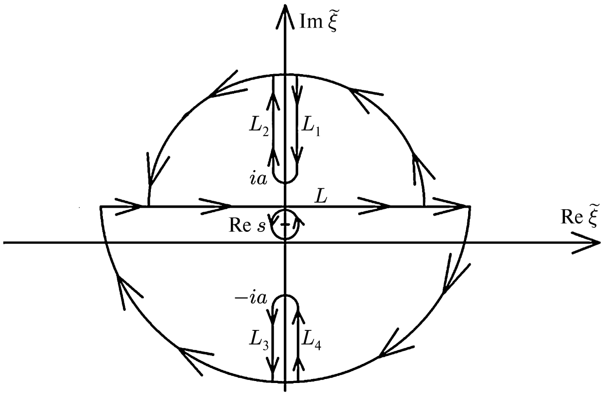

Рис. 2

Вычисляя все интегралы и вычет, получаем выражение для потенциала:

$$P^{\infty}(x-x_0,y)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{\hat{\alpha}_2 y}{2\sigma_2^2}}}{\pi}\times \\ \times\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\left(\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2^{-1}\sqrt{1-\hat{\rho}^2}\,y\lambda\right)\exp\left[\left(\beta-\sqrt{b^2+\lambda^2}\right)s_0(x,y)\right]}{\sqrt{b^2+\lambda^2}\left(\sqrt{b^2+\lambda^2}-\beta\right)}d\lambda, \\ \qquad\qquad s_0(x,y)>0, \\ \dfrac{e^{-\frac{\hat{\alpha}_2 y}{2\sigma_2^2}}}{\pi}\times \\ \times\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\left(\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2^{-1}\sqrt{1-\hat{\rho}^2}\,y\lambda\right)\exp\left[\left(\beta+\sqrt{b^2+\lambda^2}\right)s_0(x,y)\right]}{-\sqrt{b^2+\lambda^2}\left(\beta+\sqrt{b^2+\lambda^2}\right)}d\lambda+ \\ +e^{-\frac{\hat{\alpha}_2 y}{2\sigma_2^2}}\exp\left[-y\sqrt{\dfrac{\hat{\alpha}_2^2}{4\hat{\sigma}_2^4}+\dfrac{\hat{r}}{\hat{\sigma}_2^2}}\right], \\ \qquad\qquad s_0(x,y)<0,\end{cases}$$

где

$$b^2=\frac{1}{4\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2(1-\hat{\rho}^2)}\left(\hat{\alpha}_2^2+4\hat{\sigma}_2^2\hat{r}+\frac{\hat{\sigma}_2^2}{(1-\hat{\rho}^2)}\left(\frac{\hat{\alpha}_1}{\hat{\sigma}_1}-\frac{\hat{\rho}\hat{\alpha}_2}{\hat{\sigma}_2}\right)^2\right),$$

$$b^2-\beta^2=\frac{\hat{\alpha}_2^2+4\hat{\sigma}_2^2\hat{r}}{4\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2(1-\hat{\rho}^2)}.$$

Продифференцируем потенциал в смысле обобщённых функций, далее в работе будет показано, что полученное выражение $\dfrac{\partial P^{\infty}(x-x_0,y)}{\partial x}=G^{\infty}(x-x_0,y)$ будет являться функцией Грина в некоторых классах граничных функций.

$$G^{\infty}(x-x_0,y)=\delta(s_0(x,y))\theta(-y)+$$

$$+\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{\hat{\alpha}_2 y}{2\sigma_2^2}}}{\pi}\times \\ \times\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\left(\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2^{-1}\sqrt{1-\hat{\rho}^2}\,y\lambda\right)\exp\left[\left(\beta-\sqrt{b^2+\lambda^2}\right)s_0(x,y)\right]}{\sqrt{b^2+\lambda^2}}d\lambda, \\ \qquad\qquad s_0(x,y)>0 \\ \dfrac{e^{-\frac{\hat{\alpha}_2 y}{2\sigma_2^2}}}{\pi}\times \\ \times\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\left(\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2^{-1}\sqrt{1-\hat{\rho}^2}\,y\lambda\right)\exp\left[\left(\beta+\sqrt{b^2+\lambda^2}\right)s_0(x,y)\right]}{\sqrt{b^2+\lambda^2}}d\lambda, \\ \qquad\qquad s_0(x,y)<0.\end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что потенциал $P^{\infty}(x-x_0,y)$ непрерывен во всей области $\hat{\Pi}^{\infty}$, не включая границы.

