

Анализ решений типа «бегущий импульс» сложной формы в распределенной экономической среде, описываемой моделью ФитцХью—Нагумо

А. Г. МАКСИМОВ

Аннотация. Рассмотрена распределенная среда, моделируемая системой уравнений ФитцХью—Нагумо (ФХН), описывающая динамику объектов различной природы — физической, химической, биологической, социальной, экономической. Приведено аналитическое доказательство существования решений в форме импульсов сложного профиля. Такие решения могут быть использованы при описании широкого спектра явлений — от распространения информации, формирования шоков (например, колебания земной коры или цен на финансовые активы и т. д.) до динамики социально-экономических процессов.

Ключевые слова: *распределенная экономическая среда, бегущий импульс сложного хаотического профиля, система ФХН, экономические шоки, гомоклиническая траектория.*

Введение

Объяснение (качественное и количественное) динамики систем, характеристик процессов, ими порождаемых, может базироваться на результатах исследования математических моделей этих систем. Построение моделей, адекватно описывающих поведение (сложной) системы во всех режимах ее функционирования, основанных на выявлении и учете всех взаимосвязей, определении их количественных характеристик, а также собственно анализ таких систем — задача крайне сложная и далеко не всегда выполнимая. Вместе с тем набор базовых моделей, используемых для описания тех или иных классов явлений, как правило, небольшой. Модель ФитцХью—Нагумо (ФХН) [1, 2] (распределенная, принадлежащая классу систем «реакция—диффузия» и ее «сосредоточенная» версия) — из их числа. Созданная первоначально для анализа динамики аксона кальмара и широко распространенная для моделирования активных (возбудимых) нейроподобных сред и решеточных структур (см., например, [3, 4]) ФХН используется и для анализа экономических процессов (см., например, [5–7]).

Модель ФХН, в зависимости от значений параметров и вида нелинейности, демонстрирует разнообразную, сложную, а иногда и хаотическую динамику. Ниже аналитически докажем существование в

модели ФХН решений в виде импульсов сложной формы. Рассмотрим модель ФХН:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + f(u) - v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= b(u - lv), \end{aligned} \quad (1)$$

($f(u) = -u(u - n)(u - 1)$, n, b, l — параметры) без ограничения на параметры (случай $l = 0$ см, например, [8], $0 < b \ll 1$ — [9]). Будем использовать некоторые подходы из [8] и следовать [10]. Решениям типа «бегущий импульс», «бегущий фронт», «соединяющим» пространственно-однородные состояния системы (1), отвечают двояко-асимптотические к состояниям равновесия траектории соответствующей автомодельной системы (2):

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = (c - bl/c)y - g(x) + z, \quad \dot{z} = bF(x). \quad (2)$$

Здесь $x \equiv u$, точкой обозначено дифференцирование по «бегущей» (со скоростью c) координате $\xi = r + ct$, введена новая переменная

$$z \equiv v + bl/c - blx,$$

нелинейные функции

$$g(x) = f(x) - blx, F(x) = x - lf(x).$$

Будем рассматривать систему (2) в фазовом пространстве $G = R^3$ в пространстве параметров

$$d: c \geq 0, b \geq 0, 0 < l < l^* \equiv 4(1-n)^{-2}, \\ 0 < n < 1/2\}.$$

В d система (2) имеет одно состояние равновесия: $O_1(x=0, y=0, z=0)$, причем — седлового типа с одномерным неустойчивым (w^u) и двумерным устойчивым (w^s) многообразиями. Если сепаратриса w^u принадлежит двумерному многообразию w^s , т. е. образует петлю сепаратрисы (двойко-асимптотическую траекторию) системы (2), то в модели (1) существует решение типа «бегущий импульс», причем форма импульса определяется формой w^u в G .

Введем вспомогательную систему A_c , систему (3):

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = (c - bl/c)y - g(x) + z_0, \quad 0. \\ z_0 = \text{const} \geq (3)$$

Пусть $b < b_m \equiv (1-n^2)(4l)^{-1}$. Тогда $g(x)$ имеет два экстремума ($g_{\max} > 0$ и $g_{\min}$). При

$$z_0 \in]g_{\min}, g_{\max}[$$

система A_c имеет три состояния равновесия

$$O_i^c(x_i^c, 0), i = 1, 2, 3, \text{ где } x_1^c (x_1^c < x_2^c < x_3^c)$$

— корни уравнения

$$z_0 - g(x) = 0, \quad (4)$$

O_1^c и O_3^c — седла, O_2^c — фокус или узел, устойчивый (при $c > \sqrt{bl}$), неустойчивый (при $c < \sqrt{bl}$) или центр (при $c = \sqrt{bl}$). В области параметров системы A_c построим (аналитически) бифуркационные множества $c = c^+(z_0, b, l, n)$ и $c = c^-(z_0, b, l, n)$, отвечающие существованию в фазовом пространстве системы A_c связки сепаратрис $O_1^c \rightarrow O_3^c$ и $O_3^c \rightarrow O_1^c$ соответственно. Введем функцию

$$a(p, q, k, \xi) = (p + qe^{-k\xi}) / (1 + e^{-k\xi}).$$

(Здесь p, q, k — некоторые функции, зависящие от параметров системы (3)). Несложно видеть, что

$$a(p, q, k, \xi \rightarrow -\infty) \rightarrow q \quad a(p, q, k, \xi \rightarrow \infty) \rightarrow p, \\ \text{если } k > 0; \\ a(p, q, k, \xi \rightarrow -\infty) \rightarrow p \quad a(p, q, k, \xi \rightarrow \infty) \rightarrow q, \\ \text{если } k < 0. \quad (5)$$

