

# Динамические системы

## Особенности фазового пространства уравнений динамики газа для трансзвуковой начально-краевой задачи\*

Н. М. Евстигнеев, Н. А. Магницкий

**Аннотация.** В работе публикуются результаты по анализу фазового пространства при решении начально-краевой задачи (н. к. з) сверхзвукового обтекания твердого тела в турбулентном предельном режиме. Вначале приводятся особенности гиперболической системы дифференциальных уравнений. Показывается структура оператора и анализируются различные виды разрывных решений. Доказывается теорема о невозможности распространения возмущений за ударную волну. Дается описание построения численного метода высокого порядка для решения исходной системы уравнений, показывается выбранный способ учета предельного турбулентного режима течения. Разработанный численный метод применяется к исследуемой начально-краевой задаче. Результатом является свидетельство отличия фазового пространства системы сжимаемой сплошной среды от ранее исследованной системы несжимаемой и слабосжимаемой среды. Обнаружено разделение фазового пространства исходных уравнений по линиям характеристик, возникающих в ходе решения н. к. з, что подтверждает результаты доказанной теоремы. Показана различная бифуркационная картина в отдельных пространственных областях в рамках одной н. к. з. Таким образом, бесконечномерное фазовое пространство такой системы уравнений для рассмотренного решения является объединением бесконечномерных фазовых подпространств.

**Ключевые слова:** *нелинейная динамика, турбулентность, сверхзвуковые течения, численное исследование уравнений в частных производных.*

### 1. Введение

В цикле работ сотрудников лаборатории № 11–3 ИСА РАН ([6–10] и др.) были проведены исследования некоторых начально-краевых задач (н. к. з.) для уравнений динамики несжимаемой вязкой жидкости (уравнения Навье—Стокса, гидродинамическое приближение уравнений Больцмана), а также магнитной гидродинамики слабосжимаемой жидкости. Задачей работ было рассмотрение ламинарно-турбулентного перехода некоторых характерных н. к. з. для этих уравнений с точки зрения бифуркационной теории динамических систем. В работах показано, что наблюдается либо прямой, либо обратный сценарий Фейгенбаума—Шарковского—Магницкого (ФШМ) [7] в который может входить сценарий Ландау—Хопфа (бифуркации Андронova—Хопфа до тора периода  $N$ ). Такой сценарий наблюдается во всех

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 11–07–00126а) и программы ОНИТ1 РАН (проект № 1.4).

пробных точках фазового бесконечномерного пространства и не зависят от выбранной точки в конфигурационном пространстве. В данной работе проводится первая попытка исследования характерной н. к. з. для т. н. сжимаемой предельной турбулентности, где рассматриваются уравнения газовой динамики в сверхзвуковых режимах течений при стремлении числа Рейнольдса к бесконечности. Процедура анализа получаемых данных аналогична выше перечисленным работам.

## 2. Исходные уравнения, анализ решений уравнений

### 2.1. Исходные уравнения

Исходные уравнения — уравнения сохранения массы, количества движения и энергии. В связи с тем, что планируется моделирование задач, имеющих разрывные решения, все численные соотношения записываются в интегральной форме. В дифференциальной, более привычной форме, рассматривается следующая система уравнений [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0; & \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes (\rho \mathbf{u})) + \nabla p &= \mathbf{0}; & \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}(E + p)) &= 0; \\ E &= \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 + \rho e; & p &= (\gamma - 1) \left( E - \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 \right). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь для замкнутой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  скалярная функция  $f$  определяется как  $f : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , вектор-функция  $\mathbf{f}$  определяется как  $\mathbf{f} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Тогда  $E$  — скалярная функция полной энергии газа;  $e$  — скалярная функция внутренней энергии газа;  $\gamma$  — показатель адиабаты газа (1,4 для воздуха);  $p$  — скалярная функция давления;  $\mathbf{u}$  — вектор-функция скорости газа;  $\rho$  — скалярная функция плотности газа. Выражение  $\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes (\rho \mathbf{u}))$  надо понимать как тензорную свертку вектора  $\nabla$  и матрицы  $\mathbf{u} \otimes (\rho \mathbf{u})$ .

Для данной задачи рассматривается двухмерная по пространству система (1), т. е.  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Для проведения интегрирования произвольной н. к. з. (постановка которой обсуждается ниже) был построен численный метод. В связи с причинами, указанными в предыдущих работах авторов [6], необходимым условием проведения бифуркационного анализа является высокая точность результатов, получаемых в численных решениях н. к. з. для исходных уравнений. Так, для моделирования н. к. з. для уравнений Навье—Стокса в работах [6]– [8] применялся метод минимум пятого порядка (на больших градиентах функций) по пространству и четвертого по времени. Кроме того, известно [11], что для решения уравнений (1) на транс- и сверхзвуковых потоках требуется применение консервативных схем сквозного счета. Перепишем уравнение (1) в консервативной векторной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} &= \mathbf{0}; & \mathbf{U} &= [\rho; \rho u_x; \rho u_y; E]^T; \\ \mathbf{F} &= [\rho u_x; \rho u_x^2 + p; \rho u_x u_y; (E + p)u_x]^T; & \mathbf{G} &= [\rho u_y; \rho u_y u_x; \rho u_y^2 + p; (E + p)u_y]^T. \end{aligned} \tag{2}$$

### 2.2. Анализ решений уравнений

Для введения некоторых определений и теорем при анализе фазового пространства нам понадобится привести различные разрывные типы решений для (2). Для этого рассмотрим одномерное нестационарное уравнение, выражающее закон сохранения для скалярной функции  $u$ :

$$u_t + F(u)_x = 0. \tag{3}$$

Под решением (3) будем понимать слабое решение, вида

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} (u_t + F(u)_x) dx dt = 0, \tag{4}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. Пусть имеется разрыв решения (разрыв в функции  $u$  первого рода), движущийся со скоростью  $S$ . Для гиперболического уравнения, для которого можно выделить поле характеристик  $x(t)$  такие характеристики будут являться суть траекториями движения. Обозначим

$$u_L = u(t, x - \epsilon) \quad \text{и} \quad u_R = u(t, x + \epsilon),$$

где  $\epsilon$  — малое положительное число. Перепишем интегральную форму закона сохранения (4), используя правило Лейбница<sup>1</sup> [5], как

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(t, x) dx = F(u(t, x_1)) - F(u(t, x_2)) = \frac{d}{dt} \left( \int_{x_1}^{x(t)} u(t, x) dx + \int_{x(t)}^{x_2} u(t, x) dx \right). \quad (5)$$

Дифференцируя, получаем

$$\int_{x_1}^{x(t)} u_t dx + u(t, x - \epsilon)x'(t) + \int_{x(t)}^{x_2} u_t dx - u(t, x + \epsilon)x'(t) = F(u(t, x_1)) - F(u(t, x_2)). \quad (6)$$

Подставим в последнее выражение уравнение (3), получим

$$\begin{aligned} F(u(t, x_1)) - F(u(t, x - \epsilon)) + u(t, x - \epsilon)x'(t) + F(u(t, x + \epsilon)) - F(u(t, x_2)) - u(t, x + \epsilon)x'(t) = \\ = F(u(t, x_1)) - F(u(t, x_2)), \end{aligned}$$

или, поскольку  $x'(t) = S$ ,

$$S(u_L - u_R) = F(u_L) - F(u_R). \quad (7)$$

Соотношение (7) называется соотношением Гюгонио—Рэнкина на разрыве [3]. Из данного соотношения однозначно определяется скорость движения разрыва. Теперь рассмотрим понятие энтропийного решения [3]:

**Утверждение 1.** *Задача Коши для закона сохранения (4) с произвольными интегрируемыми по Лебегу начальными данными имеет единственное слабое решение в классе функций, удовлетворяющих энтропийному условию:*

$$\frac{F(u_R) - F(u_L)}{u_R - u_L} \leq \frac{F(u_L) - F(u)}{u_L - u}, \quad (8)$$

на всех скачках, здесь  $u \in [u_R, u_L]$ .

Очевидно, что энтропийное условие (8) нарушает симметрию относительно обращения времени. Ввести энтропийное условие можно вводя исчезающе малую постоянную вязкость  $\nu > 0$  в уравнение (3) в виде

$$u_t + F(u)_x = \nu u_{xx}. \quad (9)$$

Тогда решение невязкого уравнения определяется при  $\nu \rightarrow 0$  для вязкого уравнения (9). Введем некую строго выпуклую функцию  $H(u)$  и умножим (9) на  $H'(u)$ :

$$H'(u)u_t + H'(u)F(u)_x = \nu H'(u)u_{xx}, \quad (10)$$

По правилу дифференцирования имеем

$$H(u)_{xx} = H''(u)(u_x)^2 + H'(u)u_{xx}$$

и, обозначив  $G'(u) = H'(u)F'(u)$ , получим

$$H(u)_t + G(u)_x = \nu(H(u)_{xx} - H''(u)(u_x)^2) \leq \nu H(u)_{xx}, \quad (11)$$

следовательно

$$H(u)_t + G(u)_x \leq 0, \nu \rightarrow 0. \quad (12)$$

Таким образом, энтропийное выражение для введенной малой вязкости  $\nu$  сохраняется. Рассмотрим линеаризованную систему уравнений Эйлера в консервативном виде (2):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + B \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{0}; \quad A = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}; \quad B = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}}. \quad (13)$$

<sup>1</sup> Правило Лейбница или дифференцирование под знаком интеграла:

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) dy = \frac{d}{dx} \int_{y_1}^{y_2} F(x, y) dy; \quad F \in [x_1; x_2] \times [y_1; y_2]$$

Собственные значения для (13) имеют вид

$$\lambda_1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - c; \quad \lambda_2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}; \quad \lambda_3 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}; \quad \lambda_4 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + c. \quad (14)$$

где  $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$  — скорость звука в среде,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор.

