Математические модели социально-экономических процессов

Структура вероятностной макросистемной демо-экономической модели (часть III)*

А. С. Алиев, А. Ю. Попков, Ю. С. Попков

Аннотация. Работа посвящена синтезу структуры и описанию модулей блока «INTERACTION», с помощью которых устанавливаются связи между блоками «POPULATION» и «ECONOMY».

Ключевые слова: *коэффициенты рождаемости, смертность, миграция, вероятности переходов, энтропийные модели миграции, индекс дохода, валовый внутренний продукт, коэффициент активности молодежи.*

Введение

В блоке «INTERACTION» реализуются прямые (агрегат «$P \to E$») и обратные (агрегат «$P \leftarrow E$») связи между блоками «POPULATION» и «ECONOMY». Агрегат «$P \to E$» имитирует влияние характеристик состояния населения на экономическую деятельность, а агрегат «$P \to E$» — влияние экономических индикаторов на состояние населения.

Напомним, что население является источником трудовых ресурсов и его состояние характеризуется пространственным распределением половозрастной структуры. Поэтому агрегат «$P \to E$» транслирует вектор $K(t)$ и вектор трудоспособной части населения $K^w(t)$ в блок «ECONOMY».

Более сложная ситуация с агрегатом «$P \leftarrow E$». В нем моделируется влияние пространственного распределения среднего душевого дохода $\omega(t)$, среднего душевого ВВП $\vartheta(t)$ на параметры *миграции*, *рождаемости*, *смертности*. Под средними показателями понимается осреднение по отраслям экономики.

* Работа поддержана РФФИ (№ 11–07–00092).

1. Миграция (MPP)

Стохастические механизмы миграционных процессов характеризуются функциями априорных вероятностей

$$\phi^\bullet(n,i,a,t),\ i \in [1, N+2] \quad \text{и} \quad \tilde{\phi}^\bullet(n, N+3, a, t)\ [1],$$

которые определяют априорную вероятность индивида из возрастной группы a, локализованного в стране n мигрировать в страну i (или наоборот) в момент времени t для населения типа NR (экономически мотивированного) и AS (мотивированного желанием воссоединения семей) соответственно.

1. *Население типа* NR. Априорная вероятность

$$\phi^\bullet(n,i,a,t) = \varphi^\bullet(n,i,t)\rho^\bullet(a,t),$$
$$(n,i) \in [1,N];\ a \in A; \quad \bullet = M, FW, FE. \qquad (1)$$

В этом равенстве априорная вероятность $\varphi^\bullet(n,i,t)$ характеризует (n,i)-миграционное решение $\bullet$-индивида. Поскольку рассматривается экономически мотивированное население, миграционное решение $\bullet$-индивида, проживающего в стране n и желающего мигрировать в страну i, определяется исключительно сравнительной полезностью $\Theta^\bullet(n,i,t)$ страны i по сравнению со страной n.

Обозначим полезности стран n и i через $u(n,t)$ и $u(i,t)$ соответственно. Будем полагать, что полезность зависит только от душевого дохода. Причем эта зависимость для больших значений душевого дохода меньше по сравнению с линейной зависимостью, что моделирует логарифмическая функция полезности:

$$u(n,t) = \ln \omega(n,t). \tag{2}$$

Следуя рекомендациям части 2, представим сравнительную полезность в виде:

$$\Theta^\bullet(n,i,t) = \eta^\bullet \exp\ (u(i,t) - u(n,t))\,, \tag{3}$$

где параметр $\eta^\bullet$ характеризует «ценность» различия душевых доходов в странах n и i.

Учитывая определение полезности (2), сравнительную полезность можно представить в виде:

$$\Theta^\bullet(n,i,t) = \eta^\bullet \frac{\omega(i,t)}{\omega(n,t)}. \tag{4}$$

Априорная вероятность

$$\varphi^\bullet(n,i,t) = \frac{\Theta^\bullet(n,i,t)}{\sum\limits_{i=1}^{N} \Theta^\bullet(n,i,t)}. \tag{5}$$

Учитывая (4), (5), получим, что априорная вероятность эмиграционных решений индивидов зависит только от душевого дохода страны въезда:

$$\varphi^\bullet(n,i,t) = \varphi^\bullet(i,t) = \frac{\omega(i,t)}{\sum\limits_{k=1}^{N}\omega(k,t)}, \qquad i \in [1,N]. \tag{6}$$

Вернемся к равенству (1), где функция $\rho^\bullet(a,t)$, $a \in A$ характеризует априорную вероятность миграционной подвижности возрастных групп из $(\bullet)$-классов населения. Вообще говоря, эта функция является внешней характеристикой подвижности возрастных групп населения, которая определяется путем опросов. Но можно предложить следующий модельный способ ее определения, основанный на предположении, что априорные вероятности принадлежности мигранта определенной возрастной группе одинаковые для всех стран.

Рассмотрим возрастное распределение населения класса $\bullet$:

$$K^\bullet(a,t) = \sum_{n\in[1,N]} K^\bullet(n,a,t),\ a \in A.$$

Обозначим $Z^\bullet(a,t)$ — *априорный* эмиграционный поток из возрастной группы a, населения класса $\bullet$:

$$Z^\bullet(a,t) = K^\bullet(a,t)\rho^\bullet(a,t). \tag{7}$$

Опираясь на макросистемную концепцию миграционных процессов, будем полагать, что функция $\rho^\bullet(a,t)$ максимизируют энтропию

$$H^\bullet = -\sum^{a\in A} K^\bullet(a,t)\rho^\bullet(a,t)\ln K^\bullet(a,t)\rho^\bullet(a,t) \tag{8}$$

при условии, что суммарный эмиграционный поток не превышает количество мобильного населения в странах $1,\ldots,N$ и функция априорной вероятности $\rho(a,t)$ нормирована. В качестве агрегированной характеристики миграционной подвижности примем коэффициент мобильности $\mu^\bullet(t)$. Поскольку энтропия (8) — вогнутая функция, то имеем следующую задачу на условный экстремум:

$$\begin{gathered} H^\bullet = -\sum_{a\in A} K^\bullet(a,t)\rho^\bullet(a,t)\ln K^\bullet(a,t)\rho^\bullet(a,t) \Rightarrow \max, \\ \sum_{a\in A} K^\bullet(a,t)\rho^\bullet(a,t) = \mu^\bullet(t)K^\bullet(t), \\ \sum_{a\in A}\rho^\bullet(a,t) = 1. \end{gathered} \tag{9}$$