Если удастся подобрать (p, q, k) , чтобы подстановка $x(\xi) = a(p, q, k, \xi)$ обращала систему A_c при любом ξ в тождество, то такое $x(\xi)$ — решение A_c . А если при этом удастся удовлетворить условиям (6):

$$q = x_1^c, p = x_3^c, \quad (6)$$

то решение

$$\begin{cases} x(\xi) = a(p, q, k, \xi) = \frac{x_3^c + x_1^c e^{-k\xi}}{1 + e^{-k\xi}} \\ y(\xi) = \dot{x}(\xi) = \frac{ke^{-k\xi}(x_3^c - x_1^c e^{-k\xi})}{(1 + e^{-k\xi})^2} \end{cases}, \quad \xi \in]-\infty, +\infty[\quad (7)$$

в фазовом пространстве системы A_c и будет соответствовать связке сепаратрис $O_1^c \rightarrow O_3^c$ (при $k > 0$) и $O_3^c \rightarrow O_1^c$ (при $k < 0$)¹. Подстановка (7) в (3) дает уравнение, которое обращается в тождество для $\xi \in]-\infty, +\infty[$ при одновременном выполнении четырех условий:

$$p^3 - (1+n)p^2 + (n+bl)p + z_0 = 0, \quad (8.1)$$

$$q^3 - (1+n)q^2 + (n+bl)q + z_0 = 0, \quad (8.2)$$

$$k = \pm \sqrt{((1+n)(p+q) - n - bl - 3pq)/2}, \quad (8.3)$$

$$2\left(c - \frac{bl}{c}\right)k(p-q) - (1+n)(p^2 + q^2 + 4pq) + \\ + 3(pq + n + bl)(p+q) + 6z_0 = 0. \quad (8.4)$$

Условия (8.1)–(8.2) — не что иное, как уравнение (4), и, следовательно, (6) выполняется автоматически. Таким образом, условия (8.1–8.4) в области параметров системы A_c определяют бифуркационные множества $c = c^+(z_0, b, l, n)$ и $c = c^-(z_0, b, l, n)$, (см. рис. 1 а), отвечающие существованию в фазовом пространстве системы A_c связки сепаратрис $O_1^c \rightarrow O_3^c$ и $O_3^c \rightarrow O_1^c$ соответственно.

Рассмотрим некоторые свойства системы (2).

Утверждение 1

Сепаратриса w_2^u (сепаратриса, принадлежащая w^u , выходящая в область $x < 0$) образовать гомоклиническую траекторию не может.

Рассмотрим область фазового пространства

$$\widehat{G}^3: \{x < 0, y < 0, z < 0\}.$$

Сепаратриса w_2^u входит в $\widehat{G}^3$ через $O^1(0, 0, 0)$. Всюду в $\widehat{G}^3$ для траекторий системы (2) выполняются неравенства

$$\dot{x} < 0, \quad \dot{y} < 0, \quad c\dot{z} < 0,$$

и, следовательно, сепаратриса w_2^u уходит на бесконечность, не выходя из $\widehat{G}^3$.

Утверждение 2

Сепаратриса w_1^u (сепаратриса, принадлежащая w^u , выходящая в область $x > 0$) образовать гомоклиническую траекторию при $b > (1-n)^2(4l)^{-1}$ не может.

¹ Случай $k = 0$ соответствует ситуации, когда $a(p, q, k, \xi) = (p+q)/2$, и подстановка в (7) не дает решения, за исключением вырожденного случая $x_2^c = (x_1^c + x_3^c)/2$.

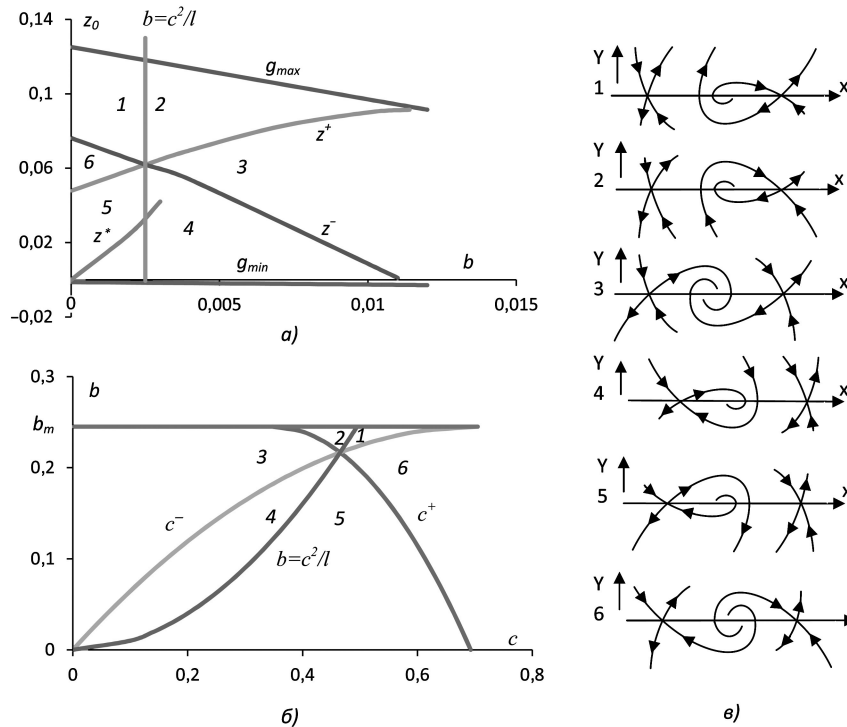


Рис. 1. Сечение бифуркационного множества и соответствующие фазовые портреты: а) системы A_c ($l, n, c = \text{const}$); б) системы A_c^0 ($l, n = \text{const}$); в) 1, 2, 3, 4, 5, 6 — варианты топологии фазового пространства систем A_c и A_c^0 в соответствующих областях параметров рис. 1 а и б

