Математические модели социально-экономических процессов

Принятие решений при оценке эффективности инвестиционных проектов на основе операционного исчисления*

П. Н. Победаш

Аннотация. В работе предлагается подход, позволяющий получать оценки стоимости инвестиционных проектов, описываемых линейными многошаговыми задачами, обосновывать их разрешимость на бесконечном и конечном горизонтах планирования. Предлагаемый подход использует операционное исчисление, позволяя повысить обоснованность принятия решений при оценке эффективности инвестиционных проектов путем перехода от динамической модели к более простой для анализа агрегированной задаче.

Ключевые слова: *задача оптимального управления, Z-преобразование, инвестиционный проект, экономическая динамика.*

Введение

Современное многономенклатурное производство в условиях конкуренции характеризуется, с одной стороны, действием множества факторов, влияющих на результат деятельности предприятия, а с другой, — возможностью выбора вариантов инвестиционных стратегий. Поэтому зачастую сложно оценить обоснованность и последствия того или иного инвестиционного шага, основываясь лишь на личном опыте и интуиции лица, принимающего решение. При оценке конкретного инвестиционного проекта различают этап его предварительной оценки, на котором в первом приближении определяются требуемые для его реализации инвестиционные ресурсы и эффективность проекта. Если он принимается к осуществлению на первой стадии оценки, то переходят к этапу более детальной проработки проекта. Особая необходимость в обоснованности оценки инвестиционного проекта возникает именно на предварительном этапе, поскольку принятие неэффективного проекта влечет за собой убытки или «замораживание» средств, которые могут быть использованы в более доходных инвестиционных программах. В этой связи актуальной является задача предварительной оценки средне- и долгосрочных проектов реального инвестирования (инвестирования в основные средства производства). При этом в моделях экономической динамики в первую очередь необходимо учитывать, что стоимость большинства материальных и нематериальных активов с течением времени уменьшается в силу физического или морального износа. В экономической практике, как правило, для отражения этого фундамен-

* Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (НИР 2.1.1/2710).

тального факта используются методы дисконтирования по ставке доходности [1]. Кроме того, фактор времени вносит неопределенность как в сами денежные потоки по инвестиционному проекту, так и в его окончательную стоимость. В данной работе на основе Z-преобразования предлагается операционный подход к анализу средне- и долгосрочных инвестиционных проектов, описываемых многошаговой задачей линейного программирования, который существенно учитывает указанные особенности этих проектов.

1. Содержательная постановка задачи

Продемонстрируем указанный подход на следующей задаче инвестиционного анализа [2]. Планируются инвестиции в реальные активы, под которыми понимаются здания, сооружения, машины, оборудование и т. п. В течение заданного горизонта планирования предполагается производить пользующуюся спросом продукцию нескольких видов. При этом известны технико-экономические характеристики активов каждого вида — стоимость, срок службы, производительность, а также стоимость единицы производимой на них продукции. Требуется в каждый момент времени определить суммы инвестиций, выделяемые инвестором на реализацию рассматриваемого инвестиционного проекта в целом и на приобретение активов каждого вида, а также объемы продаж по каждому виду продукции, при которых максимизируется его эффективность по критерию чистой дисконтированной стоимости (NPV).

2. Предпосылки

Предполагается далее, что выполнены следующие упрощающие предпосылки: 1) действие проекта состоит из трех процессов — инвестирования (моменты $t = 1, \ldots, T^1$ – для внешних и t=1 – для внутренних инвестиций), приобретения активов ($t = 1, \ldots, T$) и производства ($t = T^2 + 1, \ldots, T$), где T^1, T^2 и T – соответственно моменты окончания внешнего инвестирования, начала производства и горизонт планирования проекта ($1 \leqslant T^2 \leqslant T^1 < T$); 2) амортизация начисляется линейно с момента начала производства $t = T^2 + 1$, причем доля остаточной стоимости активов по истечении срока службы от их балансовой стоимости мала; 3) при расчете чистой прибыли учитываются налоги, составляющие наибольшую часть затрат предприятия: налог на добавленную стоимость, налог на прибыль, налог на имущество, а также отчисления в фонд оплаты труда; 4) на единице актива каждого типа производятся изделия только одного вида; 5) объем продаж по каждому виду производимой продукции не выше спроса на нее; 6) горизонт планирования T инвестиционного проекта меньше сроков T_k полезного использования единицы актива каждого типа: $T < T_k$ ($k = 1, \ldots, n$). Большинство указанных предпосылок могут быть исключены или ослаблены (например, 2)-4), 6)).

3. Математическая модель

С учетом вышеизложенных предпосылок математическую модель реализации описанного инвестиционного проекта можно представить в виде следующей многошаговой задачи линейного программирования [2]:

$$
\begin{aligned}
&x_k(t+1) = x_k(t)+u_k(t) \quad (k=1, \ldots, n;\ t=0, \ldots, T-1),\\
&x_{n+1}(t+1) = x_{n+1}(t) + \sum_{k=1}^{n} u_k(t) \quad (t = 0, \ldots, T^2 - 1),\\
&x_{n+1}(t+1) = -\sum_{k=1}^{n} x_k(t)/T_k + x_{n+1}(t) + \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{n} u_k(t) \quad (t = T^2, \ldots, T-1),\\
&x_{n+2}(t+1) = -\alpha_2 x_{n+1}(t) + x_{n+2}(t) - \sum_{k=1}^{n} u_k(t) + \\
&\qquad + u_{2n+1}(t) + u_{2n+2}(t) \quad (t = 0),\\
&x_{n+2}(t+1) = -\alpha_2 x_{n+1}(t) + x_{n+2}(t) - \sum_{k=1}^{n} u_k(t) + \\
&\qquad + u_{2n+1}(t) \quad (t = 1, \ldots, T^2 - 1),\\
&x_{n+2}(t+1) = \alpha_3 \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k(t)}{T_k} - \theta x_{n+1}(t) + \\
&\qquad + x_{n+2}(t) - \sum_{k=1}^{n} u_k(t) + \gamma \sum_{k=1}^{n} u_{n+k}(t) + \\
&\qquad + u_{2n+1}(t) \quad (t = T^2, \ldots, T^1 - 1),\\
&x_{n+2}(t+1) = \alpha_3 \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k(t)}{T_k} - \theta x_{n+1}(t) + \\
&\qquad + x_{n+2}(t) - \sum_{k=1}^{n} u_k(t) + \\
&\qquad + \gamma \sum_{k=1}^{n} u_{n+k}(t) \quad (t=T^1, \ldots, T-1),\\
&x_{n+3}(t+1) = x_{n+3}(t) + u_{2n+1}(t) \quad (t = 0, \ldots, T^1 - 1),\\
&x_{n+3}(t+1) = x_{n+3}(t) \quad (t = T^1, \ldots, T-1);
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\begin{gathered}
x_k(0)=0 \quad (k=1,\dots,n+3);\\
x_{n+2}(t)\geqslant 0 \quad (t=1,\dots,T),\\
-\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k(t)}{T_k}-\alpha_2 x_{n+1}(t)+\\
+(1-\beta)\sum_{k=1}^{n}u_{n+k}(t)\geqslant 0 \quad (t=T^2,\dots,T-1),\\
u_{n+k}(t)\leqslant q_k(t+1), \quad u_{n+k}(t)\leqslant \delta_k x_k(t)\\
(k=1,\dots,n; \quad t=T^2,\dots,T-1),\\
x_{n+3}(t)\leqslant I_0 \quad (t=1,\dots,T), \qquad (1)\\
u_{2n+2}(0)\leqslant K_0,\\
u_k(t)\geqslant 0 \quad (k=1,\dots,n; \quad t=0,\dots,T-1),\\
u_{n+k}(t)\geqslant 0 \quad (k=1,\dots,n; \quad t=T^2,\dots,T-1),\\
u_{2n+1}(t)\geqslant 0 \quad (t=0,\dots,T^1-1), \quad u_{2n+2}(0)\geqslant 0,\\
J=-\sum_{t=0}^{T^1-1}\frac{u_{2n+1}(t)}{(1+r)^t}-u_{2n+2}(0)+\\
+\sum_{t=T^2}^{T-1}\frac{\left[\alpha_3\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x_k(t)}{T_k}-\theta x_{n+1}(t)+\gamma\sum\limits_{k=1}^{n}u_{n+k}(t)\right]}{(1+r)^t}+\\
+\frac{\delta x_{n+1}(T)}{(1+r)^{T-1}}\to\max .
\end{gathered}
$$

Здесь $u_k(t)$ $(t=0,\dots,T-1)$ — стоимость приобретаемых активов; $u_{n+k}(t)$ $(k=1,\dots,n;\ t==T^2,\dots,T-1)$ — выручка от реализации продукции k-го типа; $u_{2n+1}(t)$ $(t=0,\dots,T^1-1)$ — внешние инвестиции в момент $t{+}1$; $u_{2n+2}(0)$–внутренние инвестиции в момент $t=1$; $x_k(t)$, $x_{n+1}(t)$, $x_{n+2}(t)$, $x_{n+3}(t)$ $(k=1,\dots,n;\ t=0,\dots,T)$ — соответственно накопленная стоимость всех активов k-го типа, остаточная стоимость всех активов, текущие денежные средства предприятия и накопленные суммы внешних инвестиций в момент t. Параметрами модели (1) являются следующие величины: $q_k(t+1)$ $(t=T^2,\dots,T-1)$, V_k, T_k, c_k и P_k — соответственно прогнозный спрос в стоимостном выражении для момента $t{+}1$, производительность, срок службы, стоимость единицы актива и стоимость единицы продукции k-го типа $(k=1,\dots,n)$; I_0,K_0 — суммы внешних и внутренних инвестиций, выделяемых на весь срок действия проекта; $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ — ставки налогов на добавленную стоимость, на имущество и на прибыль (налог на добавленную стоимость включается в цену продукции, поэтому здесь, без ограничения общности, полагаем, что $\alpha_1=0$); β — доля выручки от реализации, выделяемая на фонд оплаты труда; $\gamma=(1-\alpha_3)(1-\beta)$, n — количество типов активов, r — ставка доходности проекта; δ $(0\leqslant\delta\leqslant 1)$ — доля остаточной стоимости всех активов на момент $t=T$ от ее балансовой стоимости, определяемая в общем случае экспертно; $\delta_k=\dfrac{P_kV_k}{c_k}$, $\theta=(1-\alpha_3)\alpha_2$.

4. Анализ математической модели

Покажем, что в задаче (1), при дополнительных условиях, которые будут получены ниже, существует решение при $T\to+\infty$. Для функции дискретного аргумента $x(t)$ $(t=0{,}1,\dots)$ ее изображение $X(z)$ относительно Z-преобразования определяется на бесконечном временно́м интервале формулой

$$
Z(x(t))\overset{def}{=}X(z)=\sum_{t=0}^{\infty}x(t)z^{-t}, \qquad (2)
$$

где $z\neq 0$ – параметр, который может быть в общем случае комплексным. Для Z-изображения функции смещенного на один шаг дискретного аргумента $x(t+1)$ справедлива формула:

$$
Z(x(t+1))=z\left[X(z)-x(0)\right]. \qquad (3)
$$

Для простоты, не ограничивая общности дальнейшего анализа, будем рассматривать задачу оценки стоимости проекта $\delta=0$ [3]. (При $\delta>0$ имеем задачу оценки действующего бизнеса, не предназначенного для продажи, которая анализируется аналогично.)