**Определение 1** [2]. Система уравнений (13) называется гиперболической в точке  $(\mathbf{x}; t)$ , если матрица Якоби  $A_{n \times n}$  имеет  $n$  действительных собственных значений  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  и набор  $n$  линейно независимых правых собственных векторов  $\mathbf{h}_i$ . Строго гиперболична, если  $\lambda_i \neq \lambda_j$  для  $\forall \{i, j\} \in [1, n]; i \neq j$ .

Очевидно, что система (13) является гиперболической, ввиду действительности собственных значений (14). Рассмотрим постановку начально-краевой задачи с наличием разрыва для системы (3), подразумевая, что мы работаем с гиперболической системой (2).

**Определение 2.** Задачей о распаде произвольного разрыва (задачей Римана) [3] для (3) называется задача с начальными данными вида

$$u(0, x) = \begin{cases} u_L; & x < 0; \\ u_R; & x > 0, \end{cases} \quad (15)$$

где  $u_L$  и  $u_R$  — постоянны.

Решение (3) для задачи Римана является автомодельным в переменных  $\mathbf{x}/t$ , т.е. в поле характеристик, и нахождение решения лежит в основе численной процедуры для любой гиперболической системы уравнений. Будем рассматривать нелинейный закон сохранения (3) для векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ . Обсудим три основных типа решения, связанные с разрывами. Пусть для (3) матрица Якоби  $A = \partial \mathbf{F}(\mathbf{u}) / \partial \mathbf{u}$  имеет следующие собственные значения и собственные векторы:

$$\lambda_1(\mathbf{u}) < \lambda_2(\mathbf{u}) < \dots < \lambda_n(\mathbf{u}), \quad \mathbf{h}_1(\mathbf{u}), \mathbf{h}_2(\mathbf{u}), \dots, \mathbf{h}_n(\mathbf{u}). \quad (16)$$

Введем следующие определения.

**Определение 3.**  $k$ -е характеристическое поле является истинно нелинейным, если  $\mathbf{h}^T \nabla_{\mathbf{u}} \lambda_k(\mathbf{u}) \neq 0$  для всех  $\mathbf{u}$ .

$$\nabla_{\mathbf{u}} = \left( \frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_n} \right).$$

**Определение 4.**  $k$ -е характеристическое поле является линейно вырожденным, если  $\mathbf{h}^T \nabla_{\mathbf{u}} \lambda_k(\mathbf{u}) = 0$  для всех  $\mathbf{u}$ .

Возможные решения нелинейной задачи о распаде произвольного разрыва:

**1. Ударные волны.** Пусть  $k$ -е характеристическое поле — истинно нелинейно. Разрыв называется ударной волной в  $k$ -м характеристическом поле, если выполняются условия Гюгонио—Рэнкина (7) и имеют место неравенства

$$\lambda_k(\mathbf{u}_L) > S > \lambda_k(\mathbf{u}_R), \quad \lambda_{k-1}(\mathbf{u}_L) < S < \lambda_{k-1}(\mathbf{u}_R). \quad (17)$$

Тогда набор решений для правой  $\mathbf{u}_R$  и левой  $\mathbf{u}_L$  функций задается через ударную волну в  $k$ -м характеристическом поле, образуя гладкое однопараметрическое семейство:

$$\mathbf{u}_R = \mathbf{u}(p), \quad -p_0 \leq p \leq 0, \quad \mathbf{u}_R(0) = \mathbf{u}_L; \quad s'(p)(\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_R) - s(p)\mathbf{u}'_R(p) = -\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{u} \mathbf{u}'_R(p); \quad (18)$$

$$A(\mathbf{u}_L)\mathbf{u}'_R(0) = s(0)\mathbf{u}'_R(0); \quad \mathbf{u}'_R(0) = \mathbf{ch}_k(\mathbf{u}_L), \quad s(0) = \lambda_k(\mathbf{u}_L).$$

**2. Волны разрежения** являются автомодельным решением  $\mathbf{u}(t, x) = \mathbf{b}(x/t)$ :

$$-x/t^2 \mathbf{b}' + 1/t A(\mathbf{b}) \mathbf{b}' = 0; \quad (A(\mathbf{b}) - x/t) \mathbf{b}' = 0. \quad (19)$$

Уравнение (19) является задачей на собственные значения:  $x/t = \lambda(\mathbf{b}(x/t))$ , при выборе  $\mathbf{b}' = \mathbf{ch}(\mathbf{b})$ , более детально см. [2].

Поскольку характеристическое  $k$ -е поле истинно нелинейное, то  $c = 1$  и для заданного  $\mathbf{u}_L$  можно решить ОДУ вида

$$\mathbf{b}'(x/t) = \mathbf{h}(\mathbf{b}(x/t)); \quad (x/t)_0 \leq (x/t) \leq (x/t)_0 + p; \quad (x/t)_0 = \lambda \mathbf{b}((x/t)_0). \quad (20)$$

Тогда значение  $u_R = \mathbf{b}((x/t)_0 + p)$  связано с  $u_L = \mathbf{b}((x/t)_0)$  через волну разряжения в  $k$ -м характеристическом поле.

**Утверждение 2** [2], [3]. Для истинно нелинейного характеристического поля  $k$  при заданном состоянии  $\mathbf{u}_L$  существует однопараметрическое семейство состояний  $\mathbf{u}_R = \mathbf{u}(p)$ ,  $-p_0 \leq p \leq p_0$ , которые связаны посредством либо ударной волны ( $p \leq 0$ ) либо посредством волны разряжения ( $p \geq 0$ ).

**3. Контактные разрывы** Пусть  $k$ -е характеристическое поле линейно вырождено. Пусть кривая  $\mathbf{u}(p)$  определена как  $d\mathbf{u}(p)/dp = \mathbf{h}_k(\mathbf{u}(p))$ . Из линейной вырожденности следует, что

$$d\lambda_k(\mathbf{u})/dp = (d\mathbf{u}/dp)\nabla_{\mathbf{u}}\lambda_k = 0$$

и, следовательно, собственное значение постоянно вдоль данной характеристики. Таким образом, состояния на кривой  $\mathbf{u}(p)$  могут быть связаны с  $\mathbf{u}_L$  через разрыв, имеющий скорость  $s = \lambda_k(\mathbf{u}(p))$ . Получаем задачу на собственные значения:

$$(A(\mathbf{u}(p)) - s)(d\mathbf{u}/dp) = 0, \quad (21)$$

откуда

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}(p)) - s\mathbf{u}(p) = \text{const} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_L) - s\mathbf{u}_L. \quad (22)$$

Выражение для контактного разрыва (22) удовлетворяет соотношению Гюгонио—Рэнкина (7). Видно, что характеристики параллельны контактному разрыву.

### 2.3. Леммы для простейших случаев

Для дальнейшего анализа нам понадобится ввести понятие примитивных переменных  $\mathbf{W} = (\rho, u, p)^T$  для одномерного уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x = \mathbf{0}; \quad \mathbf{U} = (\rho, q, E)^T; \quad \mathbf{F} = \left( q, \frac{q^2}{\rho} + p, \frac{q}{\rho}(E + p) \right)^T; \\ q = \rho u; \quad p = (\gamma - 1) \left( E - \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{\rho} \right). \mathbf{U}_t + A\mathbf{U}_x = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (23)$$

Используем оператор перехода между  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{W}$  [3]:

$$\mathbf{U} = K\mathbf{W}; \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 \\ \frac{u^2}{2} & \rho u & \frac{1}{(\gamma - 1)} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Тогда уравнения в консервативных переменных (23) можно переписать в примитивных переменных как

$$K \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{A}K \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{0}; \quad \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{B} = K^{-1}\mathbf{A}K; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \gamma p & u \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Собственные значения и собственные правые векторы  $\mathbf{B}$  определяются как

$$\lambda = (u - c; u; u + c)^T, \quad (26)$$

так, что  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ .

$$\mathbf{h}_1 = \left( 1; u - c; \frac{(E + p)}{\rho} - uc \right)^T; \quad \mathbf{h}_2 = \left( 1; u; \frac{u^2}{2} \right)^T; \quad \mathbf{h}_3 = \left( 1; u + c; \frac{(E + p)}{\rho} - uc \right)^T. \quad (27)$$

Для данной записи можно перейти к характеристическим переменным, определив  $A = H\Lambda H^{-1}$ , где  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$ .

