Общая теория систем

Вспомогательные равновесия для статических и динамических конфликтных задач*

В. Э. Смольяков, Э. Р. Смольяков

Аннотация. Для произвольных статических и динамических игровых (конфликтных) задач предлагается несколько новых понятий конфликтного равновесия, не содержащих в своем определении никаких искусственных норм поведения участников и помогающих уточнять иерархию равновесий в случае наличия в задаче какой-либо явной или скрытой симметрии, не позволяющей выяснить, какое из наисильнейших равновесий, неразличимых в рамках уже известного множества понятий равновесия, является самым устойчивым (наиболее сильным). На примерах статических и динамических игровых задач демонстрируются возможности новых равновесий и методика их поиска.

Ключевые слова: *конфликтные равновесия, дифференциальные игры.*

Введение

В классической теории игр [1–6] каждый из классов игровых задач — бескоалиционных и коалиционных, некооперативных и кооперативных, антагонистических и других типов, причем как статических, так и описываемых дифференциальными уравнениями — изучался изолированно от остальных классов. Подобный подход к поиску понятий решения не позволил ни для одного из классов сформулировать понятие решения, существующего для всех задач конкретного класса и устраивающего всех участников игры.

В [7–11] построена теория конфликтных задач, явившаяся альтернативой (и существенным расширением) классической теории игр, позволившая, в отличие от последней, в рамках единого унифицированного подхода к исследованию любых типов игр находить естественные и предпочтительные для всех участников решения любых конфликтных задач. Эта теория, основанная на множестве понятий равновесия, не вводящих в игру никаких искусственных норм поведения участников, обеспечивает относительно несложный поиск решений любых задач, но, однако, полностью все же не решает проблему единственности (порождаемую, как правило, наличием если и не явной, то скрытой симметрии в игре), теоретически полное решение которой может быть достигнуто только за счет увеличения числа понятий равновесия, открывать каждое новое из которых — задача чрезвычайно сложная, подтверждением чему является тот факт, что в классической теории игр за весь двадцатый век было найдено всего несколько понятий равновесия, причем каждое из них обладает существенными недостатками.

Построенная в [7–11] система равновесий обеспечивает нахождение в любых играх наисильнейшего равновесия (решения), даже если некоторые из равновесий в этой системе (за исключением всегда существующего A-равновесия) оказываются пустыми, а предлагаемые в данной работе новые равновесия существенно дополняют эту систему.

Предлагаются четыре новых понятия равновесий (B^P, D^P, B^S, D^S) для любых игровых задач, как статических, так и динамических, позволившие закрыть наиболее широкую брешь во множестве всех известных понятий равновесия [1–11], не содержа-

* Работа поддержана Программой фундаментальных исследований ОНИТС РАН «Интеллектуальные информационные технологии, системный анализ и автоматизация».

щие в своем определении никаких искусственных норм поведения участников.

В [7–11] построена система равновесий и порождаемая ими теория (явившаяся альтернативой для крайне ограниченной в своих возможностях классической теории игр), которая обеспечивает нахождение в любых играх наисильнейшего равновесия (решения), а предлагаемые в данной работе новые равновесия существенно дополняют эту систему.

1. Постановка задачи

Рассматриваются некооперативные программные дифференциальные игры и задачи принятия или отказа от предложения в смешанных стратегиях. Чтобы не загромождать изложение излишними деталями, число участников ограничено только двумя.

Пусть i-й игрок, $i = 1, 2$, выбирая смешанную стратегию $q_i(u_i, t)$ стремится получить максимум функционала

$$J_i(q) = \int\limits_T dt \iint\limits_{W(t)} f_0^i(u, x, t)\, dq_1\, dq_2, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

при ограничениях

$$\dot{x} = \iint\limits_{W(t)} f(u, x, t)\, dq_1\, dq_2, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x_j(t_0) &= x_j^0, \quad j = \overline{1, n}, \\ x_k(t_1) &= x_k^1, \quad k \in K \subset \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$(u_1, u_2, t) \in W \subset E_1 \times E_2 \times T. \quad (4)$$

Примем следующие обозначения:

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n;$$

E_i, $i = 1, 2$ — конечномерные пространства; W — компактное множество в $E_1 \times E_2 \times T$, $W(t)$ — сечение множества W в момент $t \in T = [t_0, t_1]$; K — подмножество множества индексов $\{\overline{1, n}\}$;

$$U_i \stackrel{\triangle}{=} Pr_{E_i} W$$

— проекция множества W на E_i;

$$E \stackrel{\triangle}{=} E_1 \times E_2;$$

Q_i — множество смешанных стратегий $q_i(u_i, t)$ i-го участника в задаче (1), (2) с начальным условием $x(t_0) = x^0$ и с заменой множества W на некоторое компактное множество $U_1 \times U_2$ (множество Q_i согласно теоремам 4.2.1 и 4.2.6 из [11] представляет собой выпуклый компакт в $*$-слабой топологии пространства $L_1^*(T, C(U_i)))$; $P_{q_i}(t)$ — носитель меры $q_i(\cdot, t)$ в момент $t \in T$, т. е. такое наименьшее замкнутое множество в U_i, дополнение которого имеет $q_i(\cdot, t)$-меру нуль.