В этих равенствах $K^\bullet(t)$ — общее количество населения $\bullet$-класса. Решение этой задачи — энтропийно-оптимальная функция априорного распределения вероятностей эмиграции из возрастных групп $a \in A$ имеет вид:

$$\rho^\bullet(a,t) = \frac{\mu^\bullet(t)K^\bullet(t)}{K^\bullet(a,t)} \frac{\exp\left(-\alpha^* K^{\bullet,-1}(a,t)\right)}{\sum\limits_{s\in A}\exp\left(-\alpha^* K^{\bullet,-1}(s,t)\right)}, \quad a \in A. \tag{10}$$

Множитель Лагранжа α^* является решением следующего уравнения:

$$\sum_{a\in A}(\mu^\bullet(t)K^\bullet(t)K^{\bullet,-1}(a,t) - 1)\exp\left(-\alpha K^{\bullet,-1}(a,t)\right) = 0. \tag{11}$$

В этих равенствах

$$K^{\bullet,-1}(a,t) = \frac{1}{K^\bullet(a,t)}.$$

Таким образом, *априорная вероятность миграционного* (n,i)*-решения индивида из возрастной группы* a *имеет вид*:

$$\begin{gathered} \phi^\bullet(n,i,a,t) = \\ = \mu^\bullet(t)K^{\bullet,-1}(a,t)\frac{\omega(i,t)}{\sum\limits_{k=1}^{N}\omega(k,t)} \frac{\exp\left(-\alpha^* K^{\bullet,-1}(n,t)\right)}{\sum\limits_{a\in A}\exp\left(-\alpha K^{\bullet,-1}(n,t)\right)}, \end{gathered} \tag{12}$$

$(n,i) \in [1,N];\ a \in A.$

Напомним, что знак $\bullet = M, FW, FE$ (население мужское, женское с западным стандартом воспроизводства и женское с восточным стандартом воспроизводства).

2. *Население типа AS (страна $N+3$)*. В отличие от экономически мотивированного населения миграционная подвижность AS-население регулируется процедурами квотирования. Представим функции распределения априорных вероятностей $\tilde{\phi}^\bullet(n, N+3, a, t)$ (39) в виде:

$$\tilde{\phi}^\bullet(n, N+3, a, t) = \tilde{\varphi}^\bullet(n, N+3, t)\tilde{\rho}^\bullet(a, t), \quad a \in A. \tag{13}$$

Первая компонента в этом равенстве характеризует допустимую численность иммигрантов соответствующего класса населения, а вторая — желательный его возрастной состав. Для моделирования указанных распределений воспользуемся концепцией «полезности». Определим функцию полезности $V^\bullet(n, N+3, t)$, характеризующую допустимый профиль иммиграционной численности в следующем виде:

$$V^\bullet(n,N+3,t) = \begin{cases} \Gamma^{AS}, & 0 \leqslant v^\bullet(n,N+3,t) \leqslant \delta^{AS}(n), \\ 0, & 0 \geqslant v^\bullet(n,N+3,t) \geqslant \delta^{AS}(n). \end{cases} \tag{14}$$

Здесь $v^\bullet(n, N+3, t)$ — иммиграционный поток, и $\delta^{AS}(n)$ — допустимая численность иммиграции из стран мусульманского пояса $N+3$.

Определим априорную вероятность иммиграции индивида из стран мусульманского пояса $N+3$ в страну n в виде:

$$\tilde{\varphi}^\bullet(n, N+3, t) = \frac{V^\bullet(n, N+3, t)}{\sum\limits_{n=1}^{N} V^\bullet(n, N+3, t)}. \tag{15}$$

Аналогично определяется вторая компонента в (13). Введем функцию «желательного» возрастного «окна»:

$$O^\bullet(a, t) = \begin{cases} \kappa^{AS}, & a_-^{AS}(n) \leqslant a \leqslant a_+^{AS}(n), \\ 0, & a_-^{AS}(n) \geqslant a \geqslant a_+^{AS}(n). \end{cases} \tag{16}$$

Определим априорную вероятность принадлежности иммигранта к возрастной группе a в виде:

$$\tilde{\rho}^\bullet(a, t) = \frac{O^\bullet(a, t)}{\sum\limits_{a \in A} O^\bullet(a, t)}. \tag{17}$$

Таким образом, *априорная вероятность миграции индивида из возрастной группы a, проживающего в $(N+3)$-ей группе стран, в страну n в момент времени t* определяется следующим равенством:

$$\tilde{\phi}^\bullet(n, N+3, a, t) = \frac{V^\bullet(n, N+3, t)}{\sum\limits_{n=1}^{N} V^\bullet(n, N+3, t)} \times \times \frac{O^\bullet(a, t)}{\sum\limits_{a \in A} O^\bullet(a, t)}, \tag{18}$$

$$n \in [1, N], \; a \in A, \tag{19}$$

где функции «полезности» $V^\bullet(n, N+3, t)$ и $O^\bullet(a, t)$ определены равенствами (14), (16).

Входными переменными модуля «MPP» являются:

- $\omega(n, t)$ — индекс душевого дохода;
- $\mu(n)$ — доля мобильного экономически мотивированного населения;
- $K^\bullet(n, a, t)$, $\bullet = M, FW, FE$ — половозрастные распределения населения;
- $\delta^{AS}(n)$ — допустимое количество AS-иммигрантов;
- $[a_-^{AS}(n),\; a_-^{AS}(n)]$ — возрастное окно для AS-иммигрантов.

Выходом модуля «MPP» являются:

- $\phi^\bullet(n, i, a, t)$ — априорные вероятности для NR-населения;
- $\tilde{\phi}^\bullet(n, i, a, t)$ — априорные вероятности для AS-населения.

2. Рождаемость (модули «TFR» и «ASFR»)

Процессы рождаемости, т. е. пополнения нулевой группы в возрастной пирамиде, являются одной из компонент биологического воспроизводства населения. Они характеризуются коэффициентами рождаемости: общими $b(n, t)$, $(n \in [1, N])$(TFR) и специфицированными по возрасту $b(n,a,t)$, $(n \in [1, N]$; $a \in I_f)$ (ASFR), где $I_f = [a_f^-, a_f^+]$ — интервал фертильных возрастов. При построении моделей указанных параметров, имитирующих их изменения во времени, будет использоваться предположение о том, что межстрановая миграция мало влияет на процессы рождаемости. Это позволит рассматривать каждую страну изолированной от других (с точки зрения характеристик процесса рождаемости).