4. Классы существования и единственности

Рассмотрим эллиптическое уравнение в бесконечной полуплоскости $\hat{\Pi}^{\infty}$ с произвольной граничной функцией $\varphi(x)$:

$$\begin{cases} \hat{L}V \overset{def}{=} \hat{\sigma}_1^2 V''_{xx} + 2\hat{\rho}\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2 V''_{xy} + \hat{\sigma}_2^2 V''_{yy} + \\ +\hat{\alpha}_1 V_x + \hat{\alpha}_2 V_y - \hat{r}V = 0, \\ \quad (x,y)\in\hat{\Pi}^{\infty}, \\ V\,|_{y=0} = \varphi(x), \\ \quad x\in(-\infty,+\infty), \\ \lim\limits_{y\to+\infty} e^{-\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\sigma}_2^2}y} V(x,y) = 0, \\ \quad x\in(-\infty,+\infty). \end{cases} \tag{12}$$

Теорема 1. В классе граничных функций

$$M_0 = C^{2,\alpha}\cap B^2,$$

где $C^{2,\alpha}$ — класс функций, у которых вторая производная принадлежит классу Гёльдера с показателем α, а B^2 — класс функций, ограниченных вместе со своими производными до второго порядка включительно, решение задачи (12) будет дважды дифференцируемым по обоим переменным (т. е. будет классическим решением), единственно и представимо в виде свёртки

$$V(x,y) = \varphi(x_0) * G^{\infty}(x-x_0,y) = \\ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_0) G^{\infty}(x-x_0,y)\,dx_0. \tag{13}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 1 требуется последовательно доказать три утверждения: дважды дифференцируемость свёртки, справедливость равенств $\hat{L}V=0$ и $V\,|_{y=0}=\varphi(x)$ во внутренности и на границе области $\hat{\Pi}^{\infty}$ соответственно, и единственность построенного решения.

Докажем сначала дважды дифференцируемость свёртки. Рассмотрим $\left(G^{\infty}*\varphi\right)_x^{(n)}$ — n-ю производную по x, где $n=0,1,2$. Непосредственно проверяется, что она представима в виде:

$$\left(G^{\infty}*\varphi\right)_x^{(n)} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{\hat{\alpha}_2 y}{2\hat{\sigma}_2^2}}}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} \left[\varphi^{(n)}(\xi + x - \frac{\hat{\rho}\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_2}y) - \varphi^{(n)}(x - \frac{\hat{\rho}\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_2}y)\right] \times$$

$$\times \left[\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\lambda\sin(\varpi y\lambda)\exp\left[\left(\beta+\sqrt{b^2+\lambda^2}\right)\xi\right]}{\sqrt{b^2+\lambda^2}}d\lambda\right] d\xi +$$

$$+ \frac{e^{-\frac{\hat{\alpha}_2 y}{2\hat{\sigma}_2^2}}}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \left[\varphi^{(n)}(\xi + x - \frac{\hat{\rho}\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_2}y) - \varphi^{(n)}(x - \frac{\hat{\rho}\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_2}y)\right]$$

$$\left[\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\lambda\sin(\varpi y\lambda)\exp\left[\left(\beta-\sqrt{b^2+\lambda^2}\right)\xi\right]}{\sqrt{b^2+\lambda^2}}d\lambda\right] d\xi +$$

$$+ e^{-\frac{\hat{\alpha}_2 y}{2\sigma_2^2}} \varphi^{(n)}\left(x - \frac{\hat{\rho}\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_2}y\right)\exp\left[-y\sqrt{\frac{\hat{\alpha}_2^2}{4\hat{\sigma}_2^4}+\frac{\hat{r}}{\hat{\sigma}_2^2}}\right].$$