Допущения. Пусть $T = [t_0, t_1]$ — ограниченный фиксированный отрезок вещественной оси E^1; отображение

$$\hat{f} = (f_0^1, f_0^2, f_1, \ldots, f_n) : U \times E^n \times T \to E^{n+2}$$

таково, что функция $\hat{f}(u, x, \cdot)$ измерима (по Лебегу) при всех $u \in U$, $x \in E^n$, а функция $\hat{f}(\cdot, \cdot, t)$ при каждом $t \in T$ непрерывно дифференцируема; функция $|\hat{f}|$ мажорируется на T функцией $s(t)(|x| + 1)$, где $s(t)$ — некоторая интегрируемая функция; $x(t) : T \to E^n$ — абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению (2); кроме того, функция $\hat{f}$ удовлетворяет с интегрируемой функцией $b(t)$ условию Липшица:

$$\left| \hat{f}(u, \overline{x}, t) - \hat{f}(u, x, t) \right| \leqslant b(t) |\overline{x} - x|$$

для всех $u \in U$, $\overline{x}$, $x \in E^n$, $t \in T$.

Пусть G — подмножество компактного множества $Q_1 \times Q_2$, образованное только такими стратегиями q_i, которые позволяют обеспечить удовлетворение ограничений (3), (4), причем ограничения (3) вводят в задачу (1)–(4) неявную зависимость между стратегиями, а ограничения (4) — явную, в связи с тем, что почти (в смысле меры Лебега) в каждый момент $t \in T$ меры $q_i(\cdot, t)$ могут быть выбраны только так, чтобы прямое произведение $P_{q_1 q_2}(t)$ их носителей $P_{q_1}(t)$ и $P_{q_2}(t)$ оказывалось во множестве $W(t)$. Только такие меры считаются допустимыми. Таким образом, множество G — это множество только таких пар мер $q_1(\cdot, t)$ и $q_2(\cdot, t)$, произведение носителей которых в каждый момент $t \in T$ лежит в $W(t)$, т. е. $P_{q_1}(t) \times P_{q_2}(t) \subset W(t)$. $Pr_{Q_i} G$ — это проекция множества G на пространство Q_i.

2. Новые понятия оптимальности и равновесности

Чтобы продемонстрировать сущность и важность предлагаемых новых понятий равновесия, не отвлекаясь на естественные усложнения, связанные с переходом от задач с двумя участниками к задачам со многими участниками, от задач статических к задачам, описываемым дифференциальными уравнениями, рассмотрим сначала статические задачи с двумя участниками при следующих ограничениях, не снижающих общности полученных результатов.

Допущение. Пусть Q_1 и Q_2 — метрические пространства, а G — компактное множество в их произведении $Q_1 \times Q_2$, и пусть на множестве G определены непрерывные функции (функционалы) $J_1(q)$ и $J_2(q)$, где $q = (q_1, q_2)$.

Предполагается, что i-й участник (игрок), выбирая стратегию (состояние) q_i из доступного ему сечения $G(q_k)$ $(k \neq i,\ i = 1, 2)$ множества G или из проекции $Pr_{Q_i}G$ множества G на пространство Q_i, стремится обеспечить максимум своей «платежной» функции (функционала) $J_i(q)$, $i = 1, 2$.

Чтобы прояснить смысл и роль предлагаемых новых понятий равновесий, приведем сначала те равновесия из [9–11], между которыми могут быть вставлены предлагаемые новые равновесия.

Определение 1. Точку (ситуацию) $q^* \in G$ назовем A_i-экстремальной, если при заданной стратегии q^*_k, $k \neq i$, $k = 1, 2$, допустимой оказывается только одна стратегия $q^*_i = G(q^*_k)$ или если любой стратегии

$$q_i \in G(q^*_k) \setminus q^*_i$$

i-го игрока можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию

$$\hat{q}_k \stackrel{\triangle}{=} \hat{q}_k\langle q_i\rangle \in G(q_i)$$

остальных игроков так, чтобы имело место отношение

$$J_i(\hat{q}_k\langle q_i\rangle, q_i) \leqslant J_i(q^*). \tag{5}$$

Ситуацию q^* назовем ситуацией A-равновесия, если неравенства вида (5) удовлетворяются в точке $q^* \in G$ для обоих $i = 1, 2$, то есть если $q^* \in A_1 \cap A_2 \stackrel{\triangle}{=} A$.