Рассмотрим область фазового пространства

$$\widehat{G}^1: \{x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

Сепаратриса w_1^u входит в $\widehat{G}^1$ через $O^1(0, 0, 0)$. Всюду в $\widehat{G}^1$ для траекторий системы (2) выполняются неравенства

$$\dot{x} > 0, \quad \dot{y} > 0, \quad c\dot{z} > 0,$$

и, следовательно, сепаратриса w_1^u уходит на бесконечность, не выходя из $\widehat{G}^1$.

Утверждение 3

Сепаратриса w_1^u при

$$d^1: \{b < (1 - n)^2 / (4l), c > c^+(z_0, b, l, n)\}$$

не может образовать гомоклиническую траекторию.

Рассмотрим взаимную ориентацию в G векторных полей системы (2) и системы A_c^0 (системы A_c при $z_0 = 0$)². Для этого введем R_1 :

$$R_1 \equiv \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\text{система (2)}} - \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\text{система } (A_c^0)} = \frac{z}{y}.$$

Выделим в G область $G^2: \{x \geq 0, y \geq y^*(x), z \geq 0\}$. Здесь $y^*(x)$ – сепаратриса $\widetilde{w}_1^u$ состояния равновесия $\widetilde{O}_1(0, 0)$ системы A_c^0 , выходящая в область $x > 0, y > 0$. В d^1 сепаратриса $\widetilde{w}_1^u$, «выходя» из точки $\widetilde{O}_1$ системы A_c^0 , уходит на бесконечность в 1-м квадранте, не пересекая прямую $y = 0$. Рассмотрим ориентацию векторного поля системы (2) на границе $G^2: \delta G^2$, вне O_1 :

$$\dot{z}|_{z=0} > 0; \quad \dot{x}|_{x=0} > 0; \quad R_1|_{y=y^*(x)} > 0.$$

Следовательно, траектории системы (2) пересекают δG^2 трансверсально вовнутрь G^2 . Сепаратриса w_1^u (системы (2)) локально входит в G^2 «через» O_1 . Выйти из G^2 она могла бы только в O_1 с координатой $x = 0$. Однако в G^2 координата $y > 0$ (а $y = \dot{x}$), сле-

ратрис системы A_c^0 , полученные из решения (8.1)–(8.4) для случая $z_0 \equiv 0$:

$$c^+|_{z_0=0} = \frac{T}{2} + \sqrt{\frac{T^2}{4} + bl}; \quad c^-|_{z_0=0} = \frac{T}{2} - \sqrt{\frac{T^2}{4} + bl},$$

$$\text{где } T = \left[1 - 4n + n^2 - 6bl + (1 + n)\sqrt{(1 - n)^2 - 4bl} \right] / \left[2\sqrt{1 + n^2 - 2bl + (1 + n)\sqrt{(1 - n)^2 - 4bl}} \right].$$

² На рис. 1 б показан вид элементов бифуркационного множества и характерные фазовые портреты системы A_c^0 . На плоскости параметров (b, c) , ($l, n = \text{const}$) приведены линии $c^+(b), c^-(b)$, отвечающие существованию связок сепаратрис

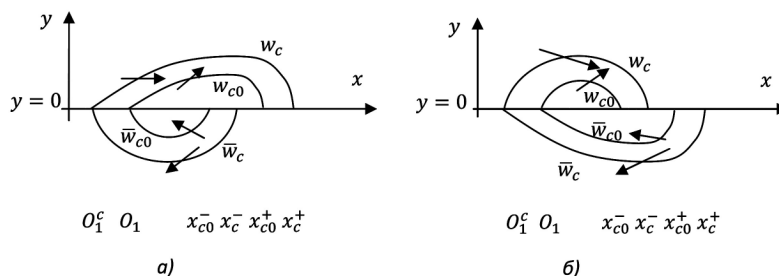


Рис. 2. Сечения плоскостью $z = \text{const}$ «русел», образованных сепаратрисами состояний равновесия O_1^c и O_1 систем A_c и A_c^0 (соответственно), которые в некоторой части G «мажорируют» соответствующие многообразия состояния равновесия O_1 системы (2)

довательно координата x сепаратрисы монотонно растет с ростом ξ от $x = 0$ и сепаратриса, оставаясь в G^2 , уходит на бесконечность и образовать гомоклиническую траекторию не может. Таким образом, гомоклиническую траекторию может образовать сепаратриса w_1^u в области параметров

$$\hat{d} = d \cap \{b < (1 - n)^2(4l)^{-1}\} \cap \{c < c^+(z_0 = 0, b, l, n)\}.$$

