Оценка эффективности производственных и инфраструктурных подсистем

Оценка эффективности деятельности производственных систем: формирование технологических детерминант с использованием техники DEA*

Д. В. Бочкарев

Аннотация. Рассматривается возможность применения метода DEA для непараметрического моделирования многопродуктовой функции издержек и построения на ее основе технологических детерминант как оценок эффективности деятельности различных производственных систем. В качестве приложения представляются результаты моделирования оценок эффективности российских железных дорог на начальном этапе их реформирования.

Ключевые слова: *Data Envelopment Analysis (DEA), анализ среды функционирования (АСФ), оценка эффективности, технологические детерминанты, многопродуктовая функция издержек.*

Введение

Целью настоящей статьи является описание одного из подходов к построению технологических детерминант — прежде всего, экономии от масштаба — как оценок эффективности деятельности многопродуктовых производственных объектов.

Эффективность является одной из основных характеристик результативности производственной деятельности. Она также должна учитываться при обосновании принимаемых решений и анализе проводимых преобразований. На максимизации эффективности основывается задача оптимизации деятельности производственных систем, т. е. выбора наилучшего соответствия между используемыми ресурсами и получаемыми результатами. Причем под производственной системой может пониматься как промышленное предприятие, так и фирма, работающая в финансовом секторе, сфере услуг, а также проекты развития или управления функционированием производственного объекта.

Для компаний, работающих в инфраструктурной области и сфере услуг, характерна ситуация экзогенно

* Работа поддержана РГНФ (грант № 12–02–00134).

заданного объема спроса, причем зачастую с требованием его полного удовлетворения и государственным регулированием цен. В этой ситуации уместна задача уменьшения затрат (оптимизации функции издержек), т. е. выбора того способа (или способов) использования ресурсов, который наилучшим образом позволяет получить необходимый результат. Выбор лучшего варианта из ряда альтернатив приводит нас к сравнению их эффективности, для чего необходимо определить множество используемых показателей, систему предпочтений на этом множестве, область допустимых способов производства (технологическую сеть).

При формировании апостериорных оценок эффективности деятельности производственных объектов (т. е. когда речь не идет об анализе и отборе наилучших вариантов инвестиционных проектов) часто опираются на относительные показатели эффективности, такие как рентабельность (продукции, активов и т. д.), характеристики удельных расходов и доходов и другие. В более широком смысле к удельным показателям эффективности относятся и показатели ресурсоемкости (ресурсоотдачи) различной степени агрегации.

В рамках современной экономической теории, начиная с середины XX века, все чаще помимо традиционных подходов используются различные методы «затратного» анализа деятельности производственных объектов. Они особенно актуальны при слияниях или разделениях компаний, когда важна диагностика экономии от масштаба и от структуры многопродуктового выпуска.

К числу методов «затратного» анализа относится эконометрическое исследование одно- и многопродуктовых функций издержек. Однако достаточно трудно найти параметрически определяемую функциональную форму, лишенную каких-либо недостатков. Часто значения технологических детерминант оказываются либо предопределенными, либо принципиально невычислимыми.

В настоящей статье, следуя в значительной мере работам Суеёши (см., например, Sueyoshi T., 1997) рассматривается другой — непараметрический — теоретический подход «затратного» анализа — метод оболочечного анализа данных (Data Envelopment Analysis, DEA, в русскоязычной литературе также встречается название «анализ среды функционирования»). Как известно, этот метод был впервые предложен Чарнсом, Купером и Роудсом (Charnes A., Cooper W. W., Rhodes E., 1978). Их статья дала начало потоку теоретических и прикладных работ за рубежом (см., например, Finn R. Forsund et al., 2007), а в последнее десятилетие и в России (см., например, Кривоножко В. Е., Лычев А. В., 2010). Все дальнейшие рассуждения применимы как для сравнения деятельности одной фирмы в различные временные интервалы, так и для сопоставления множества однотипных компаний в один или несколько периодов времени.

1. Теоретическая модель

Исследуемый производственный объект в период k будем характеризовать вектором[1] затрат $|x_k\rangle \in \mathbf{R}^m_+$ и вектором выпусков $|y_k\rangle \in \mathbf{R}^s_+$. Здесь m — количество используемых ресурсов, s — число видов конечной продукции. Если рассматривается деятельность компании за n временных периодов, то $|x_k\rangle$ — k-й столбец матрицы затрат $X(m\times n)$, $|y_k\rangle$ — k-й столбец матрицы выпусков $Y(s\times n)$. Тогда состояние фирмы в k-й период времени задается точкой в $(m+s)$-мерном пространстве. Отметим, что все компоненты векторов предполагаются неотрицательными.