Докажем абсолютную сходимость интегралов в $\left(G^{\infty}*\varphi\right)_x^{(n)}$ — это будет означать непрерывность частных производных по x и самой свёртки $G^{\infty}*\varphi$.

$$\frac{e^{-\frac{\hat{\alpha}_2 y}{2\hat{\sigma}_2^2}}}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} \left[\varphi^{(n)}(\xi + x - \frac{\hat{\rho}\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_2}y) - \varphi^{(n)}(x - \frac{\hat{\rho}\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_2}y)\right]$$

$$\left[\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\lambda\sin(\varpi y\lambda)\exp\left[\left(\beta+\sqrt{b^2+\lambda^2}\right)\xi\right]}{\sqrt{b^2+\lambda^2}}d\lambda\right] d\xi \le$$

$$\left\{\begin{matrix} \left|\sin(\varpi_y y\lambda)\right| \le 1 \\ \left|\varphi_x^{(n)}(\xi + x - \frac{\hat{\rho}\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_2}y) - \varphi_x^{(n)}(x - \frac{\hat{\rho}\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_2}y)\right| \le c\xi^{\frac{1}{\alpha}} \end{matrix}\right\} \le$$

$$\frac{e^{-\frac{\hat{\alpha}_2 y}{2\hat{\sigma}_2^2}}}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} c\xi^{\frac{1}{\alpha}} \left[\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\lambda\exp\left[\left(\beta+\sqrt{b^2+\lambda^2}\right)\xi\right]}{\sqrt{b^2+\lambda^2}}d\lambda\right] d\xi \le$$

$$\le \left\{ \begin{matrix} \int\limits_0^{+\infty} x^{\nu-1} e^{-\mu x} dx = \frac{1}{\mu^{\nu}} \mathbf{\Gamma}(\nu), \ \operatorname{Re}\mu, \operatorname{Re}\nu > 0 \\ (\text{см. } [4, 3.381.4]) \end{matrix} \right\} \le$$

$$\le c \frac{e^{-\frac{\hat{\alpha}_2 y}{2\hat{\sigma}_2^2}}}{\pi} \mathbf{\Gamma}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \times$$

$$\times \int\limits_0^{+\infty} \frac{\lambda}{\sqrt{b^2 + \lambda^2}\left(\beta + \sqrt{b^2 + \lambda^2}\right)^{1+\frac{1}{\alpha}}} d\lambda \le C e^{-\frac{\hat{\alpha}_2 y}{2\hat{\sigma}_2^2}},$$

$C = Const.$

Абсолютная сходимость второго интеграла доказывается аналогично. Заметим, что отсюда также следует, что на бесконечности свёртка растёт не быстрее чем $e^{-\frac{\hat{\alpha}_2 y}{2\hat{\sigma}_2^2}}$. Непрерывность производных по переменной y и смешанной производной доказывается аналогично.

Докажем теперь справедливость равенств $\hat{L}V = 0$ и $V|_{y=0} = \varphi(x)$. Легко показать, что функция Грина является слабым решением задачи (12), то есть равенство $\hat{L}G^{\infty} = 0$ понимается в следующем смысле: в любой замкнутой подобласти $\mathbf{\Omega}$ полуплоскости $\hat{\mathbf{\Pi}}^{\infty}$ выполняется следующее соотношение:

$$\hat{L}G^{\infty} = 0 \Leftrightarrow \forall z \in \overset{0}{C}{}^2, \left(G^{\infty}, \hat{L}^* z\right)_{\mathbf{\Omega}} = \iint\limits_{\mathbf{\Omega}} G^{\infty} \hat{L}^* z dxdy = 0,$$