Для единообразия записи уравнений движения и ограничений задачи (1) доопределим в ней «отсутствующие» управляющие переменные $u_{n+k}(t)$ $(k==1,\dots,n; t=0,..,T^2-1)$, $u_{2n+1}(t)$ $(t=T^1,..,T-1)$, $u_{2n+2}(t)$ $(t=1,..,T-1)$, полагая их равными нулю, т. е. задавая систему неравенств вида:

$$
\begin{aligned}
&u_{n+k}(t)\leqslant 0, \quad u_{n+k}(t)\geqslant 0\\
&(k=1,\dots,n; \quad t=0,..,T^2-1);\\
&u_{2n+1}(t)\leqslant 0, \quad u_{2n+1}(t)\geqslant 0 \quad (t{=}T^1,..,T-1);\\
&u_{2n+2}(t)\leqslant 0, \quad u_{2n+2}(t)\geqslant 0 \quad (t{=}1,..,T-1)
\end{aligned} \qquad (4)
$$

и продолжая управления на весь горизонт планирования T.

Аналогично формуле (2) определим изображения управляющих и фазовых переменных задачи (1), (4) относительно Z-преобразования в виде

$$
\begin{gathered}
U_j(z)=\sum_{t=0}^{\infty}u_j(t)z^{-t}, \quad X_k(z)=\sum_{t=0}^{\infty}x_k(t)z^{-t}\\
(j=1,\dots,2n+2; k=1,\dots,n+3).
\end{gathered} \qquad (5)
$$

Пусть $T\to+\infty$, $T^2=1$. Тогда, применяя к задаче (1), (4) Z-преобразование при $z=1+r>1$, с учетом формул (5), свойства (3) и соотношения

$T \to +\infty \Rightarrow T_k \to +\infty$ $(k = 1, \ldots, n)$ (в силу предпосылки 6)), получим следующую статическую (агрегированную) задачу линейного программирования, зависящую от параметра z:

$$
\begin{gathered}
-(\theta + z - 1)\sum_{k=1}^{n} U_k(z) + \gamma(z-1)\sum_{k=1}^{n} U_{n+k}(z) + \\
+ (z-1)(U_{2n+1}(z) + U_{2n+2}(z)) \geqslant 0, \\
-\frac{\alpha_2 \sum\limits_{k=1}^{n} U_k(z)}{z-1} + (1-\beta)\sum_{k=1}^{n} U_{n+k}(z) \geqslant 0, \\
U_{n+k}(z) \leqslant Q_k(z), \quad U_{n+k}(z) \leqslant \frac{\delta_k U_k(z)}{z-1} \quad (k=1,\ldots,n), \\
U_{2n+1}(z) \leqslant I_0, \quad U_{2n+2}(z) \leqslant K_0, \\
U_k(z) \geqslant 0 \quad (k = 1, \ldots, 2n+2), \\
\overline{J}(z) = -\frac{\theta \sum\limits_{k=1}^{n} U_k(z)}{z-1} + \gamma \sum_{k=1}^{n} U_{n+k}(z) - \\
- U_{2n+1}(z) - U_{2n+2}(z) \to \max\ (z > 1),
\end{gathered}
\tag{6}
$$

где $Q_k(z) = \sum\limits_{t=0}^{\infty} q_k(t) z^{-t}$ $(k = 1, \ldots, n)$. Кроме параметра z, задача (7) содержит еще 9 независимых параметров $\alpha_2, \alpha_3, \beta, P_k, V_k, c_k, Q_k, I_0, K_0$ и 3 зависящих от них комплекса: $\delta_k = \dfrac{P_k V_k}{c_k}$, $\theta = (1-\alpha_3)\alpha_2$, $\gamma = (1-\alpha_3)(1-\beta)$.

Задачу, получаемую из (6) подстановкой формул (5) для z-изображений $U_j(z)$ $(j = 1, \ldots, 2n+2)$, назовем задачей A'. Отметим, что любой допустимый в модели (1) процесс является допустимым и в задаче A'. Поэтому для оптимальных значений критериев этих задач имеет место неравенство:

$$J^* \leqslant \overline{J}^*. \tag{7}$$

Найдем условия, при которых существует решение задачи (1) на бесконечном интервале. Несложно показать, что справедливы неравенства

$$Q_k(z) \leqslant \frac{\overline{q}_k}{r} \quad (k = 1, \ldots, n; \quad r > 0), \tag{8}$$

где $\overline{q}_k = \max\limits_{t=1,\ldots} q_k(t+1)$ $(k = 1, \ldots, n)$ — наибольший прогнозный спрос на продукцию k-го типа за весь период производства. Будем предполагать, что прогнозный спрос по всем видам продукции конечен в течение всего периода производства: $\overline{q}_k < +\infty$ $(k = = 1, \ldots, n)$. Тогда, с учетом неравенства (8), имеем

$$Q_k(z) < +\infty \quad (k = 1, \ldots, n; \quad z > 1). \tag{9}$$

Ограниченность переменных $U_{2n+1}(z)$, $U_{2n+2}(z)$ непосредственно следует из условий задачи (6). Из условия (9) следует ограниченность переменных $U_{n+k}(z)$ $(k = 1, \ldots, n)$ при $z > 1$. Поскольку из второго неравенства указанной задачи следует, что $\sum\limits_{k=1}^{n} U_k(z) \leqslant \dfrac{(z-1)(1-\beta)}{\alpha_2} \sum\limits_{k=1}^{n} U_{n+k}(z)$, то, учитывая неотрицательность $U_k(z)$ $(k = 1, \ldots, n)$, получим, что эти переменные также ограничены (при $\alpha_2 > 0$). При $\alpha_2 = 0$ и $\theta = 0$ 1-е неравенство в (6) принимает вид:

$$-\sum_{k=1}^{n} U_k(z) + \gamma \sum_{k=1}^{n} U_{n+k}(z) + U_{2n+1}(z) + U_{2n+2}(z) \geqslant 0,$$