Рассмотрим простейший случай н. к. з. для линейного уравнения переноса, имеющий важное следствие для дальнейшего рассуждения, в форме (23):

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{A}\mathbf{U}_x = \mathbf{0}; \quad x \in \mathbb{R}; t \in \mathbb{R}^+;$$

$$\mathbf{U} = (u_1, u_2)^T; \quad u_1(0, x) = 1; \quad \forall x; \quad u_2(0, x) = \begin{cases} e^{ikx}; & x \geq 0; \\ 1; & x < 0. \end{cases} \quad (28)$$

Оператор  $A$  является гиперболическим (т. е. все собственные значения  $\lambda_k \in \mathbb{R}, \forall k = 1, 2$ ) и определяет направление переноса и взаимодействие функций.

**Лемма 1.** Пусть заданы уравнения и начально-краевая задача (28). Если все собственные значения оператора  $A$  в (28) больше или равны 0, то значения функций  $u_1$  и  $u_2$  при  $x < 0$  остаются постоянными для  $\forall t \in \mathbb{R}^+$ .

*Доказательство.* Зададим матрицу оператора как  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Собственные значения и собственные правые векторы определяются выражениями:

$$\lambda_{1,2} = \begin{pmatrix} 1/2d + 1/2a + 1/2\sqrt{(d-a)^2 + 4cb} \\ 1/2d + 1/2a - 1/2\sqrt{(d-a)^2 + 4cb} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$H_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{2b}{d-a + \sqrt{(d-a)^2 + 4cb}}; & \frac{2b}{d-a - \sqrt{(d-a)^2 + 4cb}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Из условия леммы полагаем, что  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 \geq 0$ . Перейдем к характеристическим переменным для начального условия  $\mathbf{W}_0 = H^{-1}\mathbf{U}_0$ .

$$\begin{pmatrix} W_{0,1} \\ W_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{cases} \frac{1}{4} \frac{(d-a + \sqrt{(d-a)^2 + 4cb})(-d+a + \sqrt{(d-a)^2 + 4cb} + 2b)}{b\sqrt{(d-a)^2 + 4cb}}; \\ x < 0. \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{4} \frac{(d-a + \sqrt{(d-a)^2 + 4cb})(-d+a + \sqrt{(d-a)^2 + 4cb} + 2be^{ikx})}{b\sqrt{(d-a)^2 + 4cb}}; \\ x \geq 0. \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{4} \frac{(d-a - \sqrt{(d-a)^2 + 4cb})(-d+a - \sqrt{(d-a)^2 + 4cb} + 2b)}{b\sqrt{(d-a)^2 + 4cb}}; \\ x < 0. \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{4} \frac{(d-a - \sqrt{(d-a)^2 + 4cb})(-d+a - \sqrt{(d-a)^2 + 4cb} + 2be^{ikx})}{b\sqrt{(d-a)^2 + 4cb}}; \\ x \geq 0. \end{cases} \end{cases} \quad (31)$$

Рассмотрим диагонализацию матрицы  $A$  в виде  $\Lambda = H^{-1}AH$ , и тогда запишем уравнение (28) в виде

$$H^{-1}\mathbf{U}_t + H^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}_x = \mathbf{0}; \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_i); \quad \mathbf{W}_t + \Lambda\mathbf{W}_x = \mathbf{0}, \quad (32)$$

и можно разделить последнее векторное уравнение на два, которые будут решаться независимо:

$$(W_i)_t + \lambda_i(W_i)_x = 0; \quad i = 1, 2. \quad (33)$$

Тогда решение в характеристических переменных имеет вид

$$W_i = W_{0,i}(x - \lambda_i t), \quad i = 1, 2. \quad (34)$$

Используя начальные решения (31), получаем решение в характеристических переменных:

$$\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{1}{4} \frac{(d-a+\sqrt{(d-a)^2+4cb})(-d+a+\sqrt{(d-a)^2+4cb}+2b)}{b\sqrt{(d-a)^2+4cb}}; \\ \left(x - \frac{d+a+\sqrt{(d-a)^2+4cb}}{2}t\right) < 0. \\ \frac{1}{4} \frac{(d-a+\sqrt{(d-a)^2+4cb})(-d+a+\sqrt{(d-a)^2+4cb}+2b \cdot e^{ik(x-\frac{d+a+\sqrt{(d-a)^2+4cb}}{2}t)})}{b\sqrt{(d-a)^2+4cb}}; \\ \left(x - \frac{d+a+\sqrt{(d-a)^2+4cb}}{2}t\right) \geq 0. \\ \frac{1}{4} \frac{(d-a-\sqrt{(d-a)^2+4cb})(-d+a-\sqrt{(d-a)^2+4cb}+2b)}{b\sqrt{(d-a)^2+4cb}}; \\ \left(x - \frac{d+a-\sqrt{(d-a)^2+4cb}}{2}t\right) < 0. \\ \frac{1}{4} \frac{(d-a-\sqrt{(d-a)^2+4cb})(-d+a-\sqrt{(d-a)^2+4cb}+2b \cdot e^{ik(x-\frac{d+a-\sqrt{(d-a)^2+4cb}}{2}t)})}{b\sqrt{(d-a)^2+4cb}}; \\ \left(x - \frac{d+a-\sqrt{(d-a)^2+4cb}}{2}t\right) \geq 0. \end{cases} \quad (35)$$

Переходя к консервативным переменным  $U = HW$ , получим

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2b}{d-a+\sqrt{(d-a)^2+4cb}}W_1 + \frac{2b}{d-a-\sqrt{(d-a)^2+4cb}}W_2 \\ W_1 + W_2 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Из полученного выражения видно, что в решении (36) собственные векторы не зависят от  $x - \lambda_i t$ , следовательно, решение может быть представлено как

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_1(e^{ik(x-\lambda_1 t)}) \end{Bmatrix} + \eta_2 \begin{Bmatrix} W_2 \\ W_2(e^{ik(x-\lambda_2 t)}) \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_1(e^{ik(x-\lambda_1 t)}) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} W_2 \\ W_2(e^{ik(x-\lambda_2 t)}) \end{Bmatrix} \end{pmatrix}, \quad (37)$$

где  $\eta_1, \eta_2$  — значения в (36), не зависящие от  $x$  или  $t$ :

$$\eta_1 = \frac{2b}{d-a+\sqrt{(d-a)^2+4cb}}, \quad \eta_2 = \frac{2b}{d-a-\sqrt{(d-a)^2+4cb}}.$$

Рассмотрим два возможных случая.

1.  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$ :

$$1) x \geq \lambda_1 \implies \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 W_1(e^{ik(x-\lambda_1 t)}) + \eta_2 W_2(e^{ikx}) \\ W_1(e^{ik(x-\lambda_1 t)}) + W_2(e^{ikx}) \end{pmatrix}; \quad (38)$$

$$2) x > 0, \quad x < \lambda_1. \implies \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 W_1 + \eta_2 W_2(e^{ikx}) \\ W_1 + W_2(e^{ikx}) \end{pmatrix}; \quad (39)$$

$$3) x \leq 0. \implies \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 W_1 + \eta_2 W_2 \\ W_1 + W_2 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

2.  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 \geq \lambda_2$ :

$$1) x \geq \lambda_1 \implies \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 W_1 (e^{ik(x-\lambda_1 t)}) + \eta_2 W_2 (e^{ik(x-\lambda_2 t)}) \\ W_1 (e^{ik(x-\lambda_1 t)}) + W_2 (e^{ik(x-\lambda_2 t)}) \end{pmatrix}; \tag{41}$$

$$2) \lambda_1 \geq x \geq \lambda_2. \implies \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 W_1 + \eta_2 W_2 (e^{ik(x-\lambda_2 t)}) \\ W_1 + W_2 (e^{ik(x-\lambda_2 t)}) \end{pmatrix}; \tag{42}$$

$$3) x \geq 0, \quad x < \lambda_2. \implies \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 W_1 + \eta_2 W_2 \\ W_1 + W_2 \end{pmatrix}; \tag{43}$$

$$4) x < 0. \implies \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 W_1 + \eta_2 W_2 \\ W_1 + W_2 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Очевидно, что для доказательства леммы осталось показать, что

$$\eta_1 W_1 + \eta_2 W_2 = 1 \quad \text{и} \quad W_1 + W_2 = 1.$$

Данное достаточно громоздкое доказательство здесь опускаем, его можно провести и показать справедливость данного утверждения для  $\forall \{a, b, c, d\} \in \mathbb{R}$  с помощью любого пакета символьных вычислений, например, Maple или Wolfram Mathematica.  $\square$

**Лемма 2.** Если для н. к. з. (28) хотя бы одно собственное значение оператора  $A$  меньше 0, то значения хотя бы одной из функций  $u_1$  и  $u_2$  при  $x < 0$  изменяются в процессе увеличения  $t$ .