$i = 0,1,$

где $\hat{L}^*$ — сопряжённый оператор, а $\overset{0}{C}{}^2$ __ класс функций, имеющих непрерывные вторые производные и принимающие ноль на границе области. Рассмотрим скалярное произведение

$$\left(\varphi * G^{\infty}, \hat{L}^* z\right)_{\mathbf{\Omega}} = \iint\limits_{\mathbf{\Omega}} \left(\varphi * G^{\infty}\right) \hat{L}^* z dxdy =$$

$$= \varphi * \iint\limits_{\mathbf{\Omega}} G^{\infty} \hat{L}^* z dxdy = 0.$$

По определению сопряженного оператора

$$\left(\hat{L}\left(\varphi * G^{\infty}\right), z\right)_{\mathbf{\Omega}} = \left(\varphi * G^{\infty}, \hat{L}^* z\right)_{\mathbf{\Omega}} = 0.$$

По доказанному выше, свёртка $\varphi * G^{\infty}$ имеет классические производные до второго порядка включительно. В силу этого, $\hat{L}\left(\varphi * G^{\infty}\right)$ непрерывен и ограничен в любой подобласти $\mathbf{\Omega}$, следовательно, $\hat{L}\left(\varphi * G^{\infty}\right) = 0$ в любой подобласти $\mathbf{\Omega}$. А это и означает, что $\varphi * G_0$ является классическим решением. Справедливость же равенства $V|_{y=0} = \varphi(x)$ проверяется непосредственной подстановкой в функцию Грина значения $y = 0$.

Доказательство единственности проведём от противного. Предположим, что существуют два решения задачи (12) $V_1 \ne V_2$. Обозначим их разность за $U = V_1 - V_2$. Тогда U является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \hat{L}U \overset{def}{=} \hat{\sigma}_1^2 U''_{xx} + 2\hat{\rho}\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2 U''_{xy} + \hat{\sigma}_2^2 U''_{yy} + \\ \quad + \hat{\alpha}_1 U_x + \hat{\alpha}_2 U_y - \hat{r}U = 0, \quad (x, y) \in \Pi^{\infty}, \\ U\big|_{y=0} = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \\ \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{r} \ge 0, \quad |\hat{\rho}| < 1. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что решением этой задачи является тождественный ноль и модифицированные функции Бесселя I_{ν} и K_{ν}, которые, как известно (см. например [4]), экспоненциально растут I_{ν} — на бесконечности, а K_{ν} — нуле, причём I_{ν} растёт быстрее чем $e^{-\frac{\hat{\alpha}_2 y}{2\hat{\sigma}_2^2}}$. Следовательно, разность $V_1 - V_2$ растёт на бесконечности быстрее чем $e^{-\frac{\hat{\alpha}_2 y}{2\hat{\sigma}_2^2}}$, либо тождественно равна нулю. Пользуясь условием на бесконечности в (12) получаем, что $V_1 - V_2 \equiv 0$, что и означает единственность решения. Теорема доказана.

5. Решение исходной задачи

В исходной задаче (2) граничная функция

$$\left(c^{1/2} - c^{-1/2} - Ke^{-x}\right)_{+}.$$

— непрерывная, ограниченная и бесконечно дифференцируемая функция за исключением одной точки $\overline{x} = \ln \frac{c^{1/2} - c^{-1/2}}{K}$. Функции такого вида всегда можно представить как сумму двух функций — одна из которых принадлежит описанному выше классу M_0, а другая является финитной функцией, которая имеет одну точку разрыва производной. По аналогии с классом M_0 можно доказать, что в таком классе финитных функций решение будет уже обобщённым (см. например [5]) так же будет единственно и представляет собой свёртку (13). Исходя из этого, решение задачи (2) имеет вид:

$$V(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial P^{\infty}(x-x_0,y)}{\partial x}\left(c^{1/2}-c^{-1/2}-Ke^{-x_0}\right)_{+}dx_0.$$