откуда получаем, что

$$\sum_{k=1}^{n} U_k(z) \leqslant -\gamma \sum_{k=1}^{n} U_{n+k}(z) + U_{2n+1}(z) + U_{2n+2}(z).$$

Следовательно, и в этом случае переменные $U_k(z)$ $(k = 1, \ldots, n)$ являются ограниченными. Очевидно, что изображения $U_k(z) = 0$ $(k = 1, \ldots, 2n+2;$ $z > 1)$ удовлетворяют ограничениям задачи (6), поэтому ее допустимое множество непусто, замкнуто (в силу нестрогости неравенств) и ограниченно. Поскольку целевая функция указанной задачи непрерывна по своим аргументам при фиксированных значениях параметров, то по теореме Вейерштрасса эта задача имеет решение. Множество $\overline{D}(z)$ $(z > 1)$ допустимых управлений задачи A' также компактно. Пусть $D(z)$ $(z > 1)$ — допустимое множество переменных в задаче (1), (4). Поскольку по построению любое допустимое в указанной задаче управление является допустимым и в A', то при $T \to +\infty$ $D(z) \subseteq \overline{D}(z)$ $(z > 1)$. Множество $\overline{D}(z)$ ограниченно, поэтому и $D(z)$ также является ограниченным. Поскольку нулевое управление является допустимым в задаче (1), (4) при $T \to +\infty$, то $D(z)$ также является непустым. Учитывая, что ее целевая функция $\overline{J}$ непрерывна по своим аргументам, то по теореме Вейерштрасса и эта задача разрешима, а значит, существует и решение задачи (1), получаемое отбрасыванием «отсутствующих» компонент управляющего вектора.

Рассмотрим теперь нулевое управление в модели (1):

$$
\begin{aligned}
&u_k(t) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n;\ t = 0, \ldots, T); \\
&u_{n+k}(t) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n;\ t = T^2, \ldots, T); \\
&u_{2n+1}(t) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n;\ t = 0, \ldots, T^1 - 1); \\
&u_{2n+2}(0) = 0,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

задаваемое при конечном значении T и означающее содержательно отсутствие внешних и внутренних инвестиций, производства и выручки от реализации. Управлению (10) соответствует значение стоимости проекта $NPV_T^0 = 0$. Пусть NPV_T^* — оптимальная стоимость проекта, описываемого моделью (1). Тогда, в силу оптимальности $NPV_T^* \geqslant NPV_T^0 = 0$, откуда следует $NPV_T^* \geqslant 0$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $T \to +\infty$, получим аналогичное условие и на бесконечном горизонте планирования: $NPV_\infty^* \geqslant 0$, где $NPV_\infty^* \overset{def}{=} \lim\limits_{T\to+\infty} NPV_T^*$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Если на бесконечном временно́м интервале спрос по всем видам продукции конечен в течение всего периода производства (начинающегося с момента $t{=}1$), и ставка доходности инвестиционного проекта положительна, то есть выполняются условия:

$$\begin{aligned}&\overline{q}_k = \max_{t=1,\ldots} q_k(t+1) < +\infty \quad (k=1,\ldots,n);\\ &T \to +\infty; \quad r > 0; \quad T^2 = 1,\end{aligned} \tag{11}$$

то задача (1) имеет решение. При этом оптимальная стоимость $NPV^* = J_T^*$ проекта, описываемого указанной задачей, неотрицательна:

$$NPV^* \geqslant 0. \tag{12}$$

Условия (12) означают, что любая *оптимальная* реализация инвестиционного проекта, описываемого моделью (1), является *окупаемым* проектом, если считать окупаемыми проекты с нулевой *NPV*. Таким образом, из теоремы 1 следует, что неокупаемые (то есть, имеющие отрицательную NPV) инвестиционные проекты не являются оптимальными. Для дальнейшего анализа исследуемой задачи используется следующая теорема.

Теорема 2. Оптимальное значение $J^* = NPV^*$ целевого критерия модели (1) есть неубывающая функция от величин $T, n, T^1, \gamma, \delta;\ \ \delta_k, q_k(t+1)\ \big(k \in \{1,\ldots,n\};\ t\in\{T^2+1,\ldots,T-1\}\big);\ \ I_0, K_0$ и невозрастающая — от параметров T^2, θ и r $\big(n, T, T^1, T^2 \in \{1,2,\ldots\}\big)$ при неизменных значениях остальных показателей.

Покажем далее, что оптимальное значение целевой функции $\overline{J}^*(z)$ в задаче (6) ограничено сверху. Поскольку коэффициенты перед переменными $U_k(z)$ $(k=1,\ldots,n)$ в выражении целевой функции $\overline{J}(z)$ равны $-\theta/(z-1) < 0$, а $\overline{J}(z) \to \max$, то достаточно показать, что указанные переменные ограничены снизу. Из четвертого ограничения этой задачи имеем:

$$U_k(z) \geqslant \frac{(z-1)U_{n+k}(z)}{\delta_k} \quad (k=1,\ldots,n). \tag{13}$$

Поскольку $U_{n+k}(z) \geqslant 0$ $(k=1,\ldots,n)$, $\delta_k{>}0$ $(k=1,\ldots,n)$ и $z{>}1$, то из (13) следует, что $U_k(z){\geqslant}0$ $(k=1,\ldots,n)$. Значит, последнее неравенство в (6), при $k{=}1,\ldots,n$, является избыточным и его можно исключить. Следовательно, условие (13) — единственное ограничение на переменные $U_k(z)$ $(k=1,\ldots,n)$ снизу, поэтому имеем:

$$\overline{J}(z) \leqslant -\frac{\theta(z-1)\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{U_k(z)}{\delta_k}}{z-1} + \gamma\sum_{k=1}^{n} U_{n+k}(z) - \\ - U_{2n+1}(z) - U_{2n+2}(z),$$