Равновесие A, существующее (с любой заданной точностью ε) в любых задачах [1], причем даже в отсутствие компактности G и непрерывности функций J_i, является гарантом существования решения любой конфликтной задачи и выполняет роль наислабейшего из равновесий, причем любые другие возможные (симметричные) равновесия ищутся именно на множестве A и позволяют выделить на этом множестве наисильнейшее равновесие, с которым вынуждены согласиться участники.

Определение 2. Ситуацию $q^* \in A_i$ назовем B_i-экстремальной, если образующая ее стратегия другого игрока удовлетворяет условию

$$\max_{q_k \in A_i(q^*_i)} J_k(q^*_i, q_k) = J_k(q^*),\quad k = 1, 2,\quad k \neq i. \tag{6}$$

Назовем ситуацию $q^* \in G$ B-равновесием, если

$$q^* \in B_1 \cap B_2 \stackrel{\triangle}{=} B,$$

где B_i — множество всех B_i-экстремальных ситуаций.

Определение 3. Ситуацию $q^* \in B_i$ назовем $\overline{D}_i$-экстремальной, если она удовлетворяет условию:

$$\max_{q_i \in Pr_{Q_i}A_i} J_i\Big(\mathrm{Arg} \max_{q_k \in A_i(q_i)} J_k(q_i, q_k)\Big) = J_i(q^*), \tag{7}$$

и назовем ее $\overline{D}$-равновесием, если

$$q^* \in \bigcap_{i=1}^{2} \overline{D}_i \stackrel{\triangle}{=} \overline{D},$$

где $\overline{D}_i$ — множество всех $\overline{D}_i$-экстремальных ситуаций.

Определение 4. Ситуацию $q^* \in B_i$ назовем $\overline{D}'_i$-экстремальной, если она удовлетворяет условию:

$$\max_{q_i \in A_i(q^*_k)} J_i\Big(\mathrm{Arg} \max_{q_k \in A_i(q_i)} J_k(q_i, q_k)\Big) = J_i(q^*),\quad i = 1, 2,\quad k \neq i, \tag{8}$$

и назовем ее $\overline{D}'$-равновесием, если

$$q^* \in \bigcap_{i=1}^{2} \overline{D}'_i \stackrel{\triangle}{=} \overline{D}'.$$

Определение 5. Ситуацию $q^* \in B_i$ назовем D^A_i-экстремальной, если она удовлетворяет условию:

$$\max_{q_i \in A(q^*_k)} J_i\Big(\mathrm{Arg} \max_{q_k \in A(q_i)} J_k(q_i, q_k)\Big) = J_i(q^*),\quad i = 1, 2,\quad k \neq i, \tag{9}$$

и назовем ее D^A-равновесием, если

$$q^* \in \bigcap_{i=1}^{2} D^A_i \stackrel{\triangle}{=} D^A.$$

В следующих четырех определениях предлагаются новые понятия равновесий, весьма недостававшие общей теории игр уже хотя бы потому, что B-равновесие, в отличие от A-равновесия, может быть пустым.

Определение 6. Ситуацию $q^* \in A_i$ назовем B^P_i-экстремальной, если на множестве

$$J(G) = J_1(q) \times J_2(q)$$

она определяет точку $J(q^*)$, являющуюся «индивидуально паретовской» [8, с. 145], т. е. оптимальной по Парето по отношению лишь к точкам

$$J(q^*_i, q_k),\quad q_k \in A_i(q^*_i). \tag{10}$$

Назовем ситуацию $q^* \in G$ B^P-равновесием, если

$$q^* \in B^P_1 \cap B^P_2 \stackrel{\triangle}{=} B^P,$$

где B^P_i — множество всех B^P_i-экстремальных ситуаций.

Определение 7. Назовем ситуацию $q^* \in B^P_i$ $\overline{D}^P_i$-экстремальной, если на множестве B^P_i она оказывается точкой Парето. Назовем ситуацию q^* $\overline{D}^P$-равновесием, если

$$q^* \in \overline{D}^P_1 \cap \overline{D}^P_2 \stackrel{\triangle}{=} \overline{D}^P,$$

где $\overline{D}^P_i$ — множество всех $\overline{D}^P_i$-экстремальных ситуаций.