На рис. 1 а показан вид бифуркационного множества и характерные фазовые портреты системы A_c . На плоскости параметров (b, z_0) , $(c, l, n = \text{const})$ приведены линии $z^+(b)$, $z^-(b)$, отвечающие существованию связи сепаратрис $O_1^c \rightarrow O_3^c$ и $O_3^c \rightarrow O_1^c$ (соответственно) системы A_c , полученные из решения (8.1)–(8.4) для фиксированных c, l, n . Построим в G четыре цилиндрические поверхности $w_c, w_{c0}, \bar{w}_c, \bar{w}_{c0}$ с образующими, параллельными оси z (рис. 2): поверхность w_c (w_{c0}) образована частью неустойчивой сепаратрисы, выходящей в область $y > 0$ состояния равновесия O_1^c (O_1) системы A_c (A_c^0) до первого (после O_1^c (O_1)) пересечения с плоскостью $y = 0$ по координате $x = x_c^+$ ($x = x_{c0}^+$); поверхность $\bar{w}_c$ ($\bar{w}_{c0}$) образована частью устойчивой сепаратрисы, приходящей из области $y < 0$ состояния равновесия O_1^c (O_1) системы A_c (A_c^0) от последнего (перед O_1^c (O_1)) пересечения с плоскостью $y = 0$ по координате $x = x_c^-$ ($x = x_{c0}^-$). В качестве z_0 для A_c выберем $z^+(b)$ (при $b < c^2/l$) и $z^-(b)$ (при $b \geq c^2/l$) и систему A_c будем обозначать A_c^+ и A_c^- соответственно. (Мы получили «русла», которые, как будет показано далее, в некоторой части G «мажорируют» соответствующие многообразия состояния равновесия O_1 системы (2).)

Обозначим через точку $E^*(x^* > 0, 0, z^*)$ «первую» точку пересечения w_1^u (сепаратриса состояния равновесия O_1 системы (2), выходящая в область $x > 0$) с плоскостью $y = 0$ (если такая существует.

Заметим, что в этом случае z^* — максимальное значение координаты w_1^u на участке от O_1 до первого пересечения с плоскостью $y = 0$). Сформулируем следующие условия 1, 2.

Условие 1

В области параметров d при $(c, l, n = \text{const})$ существуют такие b_1 и b_2 ($0 < b_1 < c^2/l < b_2$), что z -координата точки $E^*: z^*(b)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} 0 < z^*(b) < z^+(b) & \text{ при } b_1 \leq b < c^2/l, \\ 0 < z^*(b) < z^-(b) & \text{ при } c^2/l \leq b \leq b_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Условие 2

В области параметров d ($c, l, n = \text{const}$) существуют такие b_1 и b_2 ($0 < b_1 < c^2/l < b_2$), что для систем A_c^-, A_c^+ и A_c^0

$$\begin{aligned} x_c^- & \leq x_{c0}^+, \text{ при } b = b_1, \\ x_c^+ & \leq x_{c0}^-, \text{ при } b = b_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Докажем следующее утверждение.

Утверждение 4

Если в области параметров d при $(c, l, n = \text{const})$ существует интервал $[b_1, b_2]$ такой, что на всем этом интервале справедливо Условие 1, а на его границах справедливо Условие 2, то существует хотя бы одно значение $b^* \in]b_1, b_2[$, которому соответствует двоякоасимптотическая к O_1 траектория системы (2) в G .

Оценим сначала координаты точки E^* . Для этого введем в G область G^+ , ограниченную поверхностями $\delta G_i^+, i = 1, \dots, 6$ (все параметры системы (2), кроме b , считаем фиксированными)

$$\begin{aligned}
\delta G_1^+ &: \{x = 0, 0 \leq y < y - \text{координаты} \\
&\quad w_c|_{x=0}, 0 < z < \min(z^-(b), z^+(b))\}, \\
\delta G_2^+ &: \{x > 0, y > 0, z = 0\}, \\
\delta G_3^+ &: \{x > 0, y > 0, z = \min(z^-(b), z^+(b))\}, \\
\delta G_4^+ &: \{x_{c0}^+ < x < x_c^+, \\
&\quad y = 0, 0 < z < \min(z^-(b), z^+(b))\}, \\
\delta G_5^+ &: \{x > 0, y = y - \text{координате } w_c, \\
&\quad 0 < z < \min(z^-(b), z^+(b))\}, \\
\delta G_6^+ &: \{x > 0, y = y - \text{координате } w_{c0}, \\
&\quad 0 < z < \min(z^-(b), z^+(b))\}.
\end{aligned}$$

Сепаратриса w_1^u локально в окрестности $O_1(0, 0, 0)$ входит в G^+ . (Это следует, например, из того, что она «выходит» из координаты $x = 0$ в область $x > 0$, следовательно

$$y(=\dot{x}) > 0 \text{ и } z > 0 \text{ (т. к. } \dot{z} = F(x)|_{x>0} > 0),$$

и ориентация векторного поля системы (2) на δG_6^+ такова, что $R_2|_{x>0, y>0} > 0$, про R_2 — ниже.)