Непосредственное сравнение вышеописанных точек, исходя из их расположения в пространстве, невозможно, т. к. они соответствуют различным объемам производства и затрат. Очевидно, если $\forall i\ x_k^i \le x_r^i$, $y_k^i \ge y_r^i$ и $\exists j\ x_k^j < x_r^j$ или $y_k^j > y_r^j$, то в период k фирма работала лучше (эффективнее), чем в период r. Однако подобное ранжирование не может охватить все точки и для их сравнения необходимо ввести некоторую систему предпочтений (т. е. существенным становится наличие лица, принимающего решения).

В качестве одного из возможных критериев эффективности будем исследовать отношение

$$\chi_k = \frac{\sum_{j=1}^{j=s} \beta_j y_k^j}{\sum_{i=1}^{i=m} \alpha_i x_k^i} \qquad (1)$$

где α_i и β_j — весовые коэффициенты для компонент соответственно затрат и выпуска.

Если весовые коэффициенты α_i принять равными рыночным ценам на ресурсы p^i, считая их известными, то можно сформулировать задачу минимизации использования ресурсов (input-oriented):

$$\begin{cases} \min_{x,\lambda} \langle p_k | x \rangle \\ |x\rangle \ge X|\lambda\rangle \\ |y_k\rangle \le Y|\lambda\rangle \\ |x\rangle, |\lambda\rangle \ge 0 \end{cases} \qquad (2)$$

[1] Здесь и далее использованы обозначения:
$\langle x|$ — матричная строка из элементов x^i;
$|y\rangle$ — матричный столбец из элементов y^j;
$\langle x|y\rangle$ — скалярное произведение вектора (строки) x на вектор (столбец) y;
$\langle x|A|y\rangle$ — скалярное произведение вектора (строки) x на матрицу A и на вектор (столбец) y;
также под записью, что один вектор больше (меньше) другого, подразумевается, что каждая компонента первого вектора больше (меньше) соответствующей компоненты второго.

В соответствии с результатами исследований Сейфорда и Сролла (Seiford L. H., Thrall R. M., 1990) введем дополнительное ограничение на $\sum\lambda_r$, относящееся к вычислению экономии от масштаба:

$$\begin{cases} \min_{x,\lambda}\langle p_k|x\rangle \\ |x\rangle \geq X|\lambda\rangle \\ |y_k\rangle \leq Y|\lambda\rangle \\ L \leq \langle 1 \quad \dots \quad 1|\lambda\rangle \leq U \\ |x\rangle, |\lambda\rangle \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

Решая данную задачу для каждого временного периода $k = 1, \dots, n$, получим набор оптимальных векторов затрат $|x_k^*\rangle$. При такой постановке задачи были сделаны некоторые предположения.

1. Как уже отмечено выше, спрос (т. е. вектор $|y_k\rangle$) считается заданным экзогенно, поэтому принимать во внимание числитель выражения (1) нет необходимости.

2. Намеренно предполагается возможность того, что вычисляемый оптимальный вариант лежит вне допустимой технологической сети T (см., например, рис. 2). Это оправданно, т. к. сейчас не ставится задача нахождения целевой точки.

$$T = \{(|x\rangle, |y\rangle) \mid |y\rangle \text{ может быть произведен из } |x\rangle\} \tag{4}$$

3. Искомый вектор представляет собой линейную комбинацию статистически наблюдаемых векторов затрат; это возможно, если отдача от масштаба считается равной единице, т. е. если на основании статистических данных выпуск $|y_r\rangle$ требует затрат $|x_r\rangle$, то выпуску $\lambda_r|y_r\rangle$ соответствуют затраты $\lambda_r|x_r\rangle$.

В рамках описываемого подхода не делается каких-либо предположений относительно конкретного вида функции издержек C, внимание сосредотачивается на изучении ее свойств, в частности экономии от масштаба.

$$C(|y\rangle, |p\rangle) = \min_x\{\langle p|x\rangle \mid (|x\rangle, |y\rangle) \in T\} \tag{5}$$

В рамках описываемого подхода предполагается, что множество T — выпукло и что получаемые оптимальные значения $|x_k^*\rangle$ задают кусочно-линейную функцию издержек. При этом вопрос о точности аппроксимации пока не ставится. Для невыпуклого T (см. рис. 2) возможна диктуемая особенностями метода излишне грубая линеаризация и большая удаленность найденных $|x_k^*\rangle$ от T.