Вычисляя свёртку, получаем ответ:

$$V(x,y)=\left(c^{1/2}-c^{-1/2}\right)e^{-\frac{\hat{\alpha}_2 y}{2\sigma_2^2}}\begin{cases}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\left(\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2^{-1}\sqrt{1-\hat{\rho}^2}\,y\lambda\right)\exp\left[\left(\beta-\sqrt{b^2+\lambda^2}\right)s_0(x,y)\right]}{\sqrt{b^2+\lambda^2}\left(\sqrt{b^2+\lambda^2}-\beta\right)\left(\sqrt{b^2+\lambda^2}+1-\beta\right)}d\lambda,\\ s_0(x,y)>0,\\ \Bigg[\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\left(\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2^{-1}\sqrt{1-\hat{\rho}^2}\,y\lambda\right)\exp\left[\left(\beta+\sqrt{b^2+\lambda^2}\right)s_0(x,y)\right]}{\sqrt{b^2+\lambda^2}\left(\sqrt{b^2+\lambda^2}+\beta\right)\left(\sqrt{b^2+\lambda^2}-1+\beta\right)}d\lambda+\\ +\exp\left(-y\sqrt{\frac{\hat{\alpha}_2^2}{4\hat{\sigma}_2^4}+\frac{\hat{r}}{\hat{\sigma}_2^2}}\right)-\\ -e^{s_0(x,y)}\,\mathrm{Re}\exp\left(-y\sqrt{\frac{\hat{r}}{\hat{\sigma}_2^2}+\frac{\hat{\alpha}_2^2}{4\hat{\sigma}_2^4}-\frac{\hat{\sigma}_1^2(1-\hat{\rho}^2)}{\hat{\sigma}_2^2}+\frac{\hat{\alpha}_1}{\hat{\sigma}_2^2}-\frac{\hat{\rho}\hat{\sigma}_1\hat{\alpha}_2}{\hat{\sigma}_2^3}}\right)\Bigg],\\ \qquad s_0(x,y)>0.\end{cases}$$

где

$$s_0(x,y)=\ln\frac{K}{\left(c^{1/2}-c^{-1/2}\right)}-x+\frac{\hat{\rho}\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_2}y,$$

$$b^2=\frac{1}{4\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2(1-\hat{\rho}^2)}\left(\hat{\alpha}_2^2+4\hat{\sigma}_2^2\hat{r}+\frac{\hat{\sigma}_2^2}{(1-\hat{\rho}^2)}\left(\frac{\hat{\alpha}_1}{\hat{\sigma}_1}-\frac{\hat{\rho}\hat{\alpha}_2}{\hat{\sigma}_2}\right)^2\right).$$

В следующей таблице приведена серия вычислительных экспериментов с различными начальными данными. Оптимизация велась методом сеточных вычислений с использованием пакета Mathcad. F_{low} и F_{high} — нижняя и верхние оценки. Остальные начальные параметры задачи

$$\delta_1=\delta_2=0,01,\ r=0,05,\ K=3.$$

S_1	S_2	σ_1	σ_2	ρ	c	F_{low}	F_{high}
12	7	0,2	0,1	0,5	4,2	5,717	5,773
22	7	0,2	0,1	–0,5	7,5	14,718	14,764
3	3	0,1	0,1	0,9	1,75	0,229	0,269

Литература

1. *Margrabe W.* The value of option to exchange one asset for another // J. Finance. 1978. Vol. 33. P. 177–186.
2. *Broadie M.*, *Detemple J.* The valuation of American Options on Multiple Assets., Mathematical finance. V. 7, No. 3, 241–286, 1997.
3. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 2. Факты. Модели. Т. 3. Теория. М.: ФАЗИС, 1998.
4. *Градштейн И. С.*, *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962.
5. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.

Муравей Дмитрий Леонидович. Аспирант ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова. Окончил МГУ им. М. В. Ломоносова в 2009 году. Область научных интересов: Математические и инструментальные методы экономики, системный анализ, математическое моделирование, методы принятия решений. Количество публикаций — 5. E-mail: d.muravey@mail.ru