Покажем, что при выполнении Условия 1 и $b \in [b_1, b_2]$ сепаратриса w_1^u выйти из G^+ может только через границу по плоскости $y = 0$ через δG_4^+ . Действительно,

- 1) траектории системы (2) пересекают δG_1^+ вне O_1 вовнутрь G^+ , согласно первому уравнению системы (2) и, следовательно, сепаратриса w_1^u покинуть G^+ через δG_1^+ не может;
- 2) сепаратриса w_1^u покинуть G^+ через δG_2^+ не может, т. к., согласно третьему уравнению системы (2), z -координата сепаратрисы в G^+ монотонно увеличивается от нуля;
- 3) сепаратриса w_1^u не пересекает поверхность δG_3^+ согласно Условию 1;
- 4) рассмотрим наклон векторного поля системы (2) на δG_5^+ и δG_6^+ . На δG_6^+ ориентация векторного поля системы (2) такова, что $R_1 > 0$, следовательно, траектории системы (2) пересекают δG_6^+ вовнутрь G^+ и поэтому сепаратриса w_1^u покинуть G^+ через δG_6^+ не может;
- 5) рассмотрим наклон векторного поля системы (2) на δG_5^+ .

Для этого введем

$$\begin{aligned}
R_2 &= \\
&= \left[\frac{dy}{dx} \right]_{\text{система (2)}} - \frac{dy}{dx} \Big|_{\text{система } A_c^+} = \frac{z - z^+(b)}{y} \text{ при } b < \frac{c^2}{l}, \\
&= \left[\frac{dy}{dx} \right]_{\text{система (2)}} - \frac{dy}{dx} \Big|_{\text{система } A_c^-} = \frac{z - z^-(b)}{y} \text{ при } b \geq \frac{c^2}{l}.
\end{aligned}$$

При выполнении Условия 1 $R_2|_{\delta G_5^+} < 0$. Следовательно, все траектории системы (2) пересекают δG_5^+

вовнутрь G^+ и поэтому сепаратриса w_1^u покинуть G^+ через δG_5^+ не может.

Поскольку в G^+ нет притягивающих множеств (это следует хотя бы из монотонности изменения z -координаты траекторий системы (2) в G^+ : $\dot{z} > 0$), и сепаратриса w_1^u покидает G^+ , то произойти это может (при выполнении Условия 1) только через δG_4^+ . В силу этого для координат точки $E^*(x^*, 0, z^*) \in w_1^u$ — точки пересечения сепаратрисы w_1^u с плоскостью $y = 0$, справедливо следующее:

$$\begin{aligned}
x_{c0}^+ &< x^* < x_c^+, \\
0 &< z^* < \min(z^-(b), z^+(b)).
\end{aligned}$$

Введем в G область G^- , ограниченную поверхностями $\delta G_i^-, i = 1, \dots, 5$:

$$\begin{aligned}
\delta G_1^- &: \{x > x_1^c, y < 0, z = 0\}, \\
\delta G_2^- &: \{x > x_1^c, y < 0, z < \min(z^-(b), z^+(b))\}, \\
\delta G_3^- &: \{0 \leq x < x_{c0}^-, y = y - \text{координате } \bar{w}_{c0}, \\
&\quad z = \min(z^-(b), z^+(b))\}, \\
\delta G_4^- &: \{x_1^c \leq x < x_c^-, y = y - \text{координате } \bar{w}_c, \\
&\quad z = \min(z^-(b), z^+(b))\}, \\
\delta G_5^- &: \{x_{c0}^- \leq x \leq x_c^-, y = 0, \\
&\quad 0 < z < \min(z^-(b), z^+(b))\}
\end{aligned}$$

Рассмотрим ориентацию векторного поля системы (2) на δG_3^- и δG_4^- :

$$\begin{cases} R_1|_{\delta G_3^-} < 0, \\ R_2|_{\delta G_4^-} > 0. \end{cases}$$

Следовательно, траектории системы (2) пересекают δG_3^- и δG_4^- из G^- наружу (см. рис. 2 а) Поэтому, часть w_1^s , приходящая в $O_1(0, 0, 0)$ из области $y < 0$, в интервале по координате

$$z \in]0, \min(z^-(b), z^+(b))[,$$

мажорируется поверхностями δG_3^- и δG_4^- и выходит из G^- через поверхность δG_5^- . Таким образом, w_1^s пересекает полосу $\delta G_0: \{y = 0, 0 < z < \min(z^-(b), z^+(b))\}$ в диапазоне координат $x \in]x_{c0}^-, x_c^-]$.

Итак, при выполнении Условия 1 и Условия 2:

- 1) сепаратриса w_1^u пересекает полосу δG_0 в точке $E^*(x^* > 0, 0, z^*)$, при чем $x^* \in]x_{c0}^+, x_c^+]$;
- 2) w_1^s пересекает полосу δG_0 по линии $h(x_h, y = 0, z_h)$, «соединяя» прямые $\{y = 0, z = 0\}$ и $\{y = 0, z = \min(z^-(b), z^+(b))\}$ с x -координатой $h: x_h \in]x_{c0}^-, x_c^-]$;
- 3) при $b = b_1$ точка E^* на полосе δG_0 находится справа от линии h , а при $b = b_2$ — слева;
- 4) на всем интервале $b \in [b_1, b_2]$ на полосе δG_0 существуют E^* и линия h .

Следовательно, при непрерывном изменении b от b_1 до b_2 (при выполнении условий 1, 2) обязательно найдется хотя бы одно значение $b^* \in [b_1, b_2]$, при котором E^* «ляжет» на h , т. е. при этом наборе параметров в фазовом пространстве G системы (2) образуется гомоклиническая траектория состояния равновесия $O_1(0, 0, 0)$. Утверждение 4 доказано.