Определение 8. Ситуацию $q^* \in A_i$ назовем B_i^S-экстремальной, если на множестве

$$J(G) = J_1(q) \times J_2(q)$$

она определяет точку $J(q^*)$, являющуюся «индивидуально слейтеровской» [8, с. 145], т. е. оптимальной по Слейтеру по отношению лишь к точкам

$$J(q_i^*, q_k), \quad q_k \in A_i(q_i^*). \tag{11}$$

Назовем ситуацию $q^* \in G$ B^S-равновесием, если

$$q^* \in B_1^S \cap B_2^S \triangleq B^S,$$

где B_i^S — множество всех B_i^S-экстремальных ситуаций.

Определение 9. Назовем ситуацию $q^* \in B_i^S$ D_i^S-экстремальной, если на множестве B_i^S она оказывается точкой Слейтера [8, с. 145]. Назовем ситуацию q^* D^S-равновесием, если

$$q^* \in D_1^S \cap D_2^S \triangleq D^S,$$

где D_i^S — множество всех D_i^S-экстремальных ситуаций.

Теорема 1. *Множества B^P- и B^S-равновесных ситуаций удовлетворяют включениям $A \supseteq B^S \supseteq B^P \supseteq B$.*

3. Примеры решения игровых задач

Продемонстрируем полезность предлагаемых новых понятий B^P-, D^P-, B^S- и D^S-равновесия на примерах статических игр с двумя участниками.

Пример 1. Пусть определена статическая игра, в которой каждый из игроков максимизирует свою (матричную) платежную функцию

$$J_1(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} \cdot & 11 & 11 & 3 \\ 5 & 6 & \cdot & 7 \\ 12 & 8 & 14 & 14 \\ 2 & \cdot & 6 & \cdot \end{bmatrix},$$

$$J_2(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} \cdot & 7 & 14 & 8 \\ 15 & 5 & \cdot & 9 \\ 6 & 12 & 10 & 4 \\ 3 & \cdot & 2 & \cdot \end{bmatrix}.$$

Первый игрок выбирает одну из четырех строк, а 2-й — один из четырех столбцов. Игровое множество G участников конфликта задается теми элементами матриц J_1 и J_2 соответственно, в которые вписаны возможные выигрыши участников.

Найдем сначала множество наислабейших равновесий, определяемое матрицей $A = A_1 \cap A_2$ и ее усилением B-равновесием:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cdot & + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & + & + & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cdot & + & + & + \\ + & + & \cdot & + \\ + & + & + & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} \cdot & + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

$$B_1 = (a_{13}, a_{32}), \quad B_2 = (a_{12}, a_{31}, a_{33}, a_{34}), \quad B = \varnothing.$$

Поскольку B-равновесие пусто, то пустыми являются и все усиливающие его равновесия. А следовательно, для поиска наисильнейшего равновесия следует воспользоваться как предлагаемыми новыми понятиями равновесия, так и последовательными итерациями исходной игры. Первую вспомогательную игру (итерацию) получаем, оставляя в исходной игре только те ситуации, которые совпадают с непустыми элементами матрицы A, поскольку любую другую ситуацию хотя бы один из игроков может улучшить для себя и другой ему не в силах помешать это сделать. Так что существенными в матрицах J_i являются только ситуации из матрицы A.

Сначала, однако, найдем предлагаемые новые слабые равновесия из определений 6–9. Заметим, что существенное усложнение поиска B^P- и B^P-равновесных ситуаций по сравнению с B-равновесными состоит в том, что помимо использования A_i-экстремальных ситуаций необходимо построить еще изображенные на рис. 1 отображения $J(a_{ij})$ аргументов a_{ij} платежных матриц J_1 и J_2 на плоскость (J_1, J_2). Без помощи этого рисунка найти предлагаемые новые равновесия затруднительно. Используя определения 6–9, находим:

$$B_1^P = (a_{13}, a_{32}, a_{33}),$$
$$B_2^P = (a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{24}, a_{31}, a_{32}, a_{33}),$$
$$B^P = B_1^P \cap B_2^P = (a_{13}, a_{32}, a_{33});$$
$$B_1^S = B_1^P \cup a_{12} \cup a_{34},$$
$$B_2^S = B_2^P,$$
$$B^S = B^P \cup a_{12};$$
$$\overline{D}_1^P = (a_{13}, a_{33}),$$
$$\overline{D}_2^P = (a_{13}, a_{21}, a_{33}),$$
$$\overline{D}^P = (a_{13}, a_{33});$$

$$D_1^S = (a_{13}, a_{33}, a_{34}),$$
$$D_2^S = (a_{13}, a_{21}, a_{33}, a_{34}),$$
$$D^S = D^P \cup a_{34}.$$

Заметим, что множество B_1^P-равновесных ситуаций слагается из оптимальных по Парето ситуаций, определяемых в отдельности в каждой из непустых строк матрицы A_1. Например, на множестве (a_{12}, a_{13}), образованном из элементов первой строки этой матрицы, только ситуация a_{13} оптимальна по Парето (см. рис. 1); и в то же время обе эти ситуации оптимальны по Слейтеру. А на множестве из четырех элементов третьей строки матрицы A_1 оптимальными по Парето оказываются только два элемента (a_{32}, a_{33}). Аналогично ищутся остальные элементы множеств из определений 5–8.