*Доказательство.* Для доказательства в данной формулировке достаточно рассмотреть один пример и обратиться к доказательству леммы 1. Из условия  $\lambda_1 > 0; \lambda_2 < 0$ . Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{а} \quad H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перейдем к характеристическим переменным:

$$\begin{pmatrix} W_{0,1} \\ W_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{cases} 1; & x < 0 \\ e^{ikx}; & x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{2}; & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{ikx}; & x \geq 0 \end{cases} \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Разбивая систему уравнений на два независимых уравнения путем денационализации оператора  $A$ , т. е.

$$\Lambda = H^{-1}AH = \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_i),$$



получаем два независимых уравнения в характеристических переменных. Решение в характеристических переменных имеет вид

$$\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{cases} 1; & (x-t) < 0 \\ e^{ik(x-t)}; & (x-t) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{2}; & (x+t) < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{ik(x+t)}; & (x+t) \geq 0 \end{cases} \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Переходя к искомым функциям, решение будет найдено в виде

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{cases} \frac{1}{2}; & (x-t) < 0 \\ \frac{1}{2}e^{ik(x-t)}; & (x-t) \geq 0 \end{cases} + \begin{cases} \frac{1}{2}; & (x+t) < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{ik(x+t)}; & (x+t) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1; & (x-t) < 0 \\ e^{ik(x+t)}; & (x-t) \geq 0 \end{cases} \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Рассмотрим только случай, при котором  $x < 0$ .

$$1) \ x \geq (x+t); \ x < 0 \implies \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{ik(x+t)} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

$$2) \ x < (x+t); \ x < 0 \implies \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Обратимся к произвольным постоянным коэффициентам матрицы оператора  $A$ , таким что  $\exists \lambda_i < 0$ ,  $\forall i = \{1, 2\}$ . Сравнивая решение (47) и (37) можно увидеть что они идентичны с точность до постоянных, зависящих лишь от выбранных коэффициентов матрицы. Таким образом, доказанный пример справедлив для любых выбранных коэффициентов и зависит только от знака собственных значений матрицы оператора  $A$ .  $\square$

**Лемма 3.** Если оператор  $A$  можно привести к диагональному виду, то леммы 1 и 2 справедливы и для случая  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

*Доказательство.* Доказательство вытекает из формы оператора, поскольку позволяет разбить систему уравнений на три независимые уравнения в характеристических переменных. При дальнейшем переходе к «физическим» переменным коэффициенты правых и левых собственных векторов линейного оператора зависят только от постоянных значений матрицы оператора  $A$ , поэтому вид решения, аналогично леммам 1 и 2 будет определяться знаком собственных значений.  $\square$

#### 2.4. Невозможность передачи возмущений через ударную волну для одномерного уравнения газовой динамики

Рассмотрим задачу Римана для одномерного уравнения газовой динамики (23) в пространстве  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . Будем считать что левый вектор переменных  $U_L$  является невозмущенным, т. е. стационарным, а правый вектор переменных —  $U_R$ , имеет возмущение. Пусть в точке  $X$  решение имеет вид стационарной ударной волны, т. е.  $S(X) = 0$  и  $p_L < p_R$ .

**Теорема 1.** Если в точке  $X$  имеется стационарная ударная волна, то возмущения, возникающие справа от ударной волны (т. е. в  $U_R = (\rho_R; m_R; E_R)^T$ ), распространяются влево через ударную волну не больше чем на бесконечно малую окрестность.

*Доказательство.* По условию теоремы имеем решение в форме ударной волны, которая находится в первом характеристическом поле ( $\lambda_1 = U - ct$ ), поскольку  $p_L < p_R$ , т. е. имеется набегающий поток. Следовательно, в третьем характеристическом поле ( $\lambda_3 = U + ct$ ) имеется решение вида волны разряжения, а во втором характеристическом поле ( $\lambda_2 = U$ ) — решение вида контактного разрыва. Из полученных соотношений на ударной волне было показано, что  $S = \lambda_1(U_L)$  и, поскольку из условия имеем  $S = 0$ , то  $\lambda_1 = U - ct = 0$ . Следовательно, для данной точки  $X$ , имеем  $\lambda_1 = 0 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ .

Покажем возможность приведения матрицы  $A$  к диагональной форме и переходу к характеристическим переменным. Поскольку было показано, что матрица собственных значений может быть приведена к виду  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$  (25), которую можно получить из примитивных переменных. С другой стороны, матрицу  $A$  можно представить как  $A = H\Lambda H^{-1}$ , т. е.  $\Lambda = H^{-1}AH$ , и тогда, переходя к характеристическим переменным, получим

$$H^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + AH H^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right) = \mathbf{0}; \quad \frac{\partial(H^{-1}\mathbf{U})}{\partial t} + H^{-1}AH \frac{\partial(H^{-1}\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{0}; \tag{50}$$

$$\mathbf{W} = H^{-1}\mathbf{U}; \quad \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{0}.$$

Здесь правый собственный вектор и вектор характеристических переменных определяются как ( $\eta = E + p/\rho$ ):

$$H = \begin{pmatrix} \rho/c & \rho/c & 1 \\ \rho(\eta/c - u) & u^2/2 & \rho(\eta/c + u) \\ \rho(u/c - 1) & u & \rho(u/c + 1) \end{pmatrix}, \tag{51}$$

$$W = \begin{pmatrix} \rho - 1/c^2 p \\ p/(\rho c) + u \\ p/(\rho c) - u \end{pmatrix}. \tag{52}$$

Таким образом, получены три уравнения с тремя независимыми переменными в поле характеристик.

В соответствии с леммой 3, полученные уравнения в данной точке  $X$  совпадают с ранее рассмотренной системой (28). Для решения трех уравнений необходимо рассмотреть задачу Римана в характеристических переменных, нахождение ее решения в виде (37) с последующим переходом в физические переменные  $\mathbf{U} = H\mathbf{W}$ . В связи с условиями положительности двух собственных значений и равенства нулю одного собственного значения в точке стационарной ударной волны, полученная система подчиняется условиям леммы 1 ( $\lambda_i \geq 0 \forall i = [1 - 3]$ ), и таким образом в окрестности точки  $X$  лемма 1 для рассмотренной задачи выполняется. На основе лемм 1 и 3 теорема доказана.  $\square$

Следовательно, при наличии ударных волн в решениях уравнений возмущения будут распространяться локально и могут иметь области отсекаемые ударными волнами, в которых решения будут стационарными, что выражается в наличии стационарной точки в фазовом пространстве. Для исследования двухмерной задачи требуется применение численного метода интегрирования исходных уравнений.

### 3. Численный метод интегрирования высокого порядка

#### 3.1. Аппроксимация, слабое решение

Пусть задана замкнутая область  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , в которой определяется н. к. з. и разбиение этой области на  $N$  прямоугольных элементов  $\delta\Omega$  таких, что

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{N-1} \delta\Omega_k; \quad \delta\Omega_m \cap \delta\Omega_p = \emptyset; \quad m \neq p. \tag{53}$$

Каждый элемент занумеруем индексом  $i$  по оси  $X$  и  $j$  — по оси  $Y$ , таким образом, каждый элемент получит уникальный номер в системе координат  $\{i, j\}$ , т. е. формируется структурированная сетка. Рассмотрим векторную запись (2) в интегральной форме на каждом элементе. Применяя теорему Гаусса, получим

$$\int \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} d\Omega_p + \oint \mathbf{F} d\Omega_p^y + \oint \mathbf{G} d\Omega_p^x = \mathbf{0}, \tag{54}$$

и, переходя от интеграла к сумме (сумма по всем граням элемента  $\Omega_i$ ), будем иметь

$$\frac{dU_i}{dt} (dx dy)_i + \sum F_i dy_i + \sum G_i dx_i = 0. \quad (55)$$

В связи с тем, что уравнение записывается на структурированной сетке, то последнее уравнение можно расщепить по направлениям и для простоты рассматривать одномерную задачу.

Для расчета (55) рассматривается консервативная схема для уравнения (23) в дискретной форме на сетке

$$G_m = (x_i \times t_n) \quad (x_i = \sum_{i=1}^N \Delta x_i)$$

вида

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t_n} = \frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{\Delta x_i}, \quad (56)$$

здесь применяется метод конечного объема, основанный на том, что пространственная аппроксимация проводится не в точке-центре сетки а на гранях (индексы  $i \pm 1/2$ ) между двумя соседними сетками. Расчет потоков через грани сетки  $F_{i \pm 1/2}$  основан на решении задачи Римана на каждой грани. Итерационное аналитическое решение задачи о распаде произвольного разрыва проводится с помощью хорошо известного метода С. К. Годунова [3]. Для такой дискретизации справедлива

**Теорема Лакса—Вендроффа** [2]. Пусть введена последовательность сеток  $\{G_m\}$ , такая, что  $\Delta x_i, \Delta t_n \rightarrow 0$ , когда  $i \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ , и пусть  $U_m(t, x)$  — численное решение н. к. з. с применением схемы (56) на  $m$ -м пространстве сеток. При решении задачи Римана в каждой точке  $G_m$  так, что при  $m \rightarrow \infty$ ,  $U(t, x)_m$  сходится к  $u(t, x)$  почти всюду (т. е. может быть за исключением множества меры нуль). Тогда  $u(t, x)$  есть слабое решение (23).

Кратко введем численный метод решения произвольной корректной н. к. з. Первое — опишем метод нахождения решения задачи Римана и второе — опишем метод повышения порядка аппроксимации.