Осталось выделить область параметров системы (2), в которой выполняются Условие 1 и Условие 2. К сожалению, аналитически этого сделать не удалось, поэтому поиск осуществлялся при помощи численного моделирования. На рис. 1 а для $c = 0.1, l = 4, n = 0.1$ на плоскости (b, z) приведены зависимости:

- а) $z^-(b), z^+(b)$ — получены из уравнений (8.1–8.4).
- б) $z^*(b)$ — z -координата точки E^* — моделирование системы (2).

Из рис. 1 а видно, что Условие 1 выполняется на интервале, например, $b \in [0, 0.0032]$. Выберем $b_1 = 10^{-8}, b_2 = 0.0032$. Численное исследование сепаратрис двумерных систем $A_c^{+,-}$ и A_c^0 подтверждают справедливость Условия 2 для b_1 и b_2 . Таким образом, для конкретного набора значений $\{c, l, n\}$ доказано существование гомоклинической траектории в системе (2).

Замечание

Варьируя набор $\{c, l, n\}$, можно получить пространство параметров, для которых таким образом можно доказать существование гомоклинической траектории. Если есть необходимость «увеличить» эту область параметров, можно использовать более «мягкий вариант» условий 1, 2, выбрав в качестве системы сравнения $A_c^{+,-}$ систему A_c с z_0 , удовлетворяющим следующему условию:

$$z_0 = (1 + e)\tilde{z}^* < \min(z^-(b), z^+(b)),$$

где $\tilde{z}^* = \max(z^*(b_1 < b < b_2)), 0 < e \ll 1$.

Легко показать, что с уменьшением z_0 уменьшаются значения x_c^+, x_c^- . Что касается самого доказательства Утверждения 4, то, при «мягком» варианте Условия 2, в нем (доказательстве) достаточно всюду (на поверхностях, в выражениях) заменить величину $\min(z^-(b), z^+(b))$ на $z_0 = (1 + e)\tilde{z}^*$.

Утверждения 1–3 позволяют существенно сократить область параметров для поиска бифуркационного множества $\tilde{\Pi}$, соответствующего существованию в G двоякоасимптотической траектории состояния равновесия $O_1(0, 0, 0)$ ³. Численное построение

$\tilde{\Pi}$ проводилось при помощи алгоритма, описанного в [10, 11]. Этот алгоритм основан на использовании конических поверхностей $V(x, y, z) = 0$ в G , пересекаемых траекториями системы (2) трансверсально в одну сторону (поверхностей Ляпунова).

На рис. 3 приведено сечение Π множества $\tilde{\Pi}$ плоскостями $l = \text{const}, n = \text{const}$. Множество Π примыкает к оси $b = 0$ в точках $B^1(0, 0)$ и $B^2(0, c_{\max})$. Гомоклиническая траектория в окрестности B^1 «отрождается» от петли сепаратрисы двумерной консервативной системы на плоскости $z = 0$, соответствующей собственному B^1 . Гомоклиническая траектория в B^2 устроена более сложно. Она «склеена» из 4-х интегральных траекторий. Возможно два случая для $b = 0$, выбранных n, l и полученного $c_{\max}$:

- 1) существует $z_1^0 = z^-(b = 0, l, c = c_m) < g_{\max}(b = 0, l, n)$, соответствующее связке сепаратрис $O_3^c \rightarrow O_1^c$ системы A_c ;
- 2) такого z_1^0 не существует.

Для случая 1) гомоклиническая траектория составлена из следующих частей:

- а) расположенная на плоскости $z = 0$ сепаратрисная связка системы $A_c^0: O_1^c \rightarrow O_3^c$;
- б) линия r_1 :

$$\{z = g(x), x \in [x_c^-, x_{c0}^- \equiv 1], y = 0, z \in [0, z_1^0]\};$$

- в) расположенная на плоскости $z = z_1^0$ сепаратрисная связка системы $A_c: O_3^c \rightarrow O_1^c$;

- г) линия $r_2: \{z = g(x), x \in [\bar{x}_1, 0], y = 0, z \in [0, z_1^0]\}$.

Для случая 2) z_1^0 везде заменяется на $g_{\max}(b = 0, l, n)$, а на плоскости $z = g_{\max}(b = 0, l, n)$ имеется приходящая из узловой области седлоузла O_3^c сепаратриса седла O_1^c . Таким образом, получаем склейку, состоящую из двух сепаратрисных связок на плоскостях $z = 0$ и $z = z_1^0$ (случай 1) или сепаратрисной связки на $z = 0$ и сепаратрисы седла O_1^c на плоскости $z = g_{\max}(b = 0, l, n)$ (случай 2) и двух линий r_1 и r_2 , составленных из седловых состояний равновесия двумерных систем на плоскостях $z = \text{const}$. В окрестности B^2 гомоклиническая траектория отрождается от этой «четырёхкусочной склейки» и по форме в фазовом пространстве G и по

$\equiv (1 - n)^2(4l)^{-1}, c < c^+(z_0 = 0, b, n, l)$. Значение $c^+(\cdot)$ можно получить из решения (8.1)–(8.4) для случая $z_0 \equiv 0$ (см. [2]). В качестве оценки $c^+(\cdot)$ можно воспользоваться величиной $c_{\max} \equiv \frac{1-2n}{\sqrt{2}} = \max(c^+(z_0 = 0, b, n, l))$ в области d .

⁴ При $b = 0$ O_3^c имеет координаты $(1, 0, 0)$.

⁵ Координаты точек $O_3^c(\bar{x}_3, 0, z_1^0)$, $O_1^c(\bar{x}_1, 0, z_1^0)$,

где $\bar{x}_i (i = 1, 2, 3)$ — корни уравнения.