Для стран основного ареала демо-экономической системы $(n \in [1, N])$ рассматриваются два типа репродуктивных процессов — западный (W) и восточный (E), которые характеризуются общими (TFR) коэффициентами рождаемости $b^{FW}(n, t)$, $b^{FE}(n, t)$ и специфицированными по возрасту (ASFR) коэффициентами рождаемости $b^{FW}(n, a, t)$, $b^{FE}(n, a, t)$.

2.1. Модуль «TFR»

Напомним некоторые общие принципы, положенные в основу математических моделей общего коэффициента рождаемости [1].

Первый определяет факторы, влияющие на общий коэффициент рождаемости. Поскольку рассматривается экономически мотивированное население (NR-население), то в качестве основных влияющих на коэффициенты рождаемости факторов используются усредненные экономические индексы: душевого дохода $\omega(n,t)$, душевого ВВП $\vartheta(n,t)$ и безработицы $\nu(n,t)$.

Во втором принципе определена переменная, в терминах которой описывается изменяемость во времени TFR. В качестве такой переменной принята относительная скорость

$$v(n,t) = b^{-1}(n,t)\frac{db(n,t)}{dt}.$$

И наконец, последний принцип связан с так называемой *репродуктивной установкой* R. Согласно ему относительная скорость $v(n,t)$ пропорциональна R, которая зависит от текущего TFR и перечисленных выше экономических индексов, т. е.

$$v(n,t) = \zeta R[n, b(n,t), \omega(n,t), \vartheta(n,t), \nu(n,t)],$$

где ζ — коэффициент пропорциональности.

Получаем следующее дифференциальное уравнение, описывающее динамику общего коэффициента рождаемости в непрерывном времени:

$$\frac{db(n,t)}{dt} = \zeta b(n,t) R[n, b(n,t), \omega(n,t), \vartheta(n,t), \nu(n,t)].$$

Следует иметь в виду, что изменение коэффициента $b(n,t)$ во времени (единица измерения времени *год*) происходит с временем релаксации $\tau_{RM} \simeq 20 лет$. Поэтому $\zeta \sim 0{,}05$.

Практическое применение этой модели связано с использованием реальных данных о TFR $b(n,t)$ и индексах душевого дохода $\omega(n,t)$, душевого ВВП $\vartheta(n,t)$, которые привязаны к дискретным моментам времени ih, т. е. имеем $b[n,ih]$, $\omega[n,ih]$, $\vartheta[n,ih]$, $\nu[n,ih]$ ($i = 0,1,\ldots$ и $h = 1$ *год* — период дискретизации).

Поэтому вместо дифференциального уравнения будем использовать разностное уравнение

$$\begin{aligned} b[n,(i+1)h] &= b[n,ih] + \\ &+ h\zeta b[n,ih] R(n, b[n,ih], \omega[n,ih], \vartheta[n,ih], \nu[n,ih]) \end{aligned}$$

с начальными условиями $b[n,0]$.

Будем рассматривать линейное приближение функции репродуктивной установки, т. е.

$$\begin{aligned} R(n, b[n,ih], \omega[n,ih], \vartheta[n,ih], \nu[n,ih]] &= \\ = A_n + B_n b[n,ih] &+ C_n\omega[n,ih] + \\ &+ D_n\vartheta[n,ih] + E_n\nu[n,ih], \end{aligned} \qquad (20)$$

где A_n, B_n, C_n, D_n, E_n — коэффициенты. Предполагается, что значения указанных коэффициентов практически постоянны на достаточно большом интервале времени, значительно превосходящем τ_{RM}.

Общие коэффициенты рождаемости различны для «FW»- и «FE»-стандартов рождаемости. Поэтому будем рассматривать две модели TFR, которые различаются значениями коэффициентов линейного приближения функции репродуктивной установки:

- «FW»-стандарт

$$\begin{aligned} b^{FW}[n,(i+1)h] &= b^{FW}[n,ih] + \\ &+ h\zeta b^{FW}[n,ih](A_n^{FW} + B_n^{FW} b^{FW}[n,ih] + \\ &+ C_n^{FW}\omega[n,ih] + D_n^{FW}\vartheta[n,ih] + E_n^{FW}\nu[n,ih]); \end{aligned} \qquad (21)$$

- «FE»-стандарт

$$\begin{aligned} b^{FE}[n,(i+1)h] &= b^{FE}[n,ih] + \\ &+ h\zeta b^{FE}[n,ih](A_n^{FE} + B_n^{FE} b^{FE}[n,ih] + \\ &+ C_n^{FE}\omega[n,ih] + D_n^{FE}\vartheta[n,ih] + E_n^{FE}\nu[n,ih]). \end{aligned} \qquad (22)$$

Оценивание коэффициентов функции R по реальным данным. Поскольку коэффициенты функции репродуктивной установки постоянны в течение длительного промежутка времени для их оценивания можно использовать ретроспективные данные о TFR и индексов душевого дохода и душевого ВВП.

Пусть на интервале времени $[0, I]$ имеются данные о TFR

$$\mathbf{b}^{FW}(n) = \{b^{FW}[n,0], b^{FW}[n,h], \ldots, b^{FW}[n,Ih]\},$$

об индексах душевого дохода

$$\overline{\omega}(n) = \{\omega[n,0], \omega[n,h], \ldots, \omega[n,(I-1)h]\},$$

душевого ВВП

$$\overline{\vartheta}(n) = \{\vartheta[n,0], \vartheta[n,h], \ldots, \vartheta[n,(I-1)h]\}$$

и индекса безработицы

$$\overline{\nu}(n) = \{\nu[n,0], \nu[n,h], \ldots, \nu[n,(I-1)h]\}.$$

Представим систему равенств (21) на интервале $[0,(I-1)h]$ в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{b}_\Delta^{FW}(n) = \mathcal{B}^{FW}(n)\mathbf{l}^{FW}(n), \qquad (23)$$

где:

I-вектора

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_\Delta^{FW}(n) = \{&b^{FW}[n,h] - b^{FW}[n,0], b^{FW}[n,2h] - \\ &- b^{FW}[n,h], \ldots, b^{FW}[n,Ih] - b^{FW}[n,(I-1)h]\}; \\ \mathbf{b}^{FW}(n) = \{&b^{FW}[n,0], b^{FW}[n,h], \ldots, \\ &b^{FW}[n,(I-1)h]\}; \end{aligned}$$

5-вектор параметров

$$\mathbf{l}^{FW}(n) = \{A_n^{FW}, B_n^{FW}, C_n^{FW}, D_n^{FW}, E_n^{FW}\};$$

$(I \times 5)$-матрицы

$$\tilde{\mathcal{B}}^{FW}(n) = \\ = \begin{pmatrix} 1 & (b^{FW}[n,0]) & \omega[n,0] & \vartheta[n,0] & \nu[n,0] \\ 1 & (b^{FW}[n,h]) & \omega[n,h] & \vartheta[n,h] & \nu[n,h] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \begin{matrix}(b^{FW}[n, \\ (I-1)h])\end{matrix} & \begin{matrix}\omega[n, \\ (I-1)h]\end{matrix} & \begin{matrix}\vartheta[n, \\ (I-1)h]\end{matrix} & \begin{matrix}\nu[n, \\ (I-1)h]\end{matrix} \end{pmatrix}. \qquad (24)$$

$$\mathcal{B}^{FW}(n) = \mathbf{b}^{FW}(n) \otimes \tilde{\mathcal{B}}^{FW}(n), \tag{25}$$

где $\otimes$ означает умножение координат вектора $\mathbf{b}^{FW}(n)$ на строки матрицы $\tilde{\mathcal{B}}^{FW}(n)$.

Используя метод наименьших квадратов, получим следующие оценки параметров функции репродуктивной установки:

$$\hat{\mathbf{l}}^{FW}(n) = (h\zeta)^{-1}([\mathcal{B}^{FW}(n)]'\mathcal{B}^{FW}(n))^{-1}[\mathcal{B}^{FW}]'(n)\mathbf{b}^{FW}_{\Delta}(n). \tag{26}$$

Аналогично можно получить оценки параметров функции репродуктивной установки для FE-стандарта рождаемости:

$$\hat{\mathbf{l}}^{FE}(n) = (h\zeta)^{-1}([\mathcal{B}^{FE}(n)]'\mathcal{B}^{FE}(n))^{-1}[\mathcal{B}^{FE}(n)]'\mathbf{b}^{FE}_{\Delta}(n), \tag{27}$$

где:

I-вектора

$$\mathbf{b}^{FE}_{\Delta}(n) = \{b^{FE}[n,h] - b^{FE}[n,0], b^{FE}[n,2h] - b^{FE}[n,h], \dots, b^{FE}[n,Ih] - b^{FE}[n,(I-1)h]\};$$

$$\mathbf{b}^{FE}(n) = \{b^{FE}[n,0], b^{FE}[n,h], \dots, b^{FE}[n,(I-1)h]\};$$

5-вектор параметров

$$\mathbf{l}^{FE}(n) = \{A^{FE}_n, B^{FE}_n, C^{FE}_n, D^{FE}_n, E^{FE}_n\};$$

$(I \times 5)$-матрицы

$$\tilde{\mathcal{B}}^{FE}(n) = \begin{pmatrix} 1 & b^{FE}[n,0] & \omega[n,0] & \vartheta[n,0] & \nu[n,0] \\ 1 & b^{FE}[n,h] & \omega[n,h] & \vartheta[n,h] & \nu[n,h] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & b^{FE}[n,(I-1)h] & \omega[n,(I-1)h] & \vartheta[n,(I-1)h] & \nu[n,(I-1)h] \end{pmatrix}. \tag{28}$$

$$\mathcal{B}^{FE}(n) = \mathbf{b}^{FE}(n) \otimes \tilde{\mathcal{B}}^{FE}(n). \tag{29}$$

Полученные оценки параметров функции репродуктивной установки подставим в правые части разностных уравнений (21), (22). Полагая, что найденные оценки параметров по ретроспективным данным, сохраняют свои значения для $ih \geqslant Ih$, указанные разностные уравнения определяют изменение TFR для FW- и FE-стандартов рождаемости на интервале $ih > Ih$.

Итак, *входными переменными* модуля «TFR» являются:

- $\omega(n,t)$ — индекс душевого дохода;
- $\vartheta(n,t)$ — индекс душевого ВВП;
- $\nu(n,t)$ — индекс безработицы;
- A_n, B_n, C_n, D_n, E_n — коэффициенты функции репродуктивной установки для FW- и FE-стандартов рождаемости.

Для определения оценок указанных коэффициентов необходимы ретроспективные данные на интервале $[0, Ih]$ по следующим переменным:

- $\mathbf{b}^{FW}(n)$ — вектор TFR для FW-населения;
- $\mathbf{b}^{FE}(n)$ — вектор TFR для FE-населения;
- $\overline{\omega}(n)$ — вектор индексов душевого дохода;
- $\overline{\vartheta}(n)$ — вектор индексов душевого ВВП;
- $\overline{\nu}(n)$ — вектор индексов безработицы.

Выходом модуля «TFR» являются:

- $\mathbf{b}^{FW}[n,ih]$ — вектор TFR для FW-населения и $ih > Ih$;
- $\mathbf{b}^{FE}[n,ih]$ — вектор TFR для FE-населения и $ih > Ih$.

2.2. Модуль «ASFR»

Будем рассматривать проблему формирования ASFR как формальное распределение общего коэффициента рождаемости TFR по возрастным группам. Поскольку население имеет FW- и FE-стандарты рождаемости, то будем полагать, что процедуры распределения имеют для этих классов населения одинаковую структуру, но различные параметры.

Качество такого распределения будем характеризовать энтропийной функцией следующего вида:

$$H^{\bullet}(\mathbf{b}^{\bullet}[n,ih]) = -\sum_{a \in I_f} b^{\bullet}[n,a,ih] \ln \frac{b^{\bullet}[n,a,ih]}{ev^{\bullet}[n,a,ih]},$$

$$\bullet = FW, FE; \;\; i \geqslant I, \tag{30}$$

где

$$\mathbf{b}^{\bullet}[n,ih] = \{b^{\bullet}[n,a_f^-,ih], \dots, b^{\bullet}[n,a_f^+,ih]\}, v[n,a,ih]$$

— априорная вероятность того, что женщина из возрастной группы a внесла свой вклад (родила ребенка) в группу новорожденных (нулевая группа).