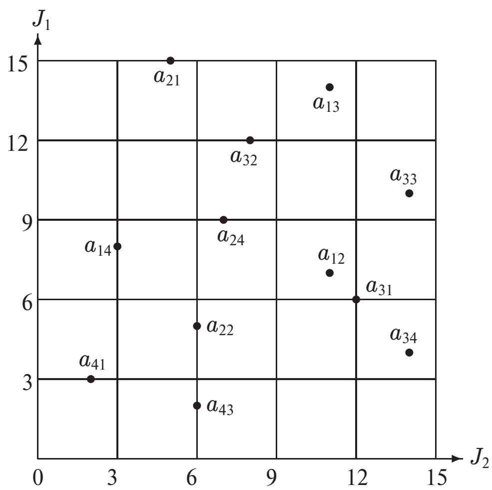

Рис. 1

Чтобы найти наисильнейшее равновесие в этой игре, обратимся к первой итерации игры, т. е. рассмотрим редуцированную игру, исключив в исходной игре все те ситуации, которые не вошли во множество A, поскольку все подобные ситуации являются явно «неигровыми», так как с каждой из них по крайней мере один из игроков никогда не согласится, имея возможность (согласно определению множества A) улучшить ее, перейдя в более выгодную для него ситуацию, и при этом другой участник не имеет никакой возможности наказать его за это. В результате получаем вспомогательную игру со следующими платежными функциями

$$J_1^1 = \begin{bmatrix} \cdot & 11 & 11 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 12 & 8 & 14 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad J_2^1 = \begin{bmatrix} \cdot & 7 & 14 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 6 & 12 & 10 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

в которой ищем равновесия по той же методике:

$$A_1^1 = \begin{bmatrix} \cdot & + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad A_2^1 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

$$A^1 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

$$B_1^1 = (a_{13}, a_{33}),$$
$$B_2^1 = (a_{32}, a_{33}),$$
$$B^1 = a_{33};$$
$$\overline{D}_1^1 = a_{33},$$
$$\overline{D}_2^1 = (a_{32}, a_{33}),$$
$$\overline{D}^1 = a_{33};$$
$$B_1^{P1} = (a_{12}, a_{13}, a_{33}),$$
$$B_2^{P1} = (a_{13}, a_{32}, a_{33}),$$
$$B^{P1} = (a_{13}, a_{33});$$
$$\overline{D}_1^{P1} = \overline{D}_2^{P1} = (a_{13}, a_{33}) = \overline{D}^{P1}.$$

На второй итерации приходим к вспомогательной игре с платежными функциями, содержащими всего по два аргумента (a_{13}, a_{33}). Для этой простой вспомогательной игры находим

$$A_1^2 = a_{33}, \quad A_2^2 = (a_{13}, a_{33}), \quad A^2 = a_{33}.$$

На первой и второй итерациях ярко выделилась единственная наисильнейшая равновесная ситуация a_{33}. Причем новые B^{P1}- и $\overline{D}^{P1}$-равновесия позволили выяснить, что более слабым равновесием является ситуация a_{13}, а все остальные ситуации существенно более слабые, чем эти две ситуации. Поскольку ситуация a_{33} — наисильнейшее равновесие в этой игре, то дележ между игроками кооперативного дохода, достигаемого в ситуации a_{13} и равного 25, производится в пропорции, определяемой выигрышами участников в этой единственной ситуации наисильнейшего равновесия, т. е. по формуле 4.2 из [10, с. 174], определяющей следующие доли участников от их кооперативного выигрыша:

$$y_1 = \frac{14}{24}25, \quad y_2 = \frac{10}{24}25.$$

Пример 2. Пусть определена статическая игра, в которой каждый из игроков максимизирует

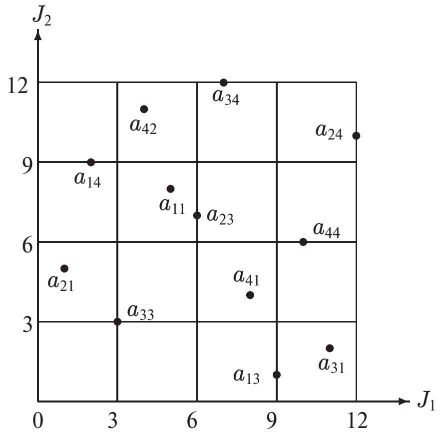

Рис. 2

свою (матричную) платежную функцию

$$J_1(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} 5 & \cdot & 9 & 2 \\ 1 & \cdot & 6 & 12 \\ 11 & \cdot & 3 & 7 \\ 8 & 4 & \cdot & 10 \end{bmatrix},$$

$$J_2(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} 8 & \cdot & 1 & 9 \\ 5 & \cdot & 7 & 10 \\ 2 & \cdot & 3 & 12 \\ 4 & 11 & \cdot & 6 \end{bmatrix}.$$