$f(\bar{x}_i) = z_1^0, \bar{x}_1 < 0 < \bar{x}_2 < \bar{x}_3$

³ Напомним, что, согласно Утверждениям 2 и 3, $\tilde{\Pi}$ может быть расположена лишь в той части d , где $b < b_{\max} \equiv$

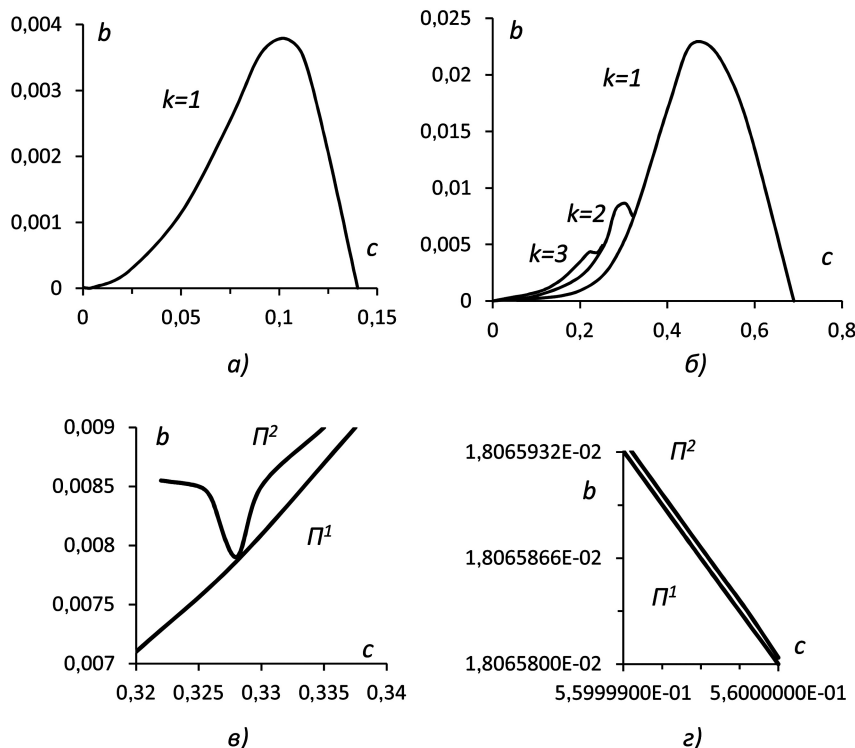


Рис. 3. Элементы бифуркационного множества, соответствующие петле сепаратрисы системы (2) для разного набора параметров в случае а и б-а. Графики в и г — увеличенные в окрестностях точек B^3 и B^4 «области» рисунка б

характеру движения изображающей точки эта траектория близка к ней.

Множество Π «бывает» двух типов. В первом случае — (рис. 3 а) — это гладкая кривая, примыкающая, как уже указывалось, к оси $b = 0$ в точках $B^1(0, 0)$ и $B^2(0, c_{\max})$. Для $b < b_{\max}(l, n)$ имеется два значения параметра c : c_s и c_q ($0 < c_s < c_q \leq c^+(z_0 = 0, b, n, l)$) — «медленный» и «быстрый» импульсы в системе (1). Такой «простой» вид кривая Π имеет в случае, если она вся лежит в области параметров системы (2), когда $O_1(0, 0, 0)$ является седлом

$$(\Theta \equiv -(c - blc^{-1})^2(n + bl)^2 - 4(n + bl)^3 + 4(c - blc^{-1})^3 bc^{-1}(1 + nl) + 18(c - blc^{-1})(n + blbc^{-1} - 11 + nl - 271 + nlb3c - 3 < 0).$$

Форма решений здесь тоже проста — от солитонобразной (с одним «горбом» в окрестности B^1 при движении вдоль Π она плавно меняется до релаксационной в окрестности B^2).

Во втором случае (рис. 3 б, $n = 0.01, l = 3$) также имеется гладкая кривая $B^1B^2 - \Pi^1$, точкам которой соответствуют «одногорбые» импульсы ($k = 1$). Но на ней появляются точки B^3 и B^4 , разбивающие Π на три части. Участки кривой B^1B^3 и B^4B^2 лежат в области параметров, в которой $O_1(0, 0, 0)$ — седло

($\Theta < 0$). Участок B^3B^4 — назовем его Π_c^1 — проходит в области параметров, в которой $O_1(0, 0, 0)$ — седло-фокус ($\Theta > 0$) с положительной седловой величиной ($\Sigma = m_1 + \text{Re } m_{2,3} > 0$). (Здесь μ_1 — действительный, $\mu_{2,3}$ — комплексно-сопряженные корни характеристического уравнения системы (2) в $O_1(0, 0, 0)$). Из [12] следует, что в этом случае в окрестности Π^1 существует счетное множество бифуркационных кривых, соответствующих «петлям» сепаратрисы w_u^1 (гомоклинической траектории) возрастающей обходности (такая «петля» имеет не один, а несколько участков прохождения своей расширенной окрестности). В частности, к точкам B^3 и B^4 должен примыкать (сверху от Π^1) пучок кривых $\{\Pi_j^2\}_{j=1}^{\infty}$. Такая кривая соответствует двугорбому импульсу. В свою очередь в окрестности Π^2 имеется множество кривых Π^3, Π^4 и т. д. Таким образом, на плоскости (c, b) существуют элементы множества Π , которым соответствуют сложные импульсы с любым числом «горбов». Такой импульс имеет некоторое число «больших» максимумов (их количество равно обходности соответствующей гомоклинической траектории), участки между которыми заполнены как монотонными линиями, так и «малыми» осцилляциями (импульсы, имеющие та-

кую форму, принято называть стохастическими или импульсами хаотического профиля). Некоторые элементы множества Π^k ($k = 2, 3$) приведены на рис. 3 б, в, г). На форму импульсов Π^i накладывает отпечаток близость соседних кривых Π^j .