$$C(|y\rangle, |p\rangle) = C^*(|y\rangle, |p\rangle) = \langle p|x^*(|y\rangle, |p\rangle)\rangle \tag{6}$$

Под эффективностью (Overall Efficiency / Overall and Scale Efficiency) будем понимать отношения

$$OE_k = \frac{\langle p_k|x_k^*\rangle}{\langle p_k|x_k\rangle} \text{ при } (L, U) = (1,1) \tag{7}$$

$$OSE_k = \frac{\langle p_k|x_k^*\rangle}{\langle p_k|x_k\rangle} \text{ при } (L, U) = (0, \infty) \tag{8}$$

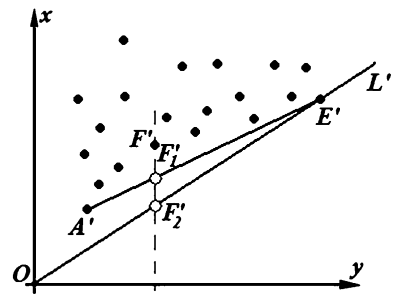

Рис. 1. Иллюстрация варианта с одним входом, одним выпуском и выпуклой технологической сетью

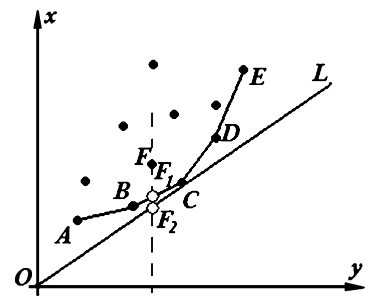

Рис. 2. Иллюстрация варианта с одним входом, одним выпуском и невыпуклой технологической сетью

На рис. 1 ломаная $ABCDE$ соответствует точкам с $OSE = 1$, а линия OL — точкам с $OE = 1$ (Для F целевыми являются соответственно F_1 и F_2). На рис. 2 линия $A'E'$ соответствует точкам с $OSE = 1$, а линия OL' — точкам с $OE = 1$ (Для F' целевыми являются соответственно F'_1 и F'_2).

В однопродуктовом случае экономия от масштаба определяется сравнением величин $C(\lambda y)$ и $\lambda C(y)$, $1 < \lambda < 1 + \varepsilon \ \ \forall\varepsilon > 0$. Показатель экономии от масштаба определяется как

$$\frac{AC(y_k)}{MC(y_k)} = \frac{C(y_k)/y_k}{dC(y_k)/dy} \tag{9}$$

В многопродуктовом случае (при отсутствии вырожденности) Баумоль (Baumol W. J. et al., 1982) определяет уровень экономии от масштаба (Degree of Scale Economies, DSE) как

$$DSE_k = \frac{C(|y_k\rangle)}{\sum_{j=1}^{j=s}\frac{\partial C(|y_k\rangle)}{\partial y^j}y_k^j} = \frac{C(|y_k\rangle)}{\langle\nabla C(|y_k\rangle)|y_k\rangle} = \frac{C^*(|y_k\rangle)}{\langle\nabla C^*(|y_k\rangle)|y_k\rangle} \tag{10}$$

При этом $DSE > 1$ означает растущую экономию от масштаба, $DSE = 1$ — постоянную экономию от масштаба и $0 < DSE < 1$ — убывающую экономию от масштаба.

Как видно из рисунков 1 и 2 в однопродуктовом случае и следует из обобщения на многопродуктовый случай в работе Суеёши (Sueyoshi T., 1997), исходя из решения задачи (3), можно сделать вывод лишь о наличии единичной отдачи от масштаба (при этом $OE = OSE$) либо отсутствии таковой ($OE \neq OSE$). При этом напрямую определить, является ли экономия от масштаба убывающей или возрастающей, невозможно. Поэтому сформулируем двойственную задачу к (3). Функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \langle p_k|x\rangle + \langle v|(X|\lambda\rangle - |x\rangle) - \langle w|(Y|\lambda\rangle - |y_k\rangle) +$$
$$+\sigma_1(L - \langle 1 \quad \dots \quad 1|\lambda\rangle) - \sigma_2(U - \langle 1 \quad \dots \quad 1|\lambda\rangle) =$$
$$= (\langle p_k| - \langle v|)|x\rangle + (\langle v|X - \langle w|Y - \langle 1 \quad \dots \quad 1|\sigma_1 +$$
$$+1 \dots 1|\sigma 2|\lambda + wyk + \sigma 1 L - \sigma 2 U \qquad (11)$$