Функция $b^{\bullet}[n,a,ih]$ должна удовлетворять некоторым условиям. Основное из них связано с соблюдением баланса с TFR $b^{\bullet}[n,ih]$, т. е.

$$\frac{1}{a_f^+ - a_f^-} \sum_{a \in I_f} b^{\bullet}[n,a,ih] = b^{\bullet}[n,ih]. \tag{31}$$

Кроме этого условия, могут фиксироваться моментные характеристики функции $b^{\bullet}[n,a,ih]$, например, средний фертильный возраст $\overline{a}^{\bullet}$:

$$\sum_{a \in I_f} ab^{\bullet}[n,a,ih] = \overline{a}^{\bullet}(a_f^+ - a_f^-)b^{\bullet}[n,ih]. \tag{32}$$

Средний фертильный возраст является одним из классификационных признаков процесса рождаемости.

Если он ближе расположен к младшим возрастам, то такое население относят к типу раннего деторождения. Если он сдвигается в сторону старших возрастов, то такое население имеет тип отложенного деторождения.

Итак, ASFR $\mathbf{b}[n, ih]$ определяется решением следующей задачи:

$$H^{\bullet}(\mathbf{b}^{\bullet}[n, ih]) \Rightarrow \max, \tag{33}$$

при условиях (31), (32).

Имеем:

$$b^{*,\bullet}[n, a, ih] = v^{\bullet}[n, a, ih] \frac{b^{\bullet}[n, ih] z^a}{\sum\limits_{c \in I_f} v^{\bullet}[n, c, ih] z^c}, \tag{34}$$

где экспоненциальный множитель Лагранжа $z = \exp(-\mu)$ определяется решением следующего уравнения:

$$b^{\bullet}[n, ih] \sum_{a \in I_f} v^{\bullet}[n, c, ih] z^c [a - \bar{a}(a_f^+ - a_f^-)] = 0. \tag{35}$$

Отсюда видно, что энтропийно-оптимальный ASFR зависит от априорных вероятностей $v^{\bullet}[n, a, ih]$ пополнения группы новорожденных $^{\bullet}$-женщинами из возрастной группы a.

Можно предложить следующую модель для определения функций априорных вероятностей $v^{FW}[n, a, ih]$ и $v^{FE}[n, a, ih]$, в которой используется суммарная информация об объеме группы новорожденных $K[n, 0, ih] = K^M[n, 0, ih] + K^{FW}[n, 0, ih] + K^{FE}[n, 0, ih]$ и информация об объемах возрастных групп FW- и FE-женщин $K^{FW}[n, a, ih], K^{FE}[n, a, ih]$ в момент времени $ih \geqslant Ih$.

Отсюда возникают следующий априорный баланс:

$$K[n, 0, ih] = \sum_{a \in I_f} K^{FW}[n, a, ih] v^{FW}[n, a, ih] + \sum_{a \in I^f} K^{FE}[n, a, ih] v^{FE}[n, a, ih]. \tag{36}$$

Функции априорных вероятностей нормированы, т. е.

$$\sum_{a \in I_f} v^{FW}[n, a, ih] = 1, \quad \sum_{a \in I_f} v^{FE}[n, a, ih] = 1. \tag{37}$$

В этих равенствах все переменные кроме функций априорных вероятностей известны. Тем самым равенства (36), (37) определяют многогранное множество допустимых функций априорных вероятностей. Будем выбирать в этом множестве единственные функции $v^{FW}(n, a, t)$ и $v^{FE}(n, a, t)$, которые максимизируют суммарную (для FW- и FE-групп фертильных женщин) энтропию

$$H(t) = -\sum_{a \in I_f} v^{FW}[n, a, ih] \ln e^{-1} v^{FW}[n, a, ih] - \sum_{a \in I_f} v^{FE}[n, a, ih] \ln e^{-1} v^{FE}[n, a, ih] \Rightarrow \max. \tag{38}$$

Задача максимизации энтропии (38) на многограннике (36), (37) имеет следующее решение:

$$v^{FW}[n, a, ih] = \frac{z^{(K^{FW}[n,a,ih])}}{\sum\limits_{c \in I_f} z^{(K^{FW}[n,c,ih])}}, \quad v^{FE}[n, a, ih] = \frac{z^{(K^{FE}[n,a,ih])}}{\sum\limits_{c \in I_f} z^{(K^{FE}[n,c,ih])}}, \tag{39}$$

где экспоненциальный множитель Лагранжа $z = \exp(-\lambda)$ определяется решением следующего уравнения:

$$K^{-1}[n, 0, ih] \sum_{a \in I_f} (K^{FW}[n, a, ih] \Omega^{FW}(z) + K^{FE}[n, a, ih] \Omega^{FE}(z)) = 1, \tag{40}$$

где

$$\Omega^{FW}(z) = \frac{z^{(K^{FW}[n,a,ih])}}{\sum\limits_{c \in I_f} z^{(K^{FW}[n,c,ih])}}, \quad \Omega^{FE}(z) = \frac{z^{(K^{FE}[n,a,ih])}}{\sum\limits_{c \in I_f} z^{(K^{FE}[n,c,ih])}}. \tag{41}$$

Итак, *входными переменными* модуля «ASFR» являются:

- $b^{\bullet}[n, ih]$ — TFR;
- a_f^-, a_f^+ — интервал фертильности;
- $\bar{a}$ — средний фертильный возраст;
- $K[n, 0, ih]$ — объем группы новорожденных;
- $K^{\bullet}[n, a, ih]$, $\bullet = FW, FE$ — распределение по возрастным группам FW- и FE-женского населения.

Выходом модуля «ASFR» являются:

- $b^{\bullet}[n, a, ih]$, $\bullet = FW, FE$ — ASFR для FW- и FE-женского населения.