На падающем участке Π^1 в окрестности точки B^4 также существуют элементы множества Π^k с $k = 2, 3, \dots$. Однако построить эти «элементы» численно даже с использованием приведенного в [11] алгоритма не удалось. Связано это в первую очередь с высокой скоростью разбегания фазовых траекторий в некоторых областях фазового пространства G . Нисходящий участок Π^1 «втыкается» в точку B^2 , в которой, как указывалось ранее, петля сепаратрисы образована склейкой из 4 участков, два из которых: r_1 и r_2 «составлены» из седловых состояний равновесия O_3^c , O_1^c систем A_c . При $b > 0$ в окрестности точки B^2 участки гомоклинической траектории, соответствующие $r_{1,2}$ (назовем их $\tilde{r}_{1,2}$) «помнят» седловой характер $r_{1,2}$. Вместе с этим скорость движения по $\tilde{r}_{1,2}$ пропорциональна b и может быть очень мала. Поэтому фазовые траектории в окрестности $\tilde{r}_{1,2}$ обладают высокой чувствительностью к параметрам системы. Используемый алгоритм построения бифуркационного множества позволяет определять параметры, соответствующие гомоклиническим траекториям, не доводя саму траекторию в малую окрестность O_1^c и элементы падающего участка Π^1 строит легко. Однако для построения -обходной петли в G участки в окрестности $\tilde{r}_{1,2}$ необходимо пройти k раз. Конечное количество значащих цифр числа в компьютере и накапливаемая ошибка интегрирования не позволяют решить проблему «лобовым» моделированием. Хотя понятно, что счетное множество кривых Π^k с $k > 1$ очень сильно здесь прижаты к Π^1 (см. рис. 3 г).

Заключение

Для одной из базовых моделей типа «реакция—диффузия», описывающей динамику объектов различной природы (физической, химической, биологической, социальной, экономической), для системы уравнений ФитцХью—Нагумо приведено аналитическое доказательство существования решений в форме импульсов сложного (хаотического) профиля. Аналитически выделены области параметров модели, где существуют такие решения и численно по-

строены элементы, точкам которых эти решения соответствуют. Решения в форме импульсов сложного профиля могут описывать широкий спектр явлений — от распространения информации, формирования шоков (например, землетрясения или цен на финансовые активы и т. д.) до динамики социально-экономических процессов.

Автор благодарен профессору В. И. Некоркину за полезные обсуждения.

Литература

1. FitzHugh R. Mathematical models of excitation and propagation in nerve. Biological Engineering // Schwan H. P. (ed.) New York, McGraw-Hill, 1969, pp. 1–85.
2. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An Active Pulse Transmission Line Simulating Axon. Proc. IRE. V. 50. 1962, pp. 2061–2070.
3. Некоркин В. И. Нелинейные колебания и волны в нейродинамике // УФН. 2008. Т. 178. № 3. С. 313–323.
4. Nekorkin V. I., Dmitrichev A. S., Bilbault J. M., Binczak S. Polymorphic and regular localized activity structures in a two-dimensional two-component reaction-diffusion lattice with complex threshold excitation // Physica D. 2010. Vol. 239. No 12. P. 972–987.
5. Lucheroni C. Stochastic models of resonating markets // Journal of Economic Interaction and Coordination, Springer. V. 5(1), 2010, pp. 77–88.
6. Bracken A. J., Tuckwell H. C. Simple Mathematical Models for Urban Growth, Proc. Mathematical and Physical Sciences, The Royal Society Publishing. V. 438, No 1902, 1992, pp. 171–181.
7. Мазуров М. Е. О конкурентной динамике в распределенных экономических системах // Экономика, статистика и информатика. 2011. № 2. С. 191–195.
8. Некоркин В. И. Бегущие импульсы в двухкомпонентной активной среде с диффузией // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 1. С. 41–52.
9. Hastings S. P. On Existence of Homoclinic and Periodic Orbits for the FitzHugh-Nagumo Equations // Quart. J. Math. Oxford. 1976. Vol. 27. P. 123–134.
10. Максимов А. Г. Фронты и солитонные пакеты в мультистабильных распределенных системах: Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук / А. Г. Максимов. Нижний Новгород: ННГУ, 1993. 20 с.
11. Максимов А. Г. О численном построении двоякоасимптотических траекторий в фазовом пространстве динамических систем // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2. № 1. С. 43–51.
12. Шильников Л. П. К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус // Матем. сб. 1970. Т. 81(123). № 1. С. 92–103.

Максимов Андрей Геннадьевич. Профессор НИУ ВШЭ — Нижний Новгород, к. ф.-м. н. Окончил Горьковский государственный университет им. Н. И. Лобачевского в 1983 г. Количество печатных работ: 55, в т. ч. 1 монография. Область научных интересов: динамические системы, качественная теория дифференциальных уравнений, пространственно-временной хаос, численное моделирование, эконометрический анализ. E-mail: amaksimov@hse.ru