то есть

$$\overline{J}(z) \leqslant \sum_{k=1}^{n} (\gamma - \theta/\delta_k) U_{n+k}(z) - U_{2n+1}(z) - U_{2n+2}(z).$$

Из условия (13) и первого неравенства в (6) получим:

$$0 \leqslant -(\theta+z-1)\sum_{k=1}^{n} U_k(z) + \gamma(z-1)\sum_{k=1}^{n} U_{n+k}(z) + \\ + (z-1)(U_{2n+1}(z) + U_{2n+2}(z)) \leqslant -(\theta+z-1)\times \\ \times \sum_{k=1}^{n}\frac{(z-1)U_{n+k}(z)}{\delta_k} + \gamma(z-1)\sum_{k=1}^{n} U_{n+k}(z) + \\ + (z-1)(U_{2n+1}(z)+U_{2n+2}(z)),$$

откуда следует:

$$(z-1)\left(\sum_{k=1}^{n}\left[\gamma - \frac{(\theta+z-1)}{\delta_k}\right]U_{n+k}(z) + \right. \\ \left. + U_{2n+1}(z) + U_{2n+2}(z)\right) \geqslant 0.$$

Поскольку $z > 1$, то из последнего неравенства найдем

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\gamma - \frac{(\theta+z-1)}{\delta_k}\right]U_{n+k}(z) + U_{2n+1}(z) + U_{2n+2}(z) \geqslant 0.$$

Аналогично, с учетом (13), перепишем второе неравенство задачи (7) в виде:

$$0 \leqslant -\frac{\alpha_2\sum\limits_{k=1}^{n} U_k(z)}{z-1} + (1-\beta)\sum_{k=1}^{n} U_{n+k}(z) \leqslant \\ \leqslant -\frac{\alpha_2\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{(z-1)U_{n+k}(z)}{\delta_k}\right]}{z-1} + (1-\beta)\sum_{k=1}^{n} U_{n+k}(z),$$

откуда имеем: $\sum\limits_{k=1}^{n}\left[1-\beta-\dfrac{\alpha_2}{\delta_k}\right]U_{n+k}(z) \geqslant 0$. Тогда, учитывая последнее условие и исключая неравенство (13), поскольку оно использовалось в качестве ограничения снизу на переменные $U_k(z)$ $(k = 1, \ldots, n)$, из (6) найдем:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\gamma-\frac{(\theta+z-1)}{\delta_k}\right]U_{n+k}(z)+U_{2n+1}(z)+U_{2n+2}(z)\geqslant 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[1-\beta-\frac{\alpha_2}{\delta_k}\right]U_{n+k}(z)\geqslant 0,$$

$$U_{n+k}(z)\leqslant Q_k(z)\quad (k=1,\ldots,n),\quad U_{2n+1}(z)\leqslant I_0,$$

$$U_{2n+2}(z)\leqslant K_0,\quad U_k(z)\geqslant 0\ \ (k=n+1,\ldots,2n+2),$$

$$\overline{J}(z)\leqslant\sum_{k=1}^{n}(\gamma-\theta/\delta_k)U_{n+k}(z)-U_{2n+1}(z)-U_{2n+2}(z). \tag{14}$$

Поскольку в (14) целевая функция $\overline{J}(z)$ ограничена сверху, и коэффициенты перед переменными $U_{2n+1}(z)$ и $U_{2n+2}(z)$ отрицательные, то, учитывая неравенство $U_k(z)\geqslant 0$ при $k=2n+1; 2n+2$ (являющееся ограничением на эти переменные снизу), запишем: $\overline{J}(z)\leqslant\sum_{k=1}^{n}(\gamma-\theta/\delta_k)U_{n+k}(z)$. В частности, из последнего неравенства получим:

$$\overline{J}^*(z)\leqslant\sum_{k=1}^{n}(\gamma-\theta/\delta_k)U_{n+k}(z).$$

Из последнего условия несложно получить следующую последовательность оценок:

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left[\gamma-\frac{(\theta+z-1)}{\delta_k}\right]U_{n+k}(z)+U_{2n+1}(z)+U_{2n+2}(z)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left[\gamma-\frac{(\theta+z-1)}{\delta_k}\right]U_{n+k}(z)++I_0+K_0,$$

откуда $K_0+I_0+\sum_{k=1}^{n}\left[\gamma-\frac{(\theta+z-1)}{\delta_k}\right]U_{n+k}(z)\geqslant 0$. Таким образом, доказаны следующие неравенства:

$$\begin{gathered}
K_0+I_0+\sum_{k=1}^{n}\left[\gamma-\frac{(\theta+z-1)}{\delta_k}\right]U_{n+k}(z)\geqslant 0,\\
\sum_{k=1}^{n}\left[1-\beta-\frac{\alpha_2}{\delta_k}\right]U_{n+k}(z)\geqslant 0,\\
U_{n+k}(z)\leqslant Q_k(z),\quad U_{n+k}(z)\geqslant 0\quad (k=1,\ldots,n),\\
\overline{J}^*(z)\leqslant\sum_{k=1}^{n}(\gamma-\theta/\delta_k)U_{n+k}(z),
\end{gathered} \tag{15}$$

которые позволяют получить оценки оптимальной стоимости инвестиционных проектов, описываемых задачей (1). Сформулируем соответствующие условия в виде теорем.