### 3.2. Численное решение задачи Римана

Существуют четыре класса методов численного решения задачи распада произвольного разрыва. К первому классу относятся центральные методы решения схемы (56) в консервативных переменных путем простой конечно-объемной записи, где потоки вычисляются по простой записи относительно граней конечных объемов; схемы Лакса—Вендроффа, Лакса—Фридрикса и т. д. Такие методы фактически не решают задачи Римана и имеют значительную диссипацию, особенно на разрывных решениях. В настоящее время практически не используются. Ко второму классу относится метод С. К. Годунова [3], основанный на точном решении задачи о распаде произвольного разрыва. Такой метод находит точное решение на основе постоянства функций в векторе  $U_{L/R}$  по линиям характеристик и потом, вычислив значения потоков через грани, находит искомые значения функций в векторе  $U$ . Для нахождения давления во втором характеристическом поле применяется итерационная процедура. Данный метод является наиболее точным методом решения задачи Римана, но требует значительного вычислительного времени, т. к. в некоторых случаях количество итераций для нахождения решения может быть значительным. К третьему классу решения задачи Римана относятся методы приближенного решения, связанные с вычислением функций в  $U$  сразу из линеаризации на грани конечного объема с использованием матрицы  $A$ . Имеется обширное семейство таких методов, наиболее полно их описание можно найти в [2] (к ним относятся метод Роу, метод Русанова, метод расщепления векторов, HLL, HLLC методы и т. д.). К четвертому классу методов решения задачи Римана относятся методы, которые полностью численно решают данную задачу на основе итерационной процедуры, строящейся из методов первого класса. Для записи потоков через грани используются схемы Лакса—Вендроффа и Лакса—Фридрикса. Но в отличие от первого класса методов итерационная процедура позволяет численно найти решение задачи Римана с раскрытием всего веера характеристик. Такие методы имеют название MUSTA (Multi Stage) и были предложены в работе [4]. Данный метод является сочетанием точности метода Годунова и простоты центральных методов. Кратко опишем данный метод для консервативной схемы одномерного уравнения (56). Рассмотрим грань конечного объема ( $M$ ), на которой находится решение задачи распада произвольного разрыва (15). Процедура нахождения решения состоит из итерационной последовательности шагов ( $k$  — шаг итерации).

Итерационная схема MUSTA

$$\begin{aligned}
 &1. \mathbf{U}_{L/R}^{(k)} = \mathbf{U}_{L/R}^{(k-1)}; \quad 2. \mathbf{F}_{L/R}^{(k)} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{L/R}^{(k)}); \quad 3. \mathbf{U}_M^{(k)} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{U}_L^{(k)} + \mathbf{U}_R^{(k)} \right) + \frac{\Delta t}{2\Delta X} \left( \mathbf{F}_L^{(k)} - \mathbf{F}_R^{(k)} \right); \\
 &4. \mathbf{F}_M^{(k)} = \frac{1}{4} \left( \mathbf{F}_L^{(k)} + 2\mathbf{F}^{(k)}(\mathbf{U}_M^{(k)}) + \mathbf{F}_R^{(k)} + \frac{\Delta x}{\Delta t} (\mathbf{U}_L^{(k)} - \mathbf{U}_R^{(k)}) \right); \quad 5. \begin{aligned} &\mathbf{U}_L^{(k+1)} = \mathbf{U}_L^{(k)} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathbf{F}_L^{(k)} - \mathbf{F}_M^{(k)} \right); \\ &\mathbf{U}_R^{(k+1)} = \mathbf{U}_R^{(k)} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathbf{F}_M^{(k)} - \mathbf{F}_R^{(k)} \right); \end{aligned}
 \end{aligned}$$

6.  $k++$ . Переход на шаг 1, пока необходимое количество итераций не достигнуто.

В работе [4] указывается, что достаточно 3–4 итераций для получения точности, равной методу С. К. Годунова. Проведенное решение тестовых задач для одномерного уравнения Эйлера показало, что наиболее приемлемый критерий остановки итераций выглядит как

$$1) \max_U \frac{|\mathbf{U}_L^k - \mathbf{U}_{L/R}^{k-1}|}{|\mathbf{U}_{L/R} + \epsilon|} < \epsilon; \quad 2) k \leq 10,$$

где  $\epsilon = 1,0 \cdot 10^{-14}$ . Практика расчетов показывает, что в большинстве точек сходимость достигается, действительно, за 3–4 итерации. В точках разрывных решений и больших градиентов функций работает ограничение 2. Сравним результаты расчета некоторых характерных тестовых задач методом С. К. Годунова и методом MUSTA. Тестовые задачи решались на пространственной сетке в 250 конечных объемов (к. о.) на единичном отрезке, использовалась явная схема первого порядка по времени и по пространству. В табл. 1 задаются значения функций  $\mathbf{U}$ , время расчета и место наличия разрыва в задаваемых функциях на единичном отрезке.

Таблица 1

Начальные условия для тестов решения задачи Римана

Test №	$\rho_L$	$u_L$	$p_L$	$\rho_R$	$u_R$	$p_R$	$x_0$	$t$
1	3,0	0,0	3,0	1,0	0,0	1,0	0,5	0,3
2	1,0	-2,0	0,4	1,0	2,0	0,4	0,5	0,15
3	1,0	0,0	1000,0	1,0	0,0	0,01	0,5	0,012
4	0,1261192	8,9047029	782,92899	6,591493	2,2654207	3,1544874	0,5	0,0039
5	1	1	$1 \cdot 10^{-6}$	1	-1	$1 \cdot 10^{-6}$	0,5	1,0

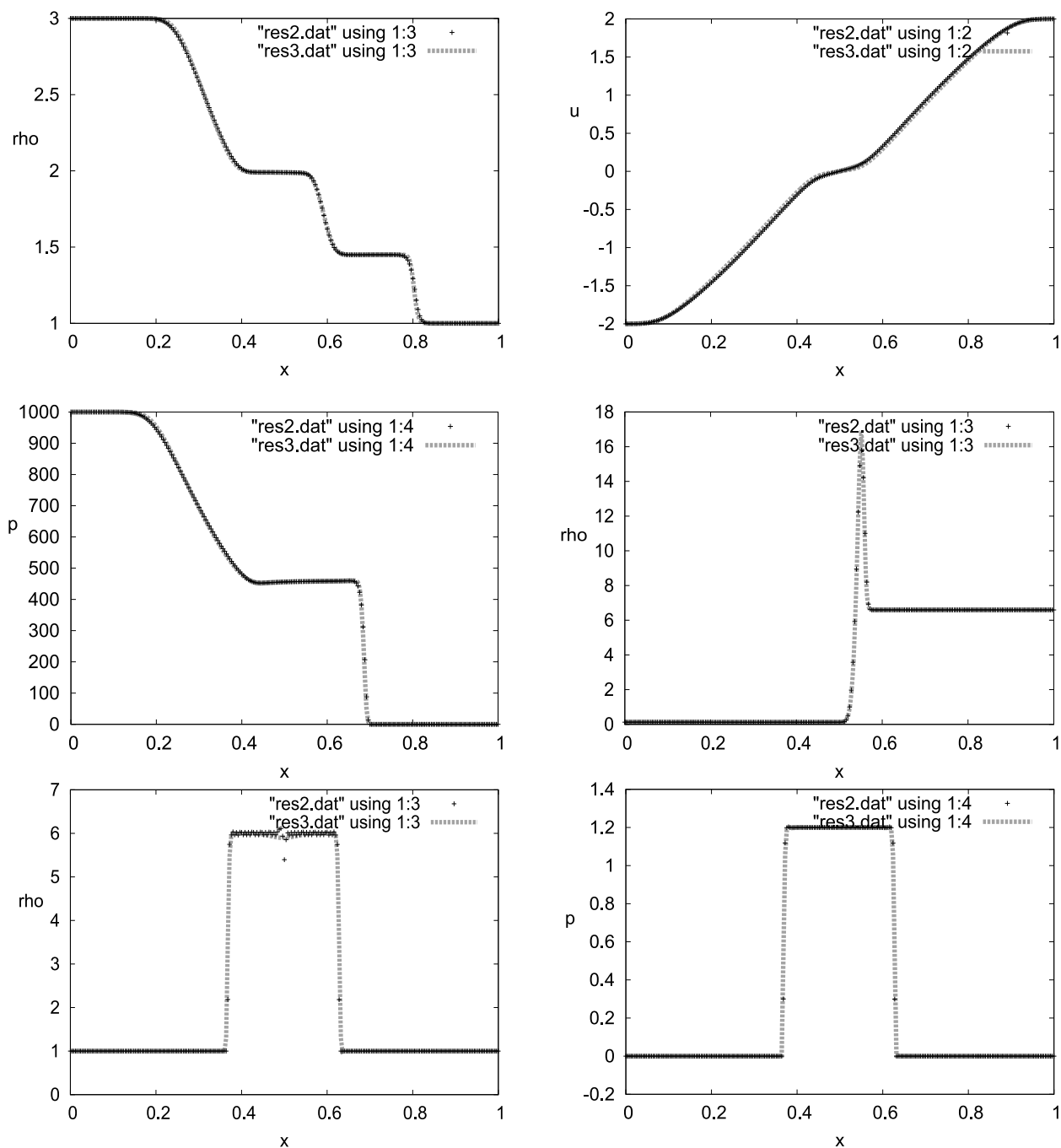
Результаты решения тестовых задач приведены в рис. 1 (стр. 97).