Тогда, согласно теореме Куна—Таккера, двойственная задача записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \max_{v,w,\sigma_1,\sigma_2}(\langle w|y_k\rangle + \sigma_1 L - \sigma_2 U) - \langle v|X + \\ +\langle w|Y + \langle \sigma_1 \quad \dots \quad \sigma_1| - \langle \sigma_2 \quad \dots \quad \sigma_2| \leq 0 \\ \langle v| \leq \langle p_k| \\ \langle v| \geq 0, \langle w| \geq 0, \sigma_1 \geq 0, \sigma_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (12)$$

Здесь векторы $|v>$ и $|w>$ — двойственные переменные соответственно к первому и второму ограничениям в модели (3); σ_1 и σ_2 — двойственные переменные к ограничениям на сумму λ_r. Первое неравенство в (12) также можно записать в виде: $-\langle v|x_r\rangle + \langle w|y_r\rangle + \sigma_1 - \sigma_2 \leq 0 \; \forall r = 1, \dots, n$.

Соотношение $\langle p_k|x_k^*\rangle = \langle w^*|y_k\rangle + \sigma_1^* L - \sigma_2^* U$ (13)

достигается в точке оптимума[2].

Учитывая, что

$$\langle \frac{\partial C^*}{\partial y^1} \quad \dots \quad \frac{\partial C^*}{\partial y^s}| = \langle w^*| = \langle w^{1*} \quad \dots \quad w^{s*}|, \qquad (14)$$

получаем:

$$DSE_k = \frac{C^*(|y_k\rangle)}{\sum_{j=1}^{j=s} w^{j*} \cdot y_k^j} = \frac{C^*(|y_k\rangle)}{\langle w^*|y_k\rangle}. \qquad (15)$$

Поскольку, согласно (13),

$$C^*(|y_k\rangle) = \langle p_k|x_k^*\rangle = \langle w^*|y_k\rangle + \sigma_1^* L - \sigma_2^* U,$$

то

$$DSE_k = \frac{C^*(|y_k\rangle)}{C^*(|y_k\rangle) - (\sigma_1^* L - \sigma_2^* U)} = \frac{1}{1-\zeta}. \qquad (16)$$

Растущая отдача от масштаба $DSE_k > 1$ достигается при $0 < \zeta < 1$ и $\sigma_1^* > 0$. Постоянная отдача от масштаба $DSE_k = 1$ достигается при $\zeta = 0$ и $\sigma_1^* = \sigma_2^* = 0$. Убывающая отдача от масштаба $DSE_k < 1$ достигается при $\zeta < 0$ и $\sigma_2^* > 0$. Если $\sigma_1^* > 0$, то $\sum\lambda_j^* = L$. Если $U < \sum\lambda_j^* < L$, то $\sigma_1^* = \sigma_2^* = 0$. Если $\sigma_2^* > 0$, то $\sum\lambda_j^* = U$.

Располагая значениями функции издержек и ее первых производных, можно построить не только показатель экономии от масштаба, но и показатель экономии от структуры или, по крайней мере, получить условия его неотрицательности (через приближенно рассчитываемые значения вторых производных). Эта характеристика может оказаться весьма полезной при диагностике производственного объекта на предмет его естественно-монопольного характера.

2. Результаты моделирования

С помощью метода *DEA* автором были воспроизведены вычисления, сделанные Суеёши (Sueyoshi T., 1997) и на основании представленных в указанной статье исходных данных получены аналогичные результаты. Также были проведены оригинальные исследования эффективности деятельности российских железных дорог (тогда МПС) за 48 месячных периодов с 1995 по 1998 гг. Во взятой за основу расчетов статистической информации представлены расходы МПС по основным статьям (фонд оплаты труда, топливо, энергия, материалы и некоторые другие). Следует отметить, что актуальная информация о структуре расходов компании конфиденциальна и отсутствует в открытом доступе. В имеющейся статистике приведены лишь суммарные стоимостные показатели, а не их значения в натуральном измерении и цены, как того требует метод. В расчетах используются среднерыночные цены, в то время как реальные их значения определяются прямыми договорами поставок и могут иметь значительные отклонения. Кроме того, не вполне корректным является дефлирование по индексу ВВП. Поэтому следует обратить внимание лишь на общие полученные закономерности, а не на конкретные значения эффективности.

Некоторые из полученных результатов представлены на графике (см. рис. 3)[3]. Можно наблюдать ярко выраженные колебания, обусловленные сезонными изменениями цен. Следует отметить (это видно также из рисунков 1 и 2), что *OSE* всегда меньше (или равна) *OE*.