3. Смертность (модули «TMR» и «ASMR»)

Смертность характеризуется двумя параметрами: общим коэффициентом смертности (TMR) $d(n, t)$ и специфицированным по возрасту коэффициентом смертности (ASMR) $d(n, a, t)$. Так же как и значения коэффициентов рождаемости значения коэффициентов смертности в данный момент времени t

являются результатом ретроспективных процессов, происходящих на интервале времени $[t-s, t]$. Иными словами говоря, указанные коэффициенты являются динамическими характеристиками процесса смертности. Для моделирования динамики этих характеристик в зависимости от влияющих на них факторов воспользуемся методикой, которая применялась для моделирования динамики TFR и ASFR. Суть ее состоит в моделировании динамической зависимости TMR $d(n, t)$ в моменты времени t от влияющих факторов и затем в каждый момент времени t распределять TMR по возрастным группам с помощью соответствующей энтропийной модели.

3.1. Модуль «TMR»

Изменение состояния TMR происходит под воздействием так называемого *давления смертности* $E(n, t)$. Оно зависит от TMR $d(n, t)$ и от экономических факторов, из которых будем рассматривать индекс душевого ВВП $\vartheta(n, t)$ и душевое потребление алкоголя $W_{alc}(n, t)$. Линейное приближение функции давления смертности будет иметь следующий вид:

$$E(n, t) = \alpha_n + \beta_n d(n, t) + \gamma_n \vartheta(n, t) + \eta_n W_{alc}(n, t). \tag{42}$$

Здесь будем предполагать, что функции давления смертности могут быть различными для стран, но взаимовлияние отсутствует. Поэтому будем рассматривать их изолированно.

Изменяемость TMR во времени характеризуется *относительной скоростью*

$$s(n, t) = \frac{1}{d(n, t)} \dot{d}(n, t), \tag{43}$$

которая пропорциональна функции $E(n, t)$, т. е.

$$\begin{aligned} \dot{d}(n, t) = \theta d(n, t)(\alpha_n + \beta_n d(n, t) + \\ + \gamma_n \vartheta(n, t) + \eta_n W_{alc}(n, t)). \end{aligned} \tag{44}$$

Здесь $\theta \leqslant \tau_R^{-1}$.

Поскольку статистические данные о TMR и влияющих на него экономических индексах привязаны к дискретному времени $t = ih$, где h — период дискретизации, а $i = 0, 1, \ldots$, будем использовать разностное уравнение следующего вида:

$$\begin{aligned} d[n,(i+1)h] = d[n,ih] + h\theta d[n,ih]\big(\alpha_n + \beta_n d[n,ih] + \\ + \gamma_n \vartheta[n,ih] + \eta_n W_{alc}[n,ih]\big). \end{aligned} \tag{45}$$

Обычно различают TMR для мужской (M) части населения и для женской (F) части населения. Причем для последней не делается различие между женщинами с FW- и FE-стандартами рождаемости. Поэтому имеем уравнения динамики TMR

- для мужской части населения (M):

$$\begin{aligned} d^M[n, (i+1)h] = d^M[n, ih] + h\theta d^M[n, ih](\alpha_n^M + \\ + \beta_n^M d^M[n, ih] + \gamma_n^M \vartheta[n, ih] + \eta_n^M W_{alc}[n, ih]); \end{aligned} \tag{46}$$

- для женской части населения (F):

$$\begin{aligned} d^F[n, (i+1)h] = d^F[n, ih] + h\theta d^F[n, ih](\alpha_n^F + \\ + \beta_n^F d^F[n, ih] + \gamma_n^F \vartheta[n, ih] + \eta_n^F W_{alc}[n, ih]). \end{aligned} \tag{47}$$

Оценивание коэффициентов функции E по реальным данным. Поскольку коэффициенты функции давления смертности постоянны в течение длительного промежутка времени для их оценивания можно использовать ретроспективные данные о TFR, индексе душевого ВВП и душевом потреблении алкоголя.

Рассмотрим методику оценивания для мужской части населения. Пусть на интервале времени $[0, I]$ имеются данные о TMR

$$\mathbf{d}^M(n) = \{d^M[n, 0], \ldots, d^M[n, Ih]\},$$

об индексах душевого ВВП

$$\bar{\vartheta}(n) = \{\vartheta[n, 0], \ldots, \vartheta[n, (I-1)h]\},$$

душевого потребления алкоголя

$$\mathbf{w}(n) = \{W_{alc}[n, 0], \ldots, W_{alc}[n, (I-1)h]\}.$$

Представим систему равенств (46) на интервале $[0, (I-1)h]$ в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{d}_\Delta^M(n) = h\theta\, \mathcal{D}^M(n) \mathbf{q}^M(n), \tag{48}$$

где:

I-вектора

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_\Delta^M(n) = \{d^M[n,h] - d^M[n,0], d^M[n,2h] - \\ - d^M[n,h], \ldots, d^M[n,Ih] - d^M[n,(I-1)h]\}; \end{aligned}$$

$$\mathbf{d}^M(n) = \{d^M[n,0], d^M[n,h], \ldots, d^M[n,(I-1)h]\};$$

4-вектор параметров

$$\mathbf{q}^M(n) = \{\alpha_n^M, \beta_n^M, \gamma_n^M, \eta_n^M\};$$

$(I \times 4)$-матрицы

$$\tilde{\mathcal{D}}^M(n) = \\ = \begin{pmatrix} 1 & (d^M[n,0]) & \vartheta[n,0] & W_{alc}[n,0] \\ 1 & (d^M[n,h]) & \vartheta[n,h] & W_{alc}[n,h] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & (d^M[n,(I-1)h]) & \vartheta[n,(I-1)h] & W_{alc}[n,(I-1)h] \end{pmatrix}. \tag{49}$$

$$\mathcal{D}^M(n) = \mathbf{d}^M(n) \otimes \tilde{\mathcal{D}}^M(n). \tag{50}$$

Используя метод наименьших квадратов, получим следующие оценки параметров функции давления смертности $E(n,t)$:

$$\hat{\mathbf{q}}^M(n) = (h\theta)^{-1}([\mathcal{D}^M(n)]'\mathcal{D}^M(n))^{-1}[\mathcal{D}^M]'(n)\mathbf{d}^M_\Delta(n). \tag{51}$$

Аналогично можно получить оценки параметров функции давления смертности для женской части населения (F).

$$\hat{\mathbf{q}}^F(n) = (h\theta)^{-1}([\mathcal{D}^F(n)]'\mathcal{D}^F(n))^{-1}[\mathcal{D}^F]'(n)\mathbf{d}^F_\Delta(n), \tag{52}$$

где:

I-вектора

$$\mathbf{d}^F_\Delta(n) = \{d^F[n,h]-d^F[n,0], d^F[n,2h]- -d^F[n,h],\dots,d^F[n,Ih]-d^F[n,(I-1)h]\};$$

$$\mathbf{d}^F(n) = \{d^F[n,0], d^F[n,h],\dots,d^F[n,(I-1)h]\};$$

4-вектор параметров

$$\mathbf{q}^F(n) = \{\alpha^F_n, \beta^F_n, \gamma^F_n, \eta^F_n\};$$

$(I\times 4)$-матрицы

$$\tilde{\mathcal{D}}^F(n) = \begin{pmatrix} 1 & (d^F[n,0]) & \vartheta[n,0] & W_{alc}[n,0] \\ 1 & (d^F[n,h]) & \vartheta[n,h] & W_{alc}[n,h] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (d^F[n,(I-1)h]) & \vartheta[n,(I-1)h] & W_{alc}[n,(I-1)h] \end{pmatrix}. \tag{53}$$

$$\mathcal{D}^F(n) = \mathbf{d}^F(n)\otimes\tilde{\mathcal{D}}^F(n). \tag{54}$$

Полученные оценки параметров функции давления смертности подставим в правые части разностных уравнений (46), (47). Полагая, что найденные оценки параметров по ретроспективным данным, сохраняют свои значения для $ih \geqslant Ih$, указанные разностные уравнения определяют изменение TFR для мужской $d^M[n,ih]$ и женской $d^F[n,ih]$ частей населения на интервале $ih > Ih$.

Итак, *входными переменными* модуля «TMR» являются:

- $\vartheta(n,t)$ — индекс душевого ВВП;
- $W_{alc}[n,ih]$ — душевое потребление алкоголя;
- $\alpha^\bullet_n, \beta^\bullet_n, \gamma^\bullet_n, \eta^\bullet_n$ — коэффициенты функции «давления смерти» для M- и F-населения.

Для определения оценок указанных коэффициентов необходимы ретроспективные данные на интервале $[0, Ih]$ по следующим переменным:

- $\mathbf{d}^M(n)$ — вектор TFR для M-населения;
- $\mathbf{d}^F(n)$ — вектор TFR для F-населения;
- $\bar{\vartheta}(n)$ — вектор индексов душевого ВВП;
- $\mathbf{W}(n)$ — вектор душевого потребления алкоголя.

Выходом модуля «TMR» являются

- $\mathbf{d}^M[n,ih]$ — вектор TFR для M-населения и для $ih > Ih$;
- $\mathbf{d}^F[n,ih]$ — вектор TFR для F-населения и для $ih > Ih$.

3.2. Модуль «ASMR»

В момент времени Ih, принадлежащему интервалу ретроспекции, имеются реальные данные о численности возрастных групп $K^\bullet[n,a,Ih]$, $a\in A$ и TMR $b^\bullet[n,Ih]$, где $\bullet = M, F$. Обычно $h=1$ году. Поэтому к моменту времени $(I+1)h$ только часть $\bullet$-население может перейти в следующую возрастную группу, а $D^\bullet[n,a,Ih]$ останется (умрет) в возрастной группе a.

В связи с интенсивным развитием страхования жизни возникает проблема более или менее объективной экономической оценки «стоимости» жизни. Обозначим «стоимость» жизни $\bullet$-индивида $c^\bullet[n,a,ih]$ и объем компенсационных выплат, имеющихся у страховой компании $W[n,ih]$. Тогда имеем следующее условие в виде неравенства:

$$\sum_{a\in A} c^\bullet[n,a,ih]D^\bullet[n,a,ih] \leqslant W[n,ih]. \tag{55}$$

Напомним, что ASMR

$$d^\bullet[n,a,ih] = \frac{D^\bullet[n,a,ih]}{K^\bullet[n,ih]}, \qquad ih > Ih, \tag{56}$$

и ASMR и TMR связаны следующим соотношением:

$$d^\bullet[n,ih] = (A+1)^{-1}\sum_{a\in A} d^\bullet[n,a,ih]. \tag{57}$$

Полагая, что индивиды, принадлежащие одной возрастной группе, неразличимы, а события «жизнь» и «смерть» случайные и независимые и для каждого члена группы a существует априорная вероятность $\nu^\bullet[n,a,Ih]$ *дожить* до следующей возрастной группы к моменту времени $(I+1)h$. Указанный стохастический механизм характеризуется обобщенной информационной энтропией Ферми:

$$H^\bullet(\mathbf{D}^\bullet[n,ih]) = -\sum_{a\in A} D^\bullet[n,a,ih]\ln\frac{D^\bullet[n,a,ih]}{\eta^\bullet[n,a,ih]} + \\ + [K^\bullet[n,a,ih]-D^\bullet[n,a,ih]]\ln[K^\bullet[n,a,ih] - \\ - D^\bullet[n,a,ih]],\; ih > Ih. \tag{58}$$

Здесь

$$\eta^\bullet[n,a,ih] = \frac{\nu^\bullet[n,a,ih]}{1-\nu^\bullet[n,a,ih]}. \tag{59}$$

Заметим, что функции $\eta^\bullet[n,a,ih]\in[0,\infty)$.

Следуя общей макросистемной концепции, будем искать такое распределение по возрастным группам умерших, которое максимизирует обобщенную информационную энтропию Ферми [1]

$$H^{\bullet}(\mathbf{D}^{\bullet}[n, ih]) \Rightarrow \max, \tag{60}$$

при условиях:

$$\sum_{a\in A} c^{\bullet}[n, a, ih] D^{\bullet}[n, a, ih] \leqslant W[n, ih]; \tag{61}$$

$$\sum_{a\in A} \frac{D^{\bullet}[n, a, ih]}{K^{\bullet}[n, ih]} = (A+1) d^{\bullet}[n, ih]. \tag{62}$$

Решение этой задачи строится с использование функции Лагранжа и имеет вид:

$$D^{\bullet}[n, a, ih] = \\ = \frac{(1-\nu^{\bullet}[n, a, ih])\, K^{\bullet}[n, a, ih])}{(1-\nu^{\bullet}[n, a, ih]) + \nu^{\bullet}[n, a, ih])\, u\, z^{c^{\bullet}[n,a,ih]}}, \tag{63}$$