Видно, что MUSTA метод достаточно точен, не приводит к получению не физических осцилляций и может быть использован для решения различных сложных задач.

3.3. Повышение порядка

Получаемые решения на основе решения задачи о распаде произвольного разрыва отвечают системе (2), но имеют низкий порядок аппроксимации по пространству и времени. Для повышения точности аппроксимации по пространству применяется схема **WENO9** — 9-го порядка точности для реконструкции переменных на гранях элементов. Суть **WENO** — схемы — суперпозиция взвешенных шаблонов высокого (9-го) порядка, среди которых выбирается наиболее подходящий из условия сохранения полной вариации решения. Выбор производится изменением весов, нелинейно зависящих от пробных функций, — маркеров. Эти маркеры определяют наличие сильных градиентов и разрывов в аппроксимируемой функции и схема адаптируется к такому решению, не теряя порядка аппроксимации на разрывах. Например, для модельного уравнения  $f_t = -af_x$ ,  $a > 0$  схему **WENO** можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 f_i^{n+1} &= f_i^n - a\Delta t/\Delta x [\widehat{f}_{i+1/2}^n - \widehat{f}_{i-1/2}^n]; \quad \widehat{f}_{i-1/2} = (f_{i-5}, \dots, f_{i+3}) \cdot \mathbf{C}_9(1, x, \dots, x^8)[\omega_s]; \\
 \widehat{f}_{i+1/2} &= (f_{i-3}, \dots, f_{i+5}) \cdot \mathbf{C}_9(1, x, \dots, x^8)[\omega_s]; \quad s \in [1, \dots, 5].
 \end{aligned}
 \tag{57}$$



**Рис. 1.** Тестовые задачи, слева направо, сверху вниз: 1, 2, 3, 4, 5 (плотность и давление). Условные обозначения: крест — решение методом Годунова, линия — решение методом MUSTA

Здесь  $C_9$  — матрица  $9 \times 9$  коэффициентов для численной схемы пробных шаблонов. Она вычисляется посредством применения интерполяционных полиномов Лагранжа;  $s$  — количество пробных шаблонов (для WENO9 = 5);  $\omega_s$  — веса каждого пробного шаблона, которые вычисляются как

$$\omega_s = \hat{\omega}_s / \sum_1^5 \hat{\omega}_s, \quad \hat{\omega}_s = \frac{\gamma_s}{(\epsilon + \beta_s)^2}, \quad \sum_1^5 \omega_s = 1, \tag{58}$$

где  $\epsilon = 1 \cdot 10^{-14}$  — малая величина для предотвращения деления на 0;  $\gamma_s$  — линейные веса (постоянные), определяемые из квадратуры Гаусса. Для вычисления параметров сглаживания схемы (пробных функций —

маркеров) применяется выражение, инвариантное относительно размера  $\Delta x$ :

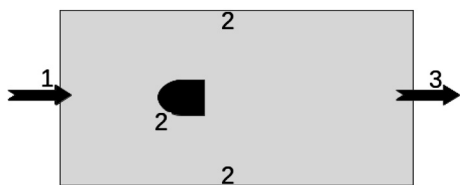
$$\beta_s = \sum_{l=1}^k \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \Delta x^{2l-1} \left( \frac{\partial^l Pr(x)}{\partial x^l} \right)^2 dx, \quad (59)$$

что позволяет применять эту схему на адаптивной сетке с изменяющимися значениями  $\Delta x$ . Здесь  $Pr(x)$  — полином порядка пробных шаблонов выбранной схемы,  $k = 5$  для WENO9. Конкретные полиномы, применяемые для моделирования такого класса задач выбираются с учетом чувствительности схемы к наличию больших градиентов и минимизации неизбежной схемной вязкости.

После вычисления консервативных переменных (вектора  $\mathbf{U}$ ) с применением схемы WENO9 на гранях каждого конечного объема конструируются потоки  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$  с помощью описанного алгоритма для нахождения решения задачи распада произвольного разрыва. Полученные потоки подставляются в (55), где суммируются по всем граням каждого дискретного элемента разбиения. В результате значения потоков  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$  получаются известными с высокой точностью. Для интегрирования по времени для каждого элемента разбиения решается ОДУ методом Рунге—Кутты третьего порядка точности с выполнением условия TVD, см. [11]. Для ускорения расчета весь алгоритм переписан под архитектуру GPGPU NVIDIA на языке CUDA C. В результате указанной численной процедуры для заданной н. к. з. можно вычислять уравнения (1) с высокой точностью — 9-й порядок по пространству, 3-й по времени. Численный метод протестирован на классических тестовых задачах Сода и задач обтекания профилей NACA 0012, ONERA M6 и RAE, см. [11].

## 4. Постановка начально-краевой задачи, моделирование турбулентности

### 4.1. Постановка начально-краевой задачи



**Рис. 2.** Постановка начально-краевой задачи обтекания затупленного тела. Условные обозначения: 1 — входной поток, 2 — твердая стенка, 3 — выходной поток

В качестве характерной задачи будем рассматривать задачу обтекания прямоугольного затупленного препятствия сверхзвуковым потоком газа, см. рис. 2.

Область  $\Omega$  — прямоугольная, размером  $8 \times 3$ . В начальный момент газ, с единичной плотностью, покоится. В зависимости от режима течения входного потока выбирается композиция граничных условий для вектора  $\mathbf{U}$  и вектора  $\mathbf{F}$ . Если входной поток сверхзвуковой, т. е.  $M = |\mathbf{u}|/c > 1$  то во входной области 1 ставятся условия Дирихле для скорости, плотности и давления такие, чтобы обеспечить расчетное значение числа Маха, в данном случае выбранное равным 2. Вектор потока на границе вычисляется из установленных условий. На выходной области ставятся характеристические условия.

На твердой стенке и на обтекаемом объекте 2 ставятся условия не протекания для нормальной к стенке компоненты  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$  и прилипания для касательной компоненты  $\mathbf{u}$ . Более детально о корректности такой постановки граничных условий на стенке см. ниже.

### 4.2. Неявное моделирование турбулентности

Следуя идеям академика О. М. Белоцерковского и проф. Ивлиева о рациональном осреднении потока газа, будем считать, что первое дифференциальное приближение численной схемы для (1) с применением (55) отвечает критерию Ивлиева, см. [1], т. е. схемная вязкость численного метода вводит пространственно-временной фильтр осреднения, приводящий к получению корректных статистических результатов. Размер сетки выбирается из условия инвариантности мезомасштабной вихревой структуры масштаба Озеена—Тейлора. Тогда все крупномасштабные вихревые структуры разрешаются явно численным методом, а мелкомасштабная турбулентность замыкается неявным пространственно-временным фильтром, роль которого играет схемная вязкость. Конечно, при этом можно говорить только о статистической корректности моделирования, и для более детального анализа необходимо рассмотрение полных уравнений вязкого теплопроводного газа. При таком подходе возникает особенность постановки граничных условий на твердой стенке. В отличие от задачи течения невязкого газа у твердой стенки, где ставится условие проскальзывания скорости, т. е.  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ , здесь ставится условие прилипания, т. е.  $\mathbf{u} = 0$ . Данная постановка кажется некорректной, если

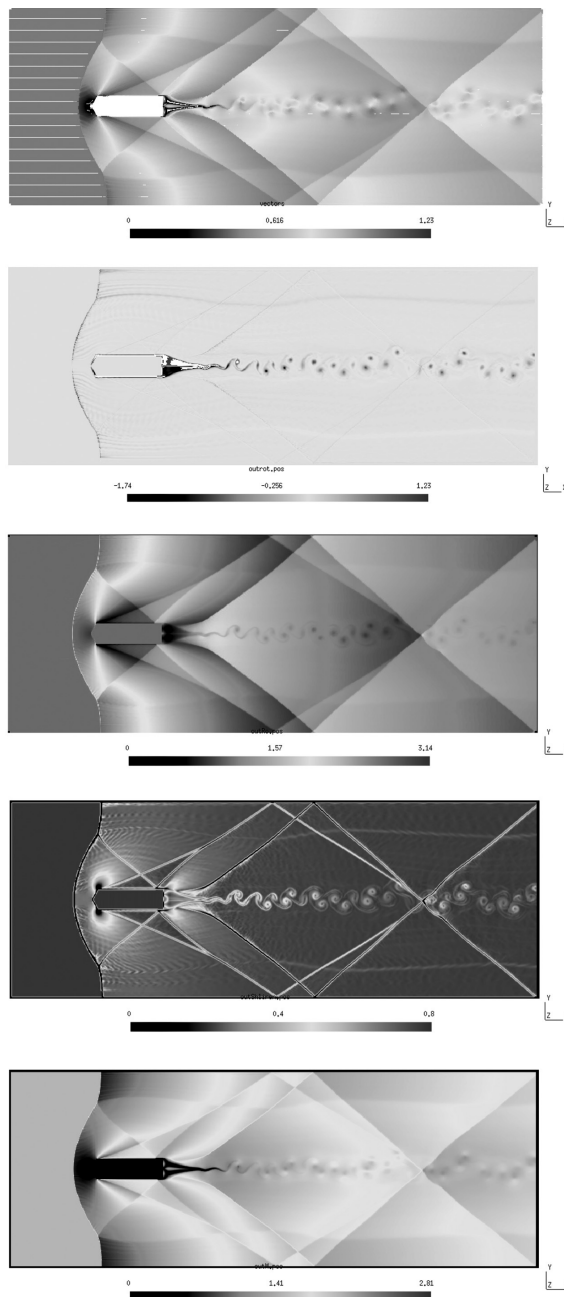
не учитывать искусственную схемную вязкость. Поскольку газ в начальный момент покоится, в областях стенки возникнут стагнационные зоны, которые будут имитировать образование пограничного слоя. В областях с развитым течением такой фиктивный пограничный слой будет вырождаться в 1–2-сеточные ячейки и приводить к возникновению неустойчивости, моделируя тем самым «фиктивный» пограничный слой. Такой подход фактически моделирует течение газа при числе Рейнольдса, стремящемся к бесконечности. Уточнение постановки граничных условий будет проведено в результате расчета н. к. з.