Процесс реформирования российских железных дорог, начатый после распада СССР, продолжается и сейчас, однако автор не обладает требуемой статистической информацией за последние годы. Учет такой информации повлечет за собой полный пересчет значений эффективности, в том числе и представленных на рис. 3.

Заключение

В статье показано, каким образом можно формировать характеристики многопродуктовых функций издержек, обходя трудности их непосредственного эконометрического моделирования. В прикладном

[2] Согласно теореме Куна—Таккера оптимальные значения целевых функций прямой и двойственной задач совпадают.

[3] Подробнее см. Бочкарев Д. В., 2011

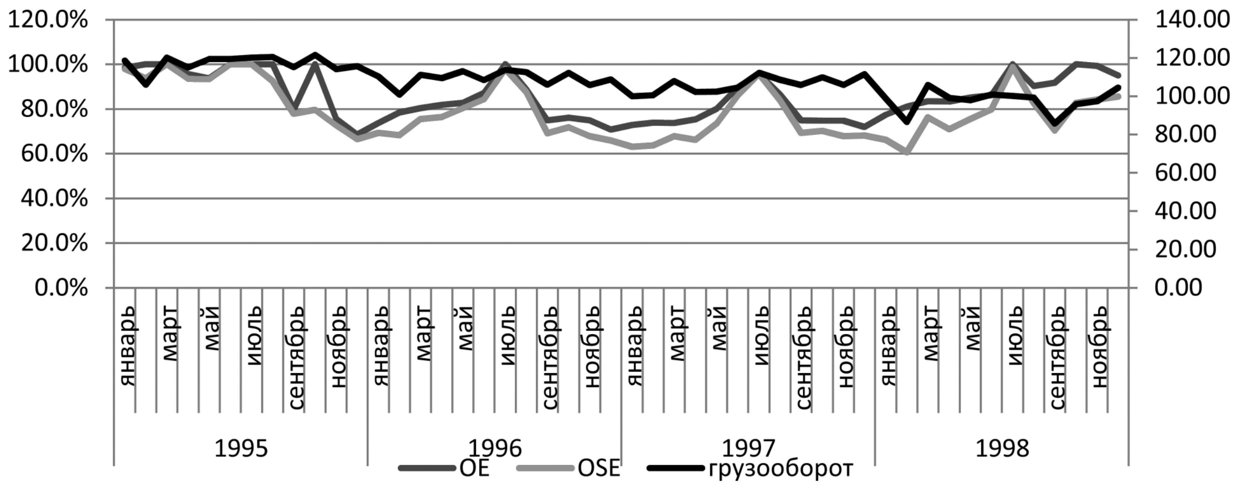

Рис. 3. График расчетных значений эффективности для российских железных дорог

аспекте это особенно полезно для построения оценок эффективности деятельности инфраструктурных подсистем, для которых спрос можно считать экзогенно заданной величиной, если они работают на условиях публичного договора (например, общественный транспорт). Технологические детерминанты также являются важными показателями для выбора наиболее эффективных способов организации производства, оптимизации его структуры.

Литература

1. *Baumol W. J., Panzar J. C., Willig R. D.* Contestable Markets and the Theory of Industry Structure. New York: Harcourt Brace Jovanovich, 1982.
2. *Charnes A., Cooper W. W., Rhodes E.* Measuring the Efficiency of Decision Making Units // European Journal of Operational Research. 1978. V. 2. № 2. P. 429–444.
3. *Forsund F. R., Hjalmarsson L., Krivonozhko V. E., Utkin O. B.* Calculation of scale elasticities in DEA models: direct and indirect approaches // Journal of Productivity Analysis. 2007. № 28. P. 45–56.
4. *Seiford L. H., Thrall R. M.* Recent Developments in DEA: The Mathematical Approach to Frontier Analysis // Econometrics. 1990. № 46. P. 7–38.
5. *Sueyoshi T.* Measuring Efficiencies and Returns to Scale of Nippon Telegraph&Telephone in Production and Cost Analyses // Management Science. 1997. V. 43. № 6. P. 779–796.
6. *Бочкарев Д. В.* Использование техники DEA для оценки эффективности деятельности производственных систем // Труды Четвертой Международной конференции «Системный анализ и информационные технологии» (САИТ-2011). 2011 г.
7. *Кривоножко В. Е., Лычев А. В.* Анализ деятельности сложных социально-экономических систем. М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ имени М. В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2010.

Бочкарев Дмитрий Вячеславович. Аспирант ИСА РАН. Окончил МФТИ в 2010 г. Количество печатных работ: 4. Область научных интересов: оценка эффективности деятельности производственных систем. E-mail: dvbochkarev@gmail.com