Численные методы решения

О полимодальных отображениях и их применении к хаотической динамике дифференциальных уравнений

О. И. Рябков

Аннотация. В данной работе сделана попытка последовательно изложить качественную теорию двух видов т. н. полимодальных отображений — динамических систем с дискретным временем. Наиболее известными в данной области являются результаты касающиеся т. н. унимодальных отображений и их свойств, а именно — результаты Фейгенбаума и Шарковского [4], в частности порядок Шарковского. Несмотря на некоторую элегантность теоремы Шарковского о порядке появления циклов в унимодальных отображениях, ее нельзя рассматривать как исчерпывающую даже для указанного класса отображений. Более полное представление дает подход, использующий символическую динамику. Результаты первой части данной работы без доказательств и строгих формулировок изложены в статье [7]. Именно эта статья и послужила основой для данной работы. Вторая часть содержит строгие формулировки для другого вида полимодальных отображений, введенного Хансеном [6]. В третьей части приводится обоснование важности последнего вида полимодальных отображений для теории хаотической динамики в система дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: *полимодальные отображения, динамические системы, хаос, теорема Шарковского, сценарий ФШМ.*

1. Основные свойства многомодальных одномерных отображений

Рассмотрим произвольное n-модальное (имеющее n экстремумов) отображение $y = f(x)$ прямой $\mathbb{R}$ в себя и связанную с ним динамическую систему (ДС) с дискретным временем $x_{i+1} = f(x_i)$.

Пусть $x_{c_1}, x_{c_2}, \dots, x_{c_n}$ — точки экстремумов $f(x)$ (рис. 1).

Пусть $f(x)$ — ф-ия типа $(+\,-\,\dots)$, т. е. $f(x)$ сначала возрастает, потом убывает и т. д. Тогда x_{c_1} — максимум, x_{c_2} — минимум и т. д.

Введем некоторые базовые понятия.

Любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ данная ДС $x_{i+1} = f(x_i)$ сопоставляет:

1) последовательность точек $x_1 = x_0, x_2 = f(x_1), \dots, x_{i+1} = f(x_i)$; иначе говоря, $x_i = f^{i-1}(x_0)$.
2) последовательность символов $S = \{s_i\}_{i=1}^{\infty}$, где

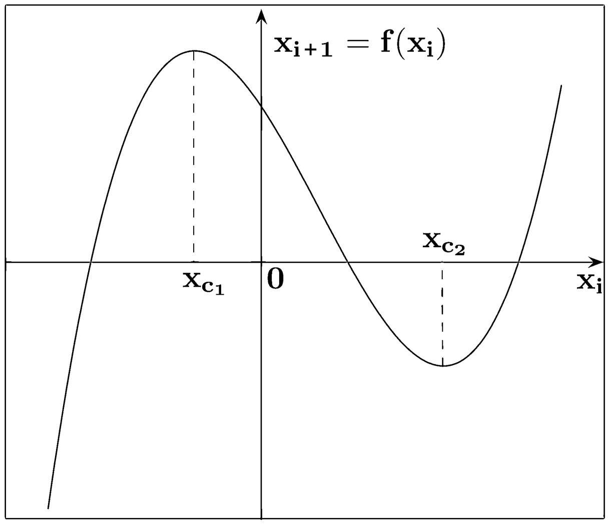

Рис. 1. Пример бимодального отображения

$$s_i = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i < x_{c_1}, \\ 1, & \text{если } x_{c_1} \leqslant x_i < x_{c_2} \\ \dots \\ n, & \text{если } x_{c_n} \leqslant x_i \end{cases}$$

или же, если условно обозначить $x_{c_0} = -\infty$, $x_{c_{n+1}} = +\infty$, то

$$s_i = \begin{cases} \dots \\ a, & \text{если } x_{c_a} \leqslant x_i < x_{c_{a+1}} \\ \dots \end{cases}$$

Определение 1. Обозначим получившиеся в результате построения функции через $\mathbf{s_i} = \mathbf{s_i(x_0)} : \mathbb{R} \to \{0, \dots, n\}$ и $\mathbf{S} = \mathbf{S(x_0)} : \mathbb{R} \to \{0, \dots, n\}_{i=1}^{\infty}$.