где экспоненциальные множители Лагранжа $z = \exp(\lambda)$ и $u = \exp(\mu)$ определяется из следующих уравнений:

$$\sum_{a\in A} \frac{c^{\bullet}[n, a, ih]\, (1-\nu^{\bullet}[n, a, ih])\, K^{\bullet}[n, a, ih]}{(1-\nu^{\bullet}[n, a, ih]) + \nu^{\bullet}[n, a, ih]\, u\, z^{c^{\bullet}[n,a,ih]}} - \\ - W[n, ih] = 0,$$

$$\sum_{a\in A} \frac{(1-\nu^{\bullet}[n, a, ih])\, K^{\bullet}[n, a, ih]}{(1-\nu^{\bullet}[n, a, ih]) + \nu^{\bullet}[n, a, ih]\, u\, z^{c^{\bullet}[n,a,ih]}} - \\ - (A+1) d^{\bullet}[n, ih] K^{\bullet}[n, ih] = 0. \tag{64}$$

Обратимся теперь к характеристике стохастического механизма дожития до следующей возрастной группы, а именно, к априорной вероятности $\nu^{\bullet}[n, a, ih]$ дожить до группы $a+1$. Переход из данной возрастной группы в следующую сопровождается «старением» организма, которое проявляется в большей степени с ростом возраста. Следовательно, априорная вероятность «дожития» не возрастает, т. е. приращение

$$\Delta_a \nu^{\bullet}[n,a,ih] = \nu^{\bullet}[n,a+1,ih] - \nu^{\bullet}[n,a,ih] \leqslant 0. \tag{65}$$

Будем полагать, что возраст последней группы таков, что

$$\nu^{\bullet}[n, a, ih] = 0, \text{ для } a > A. \tag{66}$$

Учитывая отмеченные свойства функций априорных вероятностей и неравенство (65), будем рассматривать такие функции $\nu^{\bullet}[n, a, ih]$, приращения которых $\Delta_a \nu^{\bullet}[n, a, ih]$ не просто неположительные, а имеют нижнюю и верхнюю границы:

$$k^{\bullet}_{max} \leqslant \Delta_a \nu^{\bullet}[n, a, ih] \leqslant k^{\bullet}_{min}. \tag{67}$$

Предположим, что функции $\nu^{\bullet}[n,a,ih]$ линейные с предельными параметрами:

$$k_{max} = -\frac{\nu_{min}}{A}, \qquad k_{min} = \frac{\nu_{max}}{A}.$$

Для упрощения дальнейших преобразований введем следующие обозначения:

$$x^{\bullet}(a) = \Delta_a \nu^{\bullet}[n, a, ih] + k^{\bullet}_{max}[n, a, ih], \\ a \in A, \text{пара } (n, ih) = fix. \tag{68}$$

Представим неравенства (67) в виде:

$$0 \leqslant x^{\bullet}(a) \leqslant \frac{\nu^{\bullet}_{max} - \nu^{\bullet}_{min}}{A} = \beta^{\bullet}. \tag{69}$$

Будем искать в множестве, описанном неравенствами (69), функцию $x^{\bullet}(a)$ такую, которая максимизирует энтропию:

$$H^{\bullet}(X) = -\sum_{a\in A} x^{\bullet}(a) \ln x^{\bullet}(a) + \\ + [\beta^{\bullet} - x^{\bullet}(a)] \ln [\beta^{\bullet} - x^{\bullet}(a)]. \tag{70}$$

Максимум достигается в точке

$$x^{\bullet}(a) = \frac{\beta^{\bullet}}{2}, \qquad a \in A. \tag{71}$$

Подставляя этот результат в (68), получим следующее разностное уравнение:

$$\nu^{\bullet}[n, a+1, ih] = \nu^{\bullet}[n, a, ih] + \beta^{\bullet}, \\ (n, ih) = fix, \tag{72}$$

с начальным условием $\nu^{\bullet}[n, 0, ih]$.

Решение его имеет вид:

$$\nu^{\bullet}[n, a, ih] = \nu^{\bullet}[n, 0, ih] - \frac{\beta^{\bullet}}{2} a. \tag{73}$$

Поскольку априорная вероятность для A-группы равна нулю, то отсюда априорная вероятность для нулевой группы

$$\nu^{\bullet}[n, 0, ih] = -\frac{\beta^{\bullet}}{2}. \tag{74}$$

Таким образом, функции априорных вероятностей «дожития» до следующей возрастной группы имеют вид:

$$\nu^{\bullet}[n, a, ih] = \frac{\nu_{min} - \nu_{max}}{2}(1-a), \\ (n, ih) = fix, \quad a \in A. \tag{75}$$

Итак, *входными переменными* модуля «ASMR» являются:

- $d^{\bullet}[n, ih]$ — TMR для $\bullet = M, F$-населения;
- ν_{max}, ν_{min} — максимальная и минимальная априорные вероятности «дожития» для нулевой группы;
- W — страховая стоимость «жизни»;

- $K^{bullet}[n, ih]$, $\bullet = M, F$ — численность $\bullet = M, F$-населения;
- $K^{\bullet}[n, a, ih], \bullet = M, F$ — распределение по возрастным группам FW- и FE-женского населения.

Выходом модуля «ASMR» являются:

- $d^M[n, a, ih]$ — ASFR для M-населения;
- $d^F[n, a, ih]$ — ASFR для F-населения.

Литература

1. *Алиев А. С.*, *Попков А. Ю.*, *Попков Ю. С.* Структура вероятностной макросистемной демо-экономической модели (часть I) // Труды ИСА РАН. 2011. Т. 61. Вып. 4. С. 3–15.

Алиев Александр Семенович. К. т. н., с. н. с. ИСА РАН. Окончил Московский институт инженеров железнодорожного транспорта в 1980 г. Количество печатных работ: 19. Область научных интересов: проблемы моделирования транспортных потоков. E-mail: ali@isa.ru

Попков Алексей Юрьевич. К. т. н., с. н. с. ИСА РАН. Окончил МГУ в 2002 г. Количество печатных работ: 19. Область научных интересов: математическое моделирование, высокопроизводительные вычисления, параллельные алгоритмы, распределенные вычислительные системы. E-mail: apopkov@isa.ru

Попков Юрий Соломонович. Директор ИСА РАН, д. т. н., профессор. Окончил Московский энергетический институт в 1960 г. Количество печатных работ: 165. Область научных интересов: системный анализ, математическое моделирование. E-mail: popkov@isa.ru