Первый игрок имеет возможность выбирать одну из четырех строк, а 2-й — один из четырех столбцов. Игровое множество G участников конфликта задается теми элементами матриц J_1 и J_2 соответственно, в которые вписаны возможные выигрыши участников.

Множество наислабейших равновесий в исходной конфликтной задаче определяется матрицей $A = A_1 \cap A_2$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} + & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & + \\ + & \cdot & + & + \\ + & + & \cdot & + \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} + & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & + & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Используя определения 2–9 и рис. 2 и применяя методику [9, 10] поиска наисильнейшего равновесия в игровой задаче, получаем следующие более сильные равновесия:

$$B_1 = (a_{11}, a_{24}, a_{34}, a_{42}),$$
$$B_2 = (a_{11}, a_{23}, a_{24}, a_{42}),$$
$$B = (a_{11}, a_{24}, a_{42});$$
$$\overline{D}_1 = a_{24},$$
$$\overline{D}_2 = a_{42},$$
$$\overline{D} = \varnothing;$$
$$B_1^P = (a_{11}, a_{13}, a_{24}, a_{31}, a_{34}, a_{42}, a_{44}),$$
$$B_2^P = (a_{11}, a_{23}, a_{24}, a_{34}, a_{42}),$$
$$B^P = B_1^P \cap B_2^P = (a_{11}, a_{24}, a_{34}, a_{42}) = B^S \supset B;$$
$$\overline{D}_1^P = (a_{24}, a_{34}) = \overline{D}_2^P = \overline{D}^P = D^S;$$
$$D' = a_{24}.$$

Наисильнейшим равновесием в этой игре оказывается ситуация $a_{24} = \overline{D}' \cap D^P \cap B$. А поскольку кооперативный выигрыш достигается в ней самой, то его дележ дается выигрышами игроков в этой ситуации.

4. Поиск решений в дифференциальных играх

Понятие A-равновесия в дифференциальных играх целесообразно заменить несколько более сильным понятием A^c-равновесия [9].

Определение 10. Стратегию $q^* \in G$ назовем согласованной A_i^c-экстремальной, если любой стратегии

$$q_i \in G(q^{i*}) \setminus q_i^*$$

i-го игрока можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию

$$\hat{q}^i \triangleq \hat{q}^i \langle q_i \rangle \in G(q_i)$$

другого игрока так, чтобы имело место отношение

$$J_i(\hat{q}_k \langle q_i \rangle, q_i) \leqslant J_i(q^*), \tag{12}$$

при условии, что ненулевое (в смысле меры Лебега) множество в T, на котором $\hat{q}_k(t) \neq q_k^*(t)$, является подмножеством множества из T, на котором $q_i(t) \neq q_i^*(t)$, $k \neq i$, $i = 1, 2$. Ситуацию q^* назовем ситуацией согласованного A^c-равновесия, если неравенства (12) удовлетворяются для обоих игроков, т. е. если $q^* \in A_1^c \cap A_2^c = A^c$.

Для поиска A^c-равновесия в дифференциальных играх весьма эффективна следующая теорема [11, с. 189–190].

Теорема 2. *Пусть q^* — A^c-равновесие в задаче с N участниками. Тогда найдется N ненулевых абсолютно непрерывных вектор-функций*

$$p^i(t) = \big(p_0^i, p_1^i(t), \ldots, p_n^i(t)\big), \quad p_0^i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, N},$$

удовлетворяющих почти всюду в T уравнениям

$$\dot{p}_k^i = -\iint\limits_{W(t)} p^i \frac{\partial f^i}{\partial x_k}\, d\tilde{q}, \quad k = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (13)$$

где $f^i = (f_0^i, f_1, \ldots, f_n)$, и краевым условиям

$$\begin{aligned} &p_k^i(t_0) = c_k^i, \quad k = \overline{1, n},\\ &p_j^i(t_1) = 0, \quad j \notin m \quad \text{и} \\ &p_j^i(t_1) = \bar{c}_j^i, \quad \text{если} \quad j \in m; \end{aligned} \quad (14)$$