Теорема 3. Если имеют место условия (11), то

$$NPV^*\leqslant\frac{1}{r}\sum_{k:\ \delta_k>\alpha_2/(1-\beta)}(\gamma-\theta/\delta_k)\overline{q}_k, \tag{16}$$

где суммирование производится по всем k, удовлетворяющим условию

$$\delta_k>\alpha_2/(1-\beta)\ (k\in\{1,\ldots,n\}). \tag{17}$$

Отметим, что если анализировать знаки коэффициентов при $U_{n+k}(z)$ в первом условии (15), то можно найти другую оценку на NPV^* сверху, подобную соотношению (16).

Если номеров k, удовлетворяющим неравенству (17) нет, то из теоремы 3 получим следующую теорему.

Теорема 4. Если выполняются условия (11) и $\delta_k\leqslant\alpha_2/(1-\beta)$ $(k=1,\ldots,n)$, то $NPV^*=0$.

Теорема 4 утверждает, что если относительная эффективность (максимальная фондоотдача) δ_k $(k = 1,\ldots,n)$ активов каждого вида не выше некоторой величины, то оптимальная стоимость проекта в модели равна нулю.

Если в модели (1) найдутся производственные активы с неограниченной производительностью, то из теоремы 3 получим следствие.

Следствие 1. Если справедливы условия (11), и имеются активы со сколь угодно высокой производительностью: $V_j\to+\infty$ $(j\in\{1,\ldots,n\})$, то

$$NPV^*\leqslant\frac{1}{r}\left[\sum_{k:\ \delta_k>\alpha_2/(1-\beta)}\left(\gamma-\frac{\theta}{\delta_k}\right)\overline{q}_k+\gamma\sum_{j:\ V_j\to+\infty}\overline{q}_j\right], \tag{18}$$

где суммирование производится по соответствующим номерам k и j.

Аналогично теореме 3, анализируя задачу (6), нетрудно доказать теорему.

Теорема 5. Если выполняются условия

$$\delta_k<(\theta+r)/\gamma\ \ (k=1,\ldots,n), \tag{19}$$

то в задаче (1) на бесконечном временнóм интервале существует решение и имеет место неравенство:

$$NPV^*\leqslant(I_0+K_0)\sum_{k:\ \delta_k>\alpha_2/(1-\beta)}\left(\frac{\gamma\delta_k-\theta}{\theta+r-\gamma\delta_k}\right). \tag{20}$$

Содержательно теорема 5 утверждает, что если относительная эффективность активов каждого вида меньше некоторой предельной величины, зависящей от ставки налога на имущество и доли отчислений на фонд оплаты труда, то оптимальная стоимость проекта, формируемого по модели (1), не превышает некоторой границы.

Если условия (17) и (19) имеют место для всех k=1,...,n, то из теорем 3 и 5 получим теорему 6.

Теорема 6. Пусть справедливы условия (11) и

$$\frac{\theta}{\gamma} < \delta_k < \frac{\theta + r}{\gamma} \; (k = 1, \ldots, n). \qquad (21)$$

Тогда NPV^* удовлетворяет неравенству:

$$NPV^* \leqslant \sum_{k=1}^{n} (\gamma - \theta/\delta_k) \min\Big[\overline{q}_k/r, \\ (K_0 + I_0)\delta_k/(\theta + r - \gamma\delta_k)\Big]. \qquad (22)$$

В частности, из (22) следует, что если выполняется хотя бы одно из условий: 1) $K_0 + I_0 = 0$; 2) $r \to +\infty$; 3) $\overline{q}_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, то $NPV^* = 0$, что согласуется с экономическим смыслом сформулированной задачи.

Рассматривая частный случай спроса $\overline{\overline{q}}_k(t)$, заданного формально на бесконечном интервале времени соотношением:

$$\overline{\overline{q}}_k(t) = \begin{cases} q_k(t), & t = 2, \ldots, T \\ 0, & t = T + 1, \ldots \end{cases} \quad (k = 1, \ldots, n), \qquad (23)$$

где $q_k(t)$ $(k = 1, \ldots, n;\; t = 2, \ldots, T)$ — фактический спрос по k-му виду продукции в момент t, аналогично теореме 3 доказывается теорема 7.

Теорема 7. Если имеют место условия

$$\overline{q}_k = \max_{t=1,\ldots,T-1} q_k(t+1) < +\infty \\ (k = 1, \ldots, n); \quad r > 0; \quad T^2 = 1, \qquad (24)$$

то

$$NPV^* \leqslant \frac{1}{r}\left[1 - (1+r)^{1-T}\right] \sum_{k:\ \delta_k > \alpha_2/(1-\beta)} (\gamma - \theta/\delta_k)\overline{q}_k, \qquad (25)$$

где суммирование производится по всем k, удовлетворяющим условиям (17).

Аналогично теореме 7 доказываются для конечного горизонта планирования следующие утверждения, подобные следствию 1 и теореме 6.

Следствие 2. Если справедливы условия (17) и имеются активы со сколь угодно высокой производительностью, то есть $\exists\, j \in \{1, \ldots, n\} : V_j \to +\infty$, то

$$NPV^* \leqslant \frac{1}{r}\left(1 - (1+r)^{1-T}\right) \times \\ \times \left[\sum_{k:\ \delta_k > \alpha_2/(1-\beta)} (\gamma - \theta/\delta_k)\overline{q}_k + \gamma \sum_{j:\ V_j \to +\infty} \overline{q}_j\right], \qquad (26)$$

где суммирование производится по соответствующим номерам k и j.