## 5. Результаты расчета и конфигурация фазового пространства

Рассмотрим результаты некоторых расчетов поставленной начально-краевой задачи. Для анализа бифуркационной картины в различных точках области расчета записывались переменные, входящие в  $\mathbf{u}$ , после чего по ним строились фазовые портреты поведения системы после выхода решения системы (1) на квазистационарный режим.

Рассматривается задача обтекания прямоугольного затупленного препятствия для входного значения  $M = 2$ , т. е. сверхзвуковой режим обтекания. Фактически такая задача относится к задаче движения пули или снаряда в канале при сверхзвуковом режиме (сразу после выстрела). Размер одного дискретного элемента рассчитывается из условия нормализации пространственных и скоростных переменных. Тогда из условия разрешения мезомасштаба Тейлора размер выбран как  $\Delta x = 800$ ;  $\Delta y = 300$ , из условия  $CFL = 1,0$ :  $\Delta t = (4,5 - 6,5) \cdot 10^{-4}$ . На рис. 3 показаны результаты расчета задачи в фиксированный момент времени в физическом пространстве. Граничные условия прилипания ставились только в области обтекаемого тела. При постановке условий для касательной составляющей скорости (прилипание) на стенках канала происходило затягивание зон ударных волн и их не физическое отражение от стенок. Данный факт объясняется эффектом сжимаемости в вязкостном члене уравнений, который на данном этапе работы не учитывался. Следовательно, для приведенного расчета на стенках канала ставится условие проскальзывания. На обтекаемом объекте ставились условия прилипания, поскольку сам объект находится в дозвуковой либо слабой сверхзвуковой областях потока и сжимаемый эффект вязкости играет незначительную роль. В дальнейшем планируется провести как аналитический, так и численный анализ вязких уравнений теплопроводного газа для выяснения полной картины.

На представленных результатах отчетливо видно образование отошедшей ударной волны впереди препятствия. Дальше конфигурация решения усложняется ввиду наличия стенки канала, от которой происходит отражение ударной волны и ее взаимодействие с турбулентным сдвиговым слоем смешения, который возникает в спутном следе препятствия. Отраженная ударная волна сжатия в области спутного следа претерпевает взаимодействие с турбулентным следом и повторяет конфигурацию отражения в канале, таким образом происходит



**Рис. 3.** Визуализация решения уравнений (1) для заданной н. к. з. Сверху вниз — векторы скорости, модуль вектора вихря скорости, плотность, Шлирен картина, число Маха

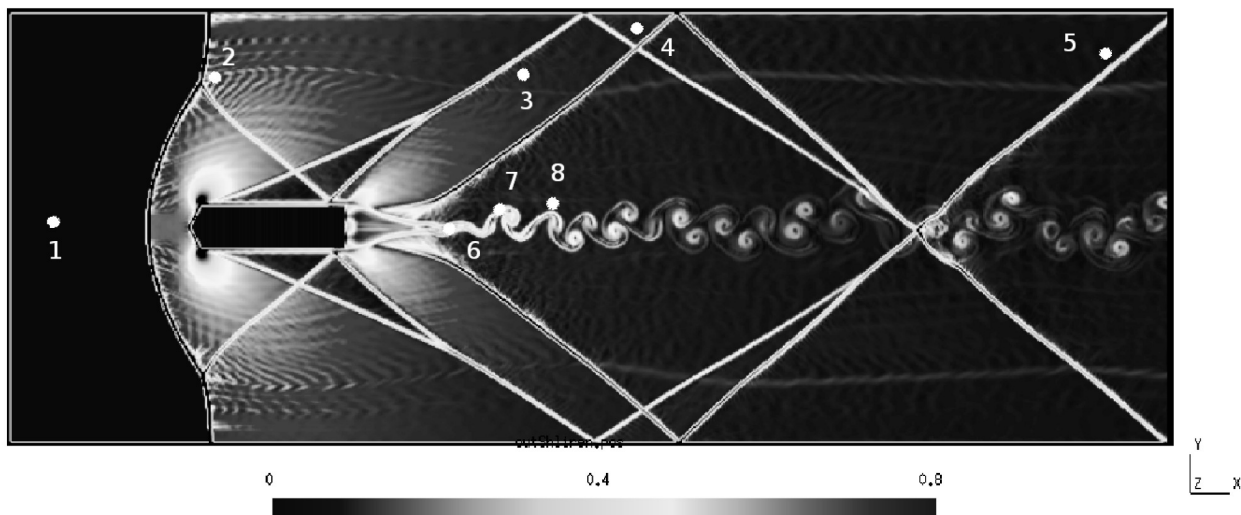


Рис. 4. Расположение пробных точек в конфигурационном пространстве

чередование возмущенных и невозмущенных зон, разделяемых ударными волнами. Сами эти зоны, формируемые ударными волнами отражения, являются квазистационарными и зависят в свою очередь от структуры спутного следа и вихревой дорожки. Более точные результаты по конфигурации пространства решений показаны на рис. 3. По изолиниям чисел Маха видно образование пограничного слоя около обтекаемого тела, а также около стенок канала, с формированием вихревых структур.

Для проведения анализа фазового пространства было выбрано 8 точек. Данные по составляющим скорости записывались за все время расчета, начиная от момента выхода на квазистационарное решение. Для получения репрезентативных результатов время расчета выбрано так, чтобы превышать время самой низкочастотной гармоники как минимум в 1000 раз, что составило 1 500 000 шагов по времени. Координаты точек определялись следующим образом (см. рис. 4). Первая точка расположена в области невозмущенного потока слева от обтекаемого объекта для проверки справедливости теоремы 1 для двухмерного случая. Вторая, третья, четвертая и пятая точки расположены в областях ударных волн, причем вторая точка расположена на одну ячейку правее от головной ударной волны. Шестая, седьмая и восьмая точки расположены в области вихревого спутного следа; шестая ровно посередине, седьмая и восьмая с небольшим эксцентриситетом.

Результаты в фазовом пространстве имеют ряд особенностей. В отличие от результатов течения в несжимаемых и слабосжимаемых средах (например, [6, 9]), фазовое бесконечномерное пространство не является однородным. В точке 1 после установления решения в фазовом пространстве образуется устойчивая точка, которая не изменяется с течением времени с любой точностью, рис. 5. Таким образом, можно утверждать что теорема 1 справедлива и для двухмерных течений. Строгое доказательство этого факта для 2D и 3D случаев будет приведено в следующих публикациях.

В точке 2, находящейся в непосредственной близости справа от головной ударной волны, в проекции фазового пространства на  $\mathbb{R}^2$  наблюдается цикл, предположительно периода 11. Причем данное возмущение является регулярным и точность численного решения позволяет получать решения, движущиеся по одной и той же траектории. В точке 3 в фазовом подпространстве наблюдается уже более сложное, хаотическое решение. Такое же поведение можно отметить в других точках, точках 4 и 5. По фазовым портретам не удалось установить каких-либо точных структур. В точках 6–8, см. рис. 6, наблюдается совершенно иное поведение системы, связанное с частотой обтекания твердого тела. В точке 6, расположенной в нескольких дискретных точках после обтекаемого объекта, наблюдается симметричное решение, относительно 0 по  $u_y$ . Дальнейшее удаление от объекта нарушает данную симметрию, но характерное очертание решения остается. Таким образом, видно, что ведут себя независимо друг от друга как минимум три области бесконечномерного фазового пространства системы, разделяемые разрывными решениями (1). Можно отметить, что аналогично предыдущим работам авторов, наблюдаются стадии каскада Фейгенбаума (выражено в точке 2), что может свидетельствовать о возможном наличии сценария ФШМ в данной задаче, если рассматривать координаты пробной точки как бифуркационный параметр.