гамильтонианы

$$H^i = \int\limits_{W(t)} p^i f^i\, dq^*$$

непрерывны в T; A^c-равновесная ситуация q^* удовлетворяет отношениям

$$\begin{gathered} [H^i](\hat{q}^i, q_i) \leqslant [H^i](q^*),\\ q_i \in G(q^{*i}), \quad \hat{q}^i \in G(q_i), i = \overline{1, N}. \end{gathered} \quad (15)$$

В отношении всех базовых равновесий, более сильных, чем A^c-равновесие, справедливы некоторые аналоги уравнений (13), (14) и условий (15). Если рассматривать гамильтонианы в этих необходимых условиях в качестве платежных функций в момент t, то можно в каждый момент t решить «локальную» (статическую) конфликтную задачу о наисильнейшем равновесии, причем во многих случаях достаточно решить всего одну подобную задачу, что позволяет сразу же найти решение и исходной дифференциальной игры.

Рассмотрим пример дифференциальной игры, на котором продемонстрируем важную роль предлагаемых новых понятий равновесия и методику поиска равновесий в дифференциальных играх.

Пример 3. Рассмотрим игру, в которой каждый из участников максимизирует свой функционал

$$J_i = \int\limits_0^1 x_i(t)\, dt, \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

где фазовые переменные $x_i(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\dot{x}_i = f_i(u_1, u_2), \quad (17)$$

причем каждая из управляющих переменных принимает только четыре значения и некоторые пары значений запрещены, так что правые части уравнений (17) принимают вид следующих матриц (в которых определены только 12 элементов, фактически и образующих игровое множество W):

$$\begin{aligned} f_1(q_1, q_2) &= \begin{bmatrix} 3 & \cdot & 6 & 11\\ 10 & 12 & 1 & 5\\ 8 & \cdot & 7 & \cdot\\ \cdot & 2 & 9 & 4 \end{bmatrix},\\ f_2(q_1, q_2) &= \begin{bmatrix} 11 & \cdot & 7 & 1\\ 5 & 2 & 12 & 9\\ 4 & \cdot & 6 & \cdot\\ \cdot & 10 & 3 & 8 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (18)$$

где стратегией первого игрока является выбор строки, а стратегией второго — выбор столбца в игровых матрицах (18).

Для поиска согласованного A^c-равновесия воспользуемся необходимыми условиями (13)–(15).

Задача рассматривается в классе чистых стратегий, т. е. в измеримых управляющих переменных $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Для поиска решения (наисильнейшего из существующих в задаче равновесий) воспользуемся теоремой 2, в соответствии с которой введем в рассмотрение гамильтонианы

$$\begin{aligned} H^1 &= p_0^1 x_1 + p_1^1 f_1(u_1, u_2) + p_2^1 f_2(u_1, u_2),\\ H^2 &= p_0^2 x_2 + p_1^2 f_1(u_1, u_2) + p_2^2 f_2(u_1, u_2) \end{aligned} \quad (19)$$

и найдем решения уравнений (13):

$$\begin{gathered} \dot{p}_i^k = -\frac{\partial H^k}{\partial x_i}, \quad p_i^k(1) = 0,\\ i = 1, 2, \ k = 1, 2. \end{gathered} \quad (20)$$

С учетом решений $p_1^k = 1 - t$, $p_2^k = 0$, $k = 1, 2$, этих уравнений получаем следующие гамильтонианы:

$$\begin{aligned} H^1 &= x_1 + (1 - t) f_1(u_1, u_2),\\ H^2 &= x_2 + (1 - t) f_2(u_1, u_2). \end{aligned}$$

Так как $1 - t > 0$ при всех $0 \leqslant t < 1$, то в качестве платежных функций во всех возникающих «локальных» играх (т. е. в играх, рассматриваемых в каждый фиксированный момент t на траектории) в данном случае рассматриваются одни и те же (не изменяющиеся со временем) матричные функции (18).

Найдем в локальной игре с этими матричными платежными функциями все основные базовые симметричные равновесия. Определяем сначала множество наислабейших равновесий, задаваемое матри-

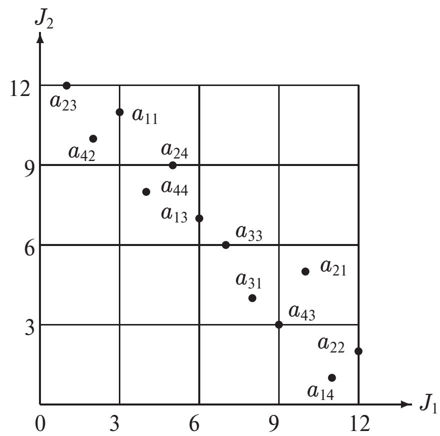

Рис. 3

цей $A = A_1 \cap A_2$ (где мы принимаем $A = A^c$):