Теорема 8. Если справедливы условия (21) и (24), то NPV^* удовлетворяет неравенству:

$$NPV^* \leqslant \sum_{k=1}^{n} (\gamma - \theta/\delta_k) \min\Big[\overline{q}_k \left(1 - (1+r)^{1-T}\right)/r, \\ (K_0 + I_0)\delta_k/(\theta + r - \gamma\delta_k)\Big]. \qquad (27)$$

Отметим, что, рассматривая вместо (23) спрос $\overline{\overline{q}}_k(t)$, заданный формально на бесконечном интервале времени в виде:

$$\overline{\overline{q}}_k(t) = \begin{cases} q_k(t), & t = T^2 + 1, \ldots, T \\ 0, & t = T + 1, \ldots \end{cases} \quad (k = 1, \ldots, n),$$

получим оценки на NPV^* сверху в задаче (1) для случая, когда $T^2 \neq 1$.

5. Замечания

Относительно найденных выше оценок на NPV^* сверху сделаем следующие замечания.

1. Полученные с помощью Z-преобразования оценки сверху на NPV^* неулучшаемы, если спрос постоянный. Неравенство (8) лишь упрощает вид оценок на NPV^*, и, если не использовать это неравенство для исключения функций $Q_k(z)$, то эти оценки будут точнее.

2. При $T >> 1$ и $r > 0$ оценки для конечного и бесконечного интервалов времени отличаются мало, поскольку $\dfrac{1}{(1+r)^T} \approx 0$. Причем оценка, полученная для бесконечного интервала, является завышенной по сравнению с оценкой на конечном горизонте планирования. Поэтому, если проект неприемлем для инвестора на бесконечном горизонте планирования, то тем более он неприемлем на конечном временном интервале.

3. При $T \to +\infty$ из (25), (26) и (27) получаются соответственно (16), (18) и (22).

Таким образом, параметрический анализ задачи (6) позволил получить ограничения на оптимальную стоимость проекта в модели (1) вида:

$$0 \leqslant NPV^* \leqslant \Gamma(r), \qquad (28)$$

где $\Gamma\,(r)$ — граница значений оптимальной стоимости NPV^*, которая является одной из возможных оценок на нее сверху и определяется выражениями в правых частях соотношений (16), (18), (20), (22), (25–27). Отметим, что при оценке инвестиционных проектов в условиях большой неопределенности или риска (например, при венчурных инвестициях) их увеличение можно учитывать путем увеличения ставки доходности r проекта. Функцию

$\Gamma(r)$ можно рассматривать как меру неопределенности в оценке NPV^*. При $r \to +\infty$, $\Gamma(r) \to +0$, и из (28) следует, что $NPV^* \to +0$, то есть оценка NPV^* становится определенной. Если инвестору требуется получить стоимость проекта, превышающую $\Gamma(r)$ при соответствующих условиях (см. (19), (21) и т. п.), то рассматриваемый проект для него неприемлем. Теоремы 3–8 и следствия 1, 2, таким образом, могут использоваться на этапе предварительного анализа инвестиционных проектов для исключения неэффективных проектов или для определения таких интервалов изменения их параметров, при которых этот проект может быть приемлем для инвесторов.

6. Пример

Для проверки полученных аналитических оценок были проведены численные эксперименты с помощью пакета программ [4]. Рассмотрим следующий модельный пример, иллюстрирующий некоторые из приведенных выше теорем.

Пусть имеется производство с одним активом (n=1) и сроком действия 25 **месяцев**. Анализируется инвестиционный проект, обладающий следующими характеристиками: $T = 25; T^1 = 3; T^2 = 1; I_0 = 1000; K_0 = 100;\ r = 0{,}05; T_1 = 100; V_1 = 20; c_1 = 50; P_1 = 1; q_1(t) = 1000\ (t = 2, \ldots, 25); \alpha_1 = 0; \alpha_2 = 0{,}02; \alpha_3 = 0{,}24; \beta = 0{,}05$.

Заметим, что спрос $q_1(t+1)$ на производимую продукцию можно не экстраполировать на бесконечный горизонт планирования, так как по формуле (24) имеем: $\overline{q}_1 = \max\limits_{t=1,\ldots 24} q_1(t+1) = 1000$. Поскольку $\delta_1 = P_1V_1/c_1 = 0{,}4$; $\gamma = (1-\alpha_3)(1-\beta)$=0,722; θ=$(1-\alpha_3) \times \alpha_2$ =0,0152, $\theta/\gamma \approx 0{,}021 < \delta_1 = 0{,}4$, то есть условия (17) теоремы 3 выполняются, то, с учетом теорем 2, 3, получим, что стоимость проекта $NPV^* = J^*_{25}$ удовлетворяет неравенству: $J^*_{25} \leqslant \leqslant 1{,}365 \times 10^4$. По результатам численных расчетов $NPV^* = J^*_{25} \approx 7{,}4365 \times 10^3 \geqslant 0$, что подтверждает условие (12) и теорему 3. Из данного примера следует, что стоимость $NPV^* = J^*_{25}$ инвестиционного проекта с заданными выше характеристиками, описываемого моделью (1), не может превышать величины $1{,}365 \times 10^4$ даже при наилучшей его реализации. Поэтому, если инвестор рассчитывает получить NPV больше указанной величины, то данный проект для него неприемлем при ставке доходности r=0,05 в месяц.

Результаты численных расчетов подтверждают теоремы 2, 3. На рисунке приведены графики зависимости от ставки доходности r расчетных значений NPV^* рассматриваемого инвестиционного проекта, а также графики соответствующих оценок NPV^* при T=25 и на бесконечном горизонте планирования.