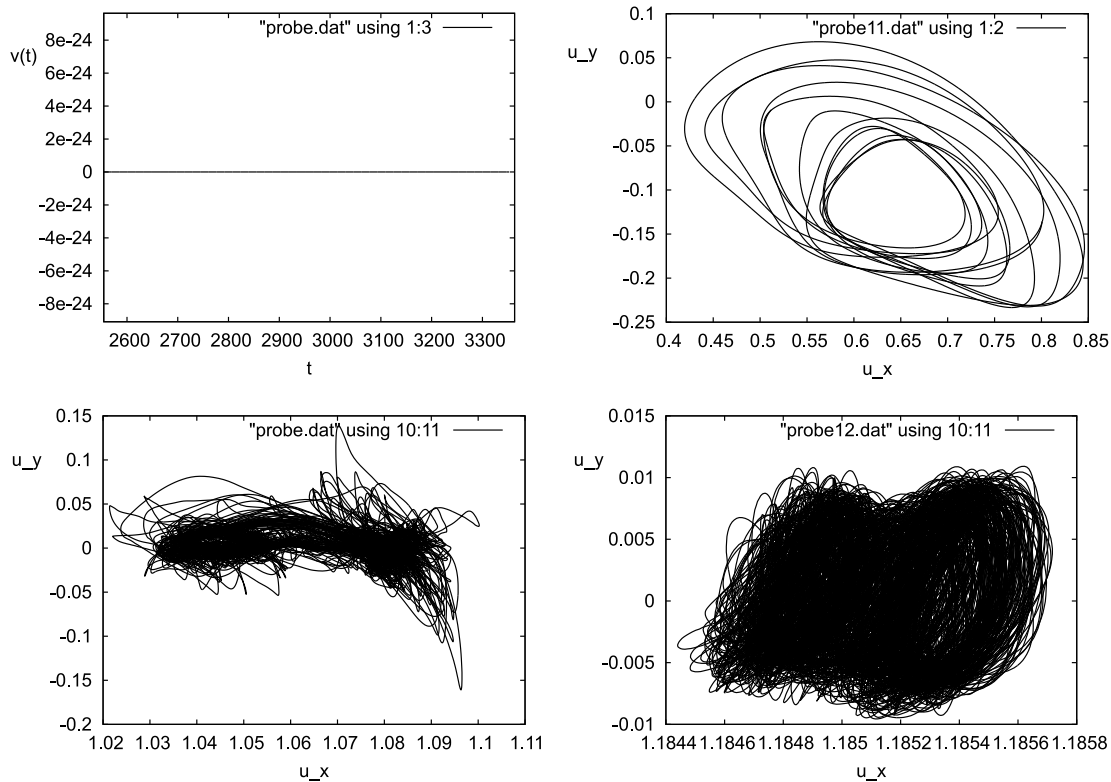


Рис. 5. Фазовые портреты, точки 1 (скорость от времени), 2, 3, 4 (слева направо, сверху вниз)

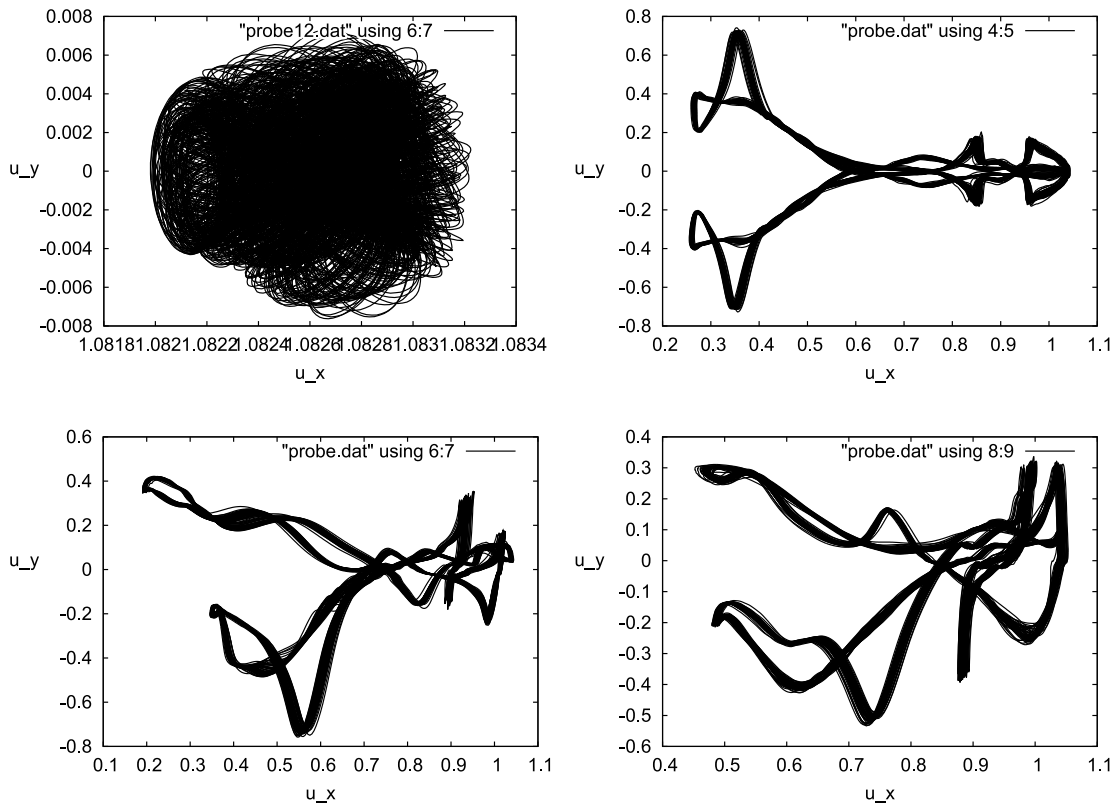


Рис. 6. Фазовые портреты, точки 5, 6, 7, 8 (слева направо, сверху вниз)

## Заключение

В данной работе проанализированы уравнения газовой динамики. Показаны особенности гиперболических систем, проанализированы разрывные решения уравнений. Доказана теорема для одномерного случая о невозможности распространения возмущений через ударную волну против невозмущенного сверхзвукового течения. Для более детального анализа фазового пространства был построен и протестирован численный метод высокого порядка. Для начально краевой задачи обтекания затупленного тела в канале проведен анализ фазового пространства системы (1). Обнаружено что фазовое пространство распадается на подпространства, разделяемые разрывными решениями уравнений, в которых система (1) ведет себя независимо, что было доказано для одномерного случая. Полученные результаты также дали возможность предположить наличие каскадов бифуркаций в сдвиговом турбулентном следе, развивающимся в соответствии с известным сценарием ФШМ [6].

## Литература

1. Белоцерковский О. М., Опарин А. М. Численный эксперимент в турбулентности. От порядка к хаосу. М.: Наука, 2001.
2. Toro E. F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Springer-Verlag, 1999.
3. Годунов С. К. (ред.) Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
4. Titarev V. A., Toro E. F. MUSTA schemes for multi-dimensional hyperbolic systems: analysis and improvements, Preprint NI04032-NPA. Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, University of Cambridge, UK, 2003.
5. Flanders H. Differentiation under the integral sign // American Mathematical Monthly. Vol. 80 (6), 1973, pp. 615–627.
6. Evstigneev N. M., Magnitskii N. A., Sidorov S. V. Nonlinear dynamics of laminar-turbulent transition in three dimensional Rayleigh—Benard convection // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. Volume 15, Issue 10, October 2010, Pages 2851–2859.
7. Evstigneev N. M., Magnitskii N. A. On possible scenarios of the transition to turbulence in Rayleigh—Benard convection // Doklady Mathematics Russian Acad. Sc., 8/2010, Volume: 82 Issue: 1. pp 659–662 (Turbulence Mathematics, general Mathematics).
8. Evstigneev N. M., Magnitskii N. A. Nonlinear dynamics in the initial-boundary value problem on the fluid flow from a ledge for the hydrodynamic approximation to the boltzmann equations // Differential Equations, 12/ 2010, Volume: 46 Issue: 12. pp. 1794–1798.
9. Evstigneev N. M., Magnitskii N. A. Nonlinear Dynamics of Laminar—Turbulent Transition in Back Facing Step Problem for Boltzmann Equations in Hydrodynamic Limit // Proc. of AIP (American Institute of Physics). Vol. 1281, pp. 896–900, 2010.
10. Евстигнеев Н. М., Магницкий Н. А., Рябков О. И. Численное исследование перехода к турбулентности в задаче о двумерном течении вязкой сжимаемой проводящей жидкости в канале с симметричным расширением // Труды ИСА РАН. Т. 62. Вып. 1, с. 55–62. 2012.
11. Евстигнеев Н. М. Интегрирование трехмерных уравнений невязкого газа на неструктурированной сетке с применением распределенных вычислений // Вычислительные методы и программирование, НИВЦ МГУ. Т. 8, с. 252–264, 2007.

**Евстигнеев Николай Михайлович.** С. н. с. ИСА РАН. К. т. н. Окончил Московский Государственный Строительный Университет в 2001 г. Количество печатных работ: 64 (в т. ч. 1 монография). Область научных интересов: гидродинамика (уравнения Навье—Стокса), аэродинамика, теоретическая механика, механика деформированного твердого тела, численные методы, искусственный интеллект, GPGPU. E-mail: evstigneevnm@yandex.ru

**Магницкий Николай Александрович.** Заведующий лабораторией ИСА РАН. Д. ф-м. н., проф., акад. РАН-ЕН. Окончил МГУ в 1974 г. Количество печатных работ: более 200 (в т. ч. 6 монографий). Область научных интересов: нелинейные дифференциальные уравнения, теория управления, хаотические динамические системы, искусственные нейронные сети и экономико-математическое моделирование. E-mail: nmag@isa.ru