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + \\ + & + & \cdot & + \\ + & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & + & + & + \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} + & \cdot & + & \cdot \\ + & \cdot & + & + \\ + & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & + & + & + \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & + \\ + & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & + & + & + \end{bmatrix}.$$

Используя определения 2–9 и рис. 3, находим следующие более сильные равновесия:

$$B_1 = (a_{14}, a_{24}, a_{33}, a_{42}), \quad B_2 = (a_{21}, a_{24}, a_{42}, a_{43}),$$
$$B = (a_{24}, a_{42});$$
$$B_1^P = (a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{24}, a_{31}, a_{33}, a_{42}, a_{43}, a_{44}),$$
$$B_2^P = (a_{11}, a_{13}, a_{21}, a_{23}, a_{24}, a_{33}, a_{42}, a_{43}),$$
$$B^P = (a_{21}, a_{24}, a_{33}, a_{42}, a_{43});$$
$$\overline{D}_1 = a_{14}, \quad \overline{D}_2 = a_{42}, \quad \overline{D} = \varnothing;$$
$$\overline{D}_1^P = (a_{21}, a_{22}, a_{24}, a_{33}, a_{42}),$$
$$\overline{D}_2^P = (a_{11}, a_{13}, a_{21}, a_{23}, a_{24}, a_{33}),$$
$$\overline{D}^P = (a_{21}, a_{24}, a_{33}).$$

Таким образом, из 7 ситуаций, образующих множество A, только две ситуации (a_{24}, a_{42}) оказываются наиболее сильными игровыми равновесиями, а три ситуации (a_{21}, a_{24}, a_{33}) являются всего лишь индивидуально парето-оптимальными (т. е. $\overline{D}^P$-равновесными). А поскольку в конфликтных (игровых) задачах свойство парето-оптимальности является всего лишь приятным дополняющим обстоятельством к понятию игровой устойчивости (равновесности), по существу, однако, совершенно не влияющим на решение игры, характеризуемое только свойством его игровой устойчивости, то ситуация a_{24}, обладающая (по сравнению с a_{42}) не только индивидуально-паретовскими качествами, но и просто парето-оптимальная, едва ли может (с конфликтной, игровой точки зрения) считаться более предпочтительной, чем ситуация a_{42}. Поэтому в случае рассмотрения игры в качестве кооперативной следует принять, что обе эти ситуации являются эквивалентными наисильнейшими и определять справедливый дележ в кооперативной игре (16), (17) (с максимальным суммарным доходом участников, равным $J_1 + J_2 = 15$ и достигаемым в локальной игре в ситуации a_{21}) по формулам

$$y_1 = \frac{2+5}{26}15, \quad y_2 = \frac{9+10}{26}15, \quad y_1 + y_2 = 15.$$

Литература

1. *Roos C. F.* Generalized Lagrange Problems in the Calculus of Variations // Trans. Amer. Math. Soc. 1928. V. 30. P. 360–384.
2. *Nash J.* Non-Cooperative Games // Annals of Mathematics. 1951. V. 54. № 2. P. 286–295.
3. *Neumann J.* Zur Theorie der Gesellschaftsspiele // Math. Annalen. 1928. V. 100. P. 295–320.
4. *Нейман Дж. и Моргенштерн О.* Теория игр и экономические поведение. М.: Наука, 1970.
5. *Воробьев Н. Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, 1984.
6. *Вайсборд Э. М., Жуковский В. И.* Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. М.: Советское радио, 1980.
7. *Смольяков Э. Р.* Равновесные модели при несовпадающих интересах участников. М.: Наука, 1986.
8. *Смольяков Э. Р.* Теория антагонизмов и дифференциальные игры. М.: URSS, 2000.
9. *Смольяков Э. Р.* Теория конфликтных равновесий. М.: URSS, 2005.
10. *Смольяков Э. Р.* Методы решения конфликтных задач. М.: МГУ, 2010.
11. *Смольяков Э. Р.* Обобщенное оптимальное управление и динамические конфликтные задачи. М.: МГУ, 2010.

Смольяков Владимир Эдуардович. Главный специалист подразделения ИСА РАН. Окончил в 2005 г. Международную академию оценки и консалтинга. Количество печатных работ: 15. Область научных интересов: моделирование систем. E-mail: ser-math@rambler.ru

Смольяков Эдуард Римович. Д. ф.-м. н., профессор МГУ им. М. В. Ломоносова. Окончил МФТИ в 1962 г. Количество печатных работ: 230, монографий — 11. Область научных интересов: теория конфликтов и игр, оптимальное управление, теоретическая физика, философия эзотеризма. E-mail: ser-math@rambler.ru