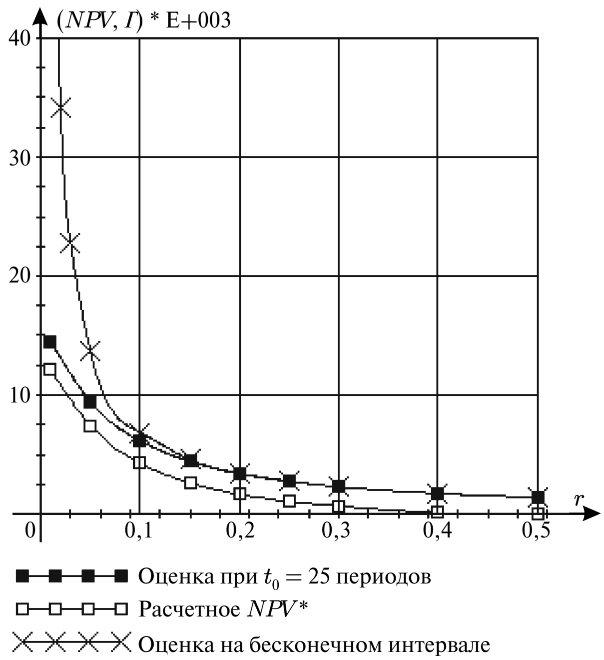

Рис. 1. Зависимости стоимости оптимальной стоимости NPV^* проекта и ее оценок от ставки доходности r

Отметим, что, как видно из данного рисунка, в диапазоне практически значимых значений ставки доходности r оценки оптимальной стоимости NPV^* исследуемого проекта отличаются от расчетных значений NPV^* не более, чем на 30 %, что является удовлетворительным результатом на этапе предварительного инвестиционного анализа средне- и долгосрочных проектов.

Следует отметить, что полученные оценки для инвестиционного проекта, рассматриваемого в примере 1, имеют предварительный характер (то есть их применение возможно на этапе их предварительного анализа, когда перед инвестором в первую очередь стоит задача исключения заведомо неприемлемых вариантов сценариев инвестирования). При этом не нужно решать многошаговую задачу (1).

Выводы

Приведенный в работе операционный подход на базе Z-преобразования применим к долгосрочным инвестиционным проектам реального инвестирования, описываемым линейными динамическими моделями с большим числом параметров, управляющих и фазовых переменных. Кроме того, он отличается простотой при дальнейшей детализации линейных моделей экономической динамики вида (1) (например, при включении в нее дополнительных блоков или отказе от некоторых предпосылок), то есть может использоваться инвестиционными аналитиками при анализе широкого круга инвестиционных проектов. В частности, в работах [5–6] он был апробирован при реализации конкретного инвестиционного проекта согласования контракта между инвестором, производителем и поставщиком оборудования. При этом наблюдалось хорошее согласование результатов с данными расчетов по этому проекту, полученными ранее с помощью пакета финансового анализа Project Expert (по *NPV*, моментам платежей, инвестиций, объемам продаж и другим характеристикам) при существенно меньших интеллектуальных затратах. Таким образом, приведенные результаты в виде теорем 3–8 и следствий 1 и 2 позволяют повысить обоснованность принятия решений при отборе эффективных проектов на стадии их предварительной оценки за счет перехода от динамической модели к более простой для анализа агрегированной задаче.

Отметим, что предложенный подход на базе операционного исчисления, продемонстрированный при оценке эффективности инвестиционного проекта, описываемого моделью (1), несложно перенести на многокритериальные модели реализации проектов, поскольку, согласно [7], линейная задача максимизации с несколькими критериями $\overline{J} = \left\{J^1, \ldots, J^N\right\} \to max$ эквивалентна задаче максимизации свертки этих критериев $\overline{J}(\mu) = \sum_{\nu=1}^{N} \mu_\nu J^\nu \to \max$ на том же допустимом множестве, где вектор параметров

$$\mu \in \mathrm{M} = \left\{ (\mu_1, \ldots, \mu_N) \in E^N : \mu_\nu > 0; \quad (\nu = 1, \ldots, N); \sum_{\nu=1}^{N} \mu_\nu = 1 \right\}.$$

Более того, указанный подход можно применить к многокритериальной модели, количество критериев которой является ее параметром [8].

Литература

1. *Ван Хорн Дж.* Основы управления финансами. М.: Финансы и статистика, 1996.
2. *Медведев А. В.*, *Победаш П. Н.* Применение z-преобразования и дискретного принципа максимума к анализу модели реальных инвестиций // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М. Ф. Решетнева. 2006. № 4 (11). С. 32–37.
3. *Валдайцев С. В.* Оценка бизнеса и управление стоимостью предприятия. М.: Юнити-Дана, 2002. 720 с.
4. Линейная динамика / Программа для ЭВМ. Свидетельство о регистрации в Роспатенте № 2004611491 от 17.06.2004. Правообладатели А. В. Медведев, П. Н. Победаш.
5. *Медведев А. В.*, *Победаш П. Н.* Теоретический анализ задачи оптимального планирования инновационных проектов // Вестник университетского комплекса. Вып. 6(20), Красноярск: НИИ СУВПТ, 2005. С. 96–104.
6. *Медведев А. В.*, *Победаш П. Н.* Численный анализ задачи оптимального планирования инновационных проектов // Вестник университетского комплекса. Вып. 6(20), Красноярск: НИИ СУВПТ, 2005. С. 105–110.
7. *Штойер Р.* Многокритериальная оптимизация: теория, вычисления, приложения. М.: Наука, 1982. 600 с.
8. *Медведев А. В.*, *Победаш П. Н.*, *Семенкин Е. С.* Математическая модель глобального социально-экономического развития // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М. Ф. Решетнева. Вып. 5 (31). 2010. С. 137–142.

Победаш Павел Николаевич. Докторант Сибирского ГЭУ им. М. Ф. Решетнева. Окончил в 1991 г. Кемеровский ГУ, к. ф-м. н. Кол-во печатных работ: 68, из них 1 монография. Область научных интересов: теория оптимального управления; математическая экономика; инвестиционный анализ. E-mail: pobed_pnp@mail.ru