Определение 2. Обозначим через $\boldsymbol{\sigma}$ оператор сдвига последовательности на один символ влево. Т. е. если $S = s_1 s_2 \dots$, то $\sigma S = s_2 s_3 \dots$.

$\boldsymbol{\sigma^k}$ будет обозначать оператор сдвига последовательности на k символов влево.
Заметим, что $\sigma^k S(x) = S(f^k(x))$.

Определение 3. Обозначим через $\mathbf{I}_{\overline{s}_1\overline{s}_2\dots\overline{s}_i}$ множество точек $\{x \in \mathbb{R} : s_k(x) = \overline{s}_k \text{ для } \forall\ k = 1, \dots, i\}$.

Заметим, $I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\dots\overline{s}_i} \subset I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\dots\overline{s}_{i-1}}$.

Утверждение 1. $\forall\, \overline{s}_1\overline{s}_2 \dots \overline{s}_i$ *выполнено*:

1) $I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\dots\overline{s}_i}$ *— это ø/интервал/отрезок/полуинтервал, один или оба конца которого могут быть равны* $\pm\infty$.
2) $f^i(x)$ *— монотонна на* $I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\dots\overline{s}_i}$.

Доказательство 1. Докажем оба пункта по индукции.

а) $i = 1$ (рис. 2):

1) $I_{\overline{s}_1} = \{x \in \mathbb{R} : s_1(x) = \overline{s}_1\} \overset{\text{опр.} s_i(x)}{=} \{x \in \mathbb{R} : x_{c_{\overline{s}_1}} \leqslant x < x_{c_{\overline{s}_1+1}}\}$ — т. е. является полуинтервалом.

t

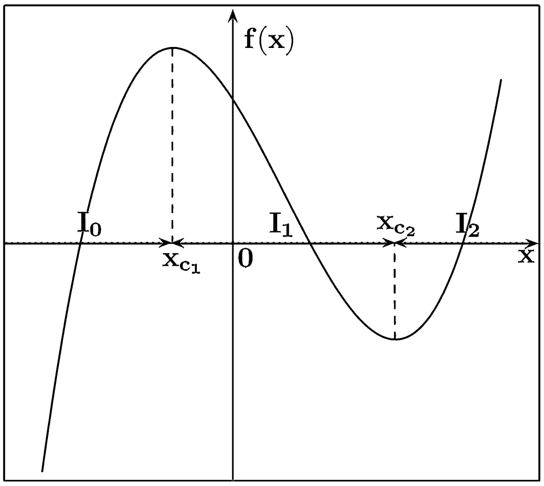

Рис. 2. Разбиение прямой на интервалы монотонности $f(x)$

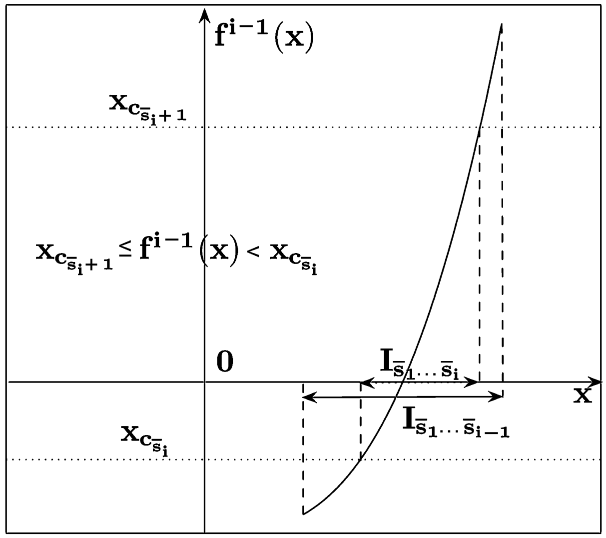

Рис. 3. К доказательству Утверждения 1

2) $f(x)$ монотонна на $x_{c_{\bar{s}_1}} \leqslant x < x_{c_{\bar{s}_1+1}}$ по определению x_{c_i}.

б) Пусть для $j = i - 1$ пункты 1)/2) уже доказаны. Докажем их для i (рис. 3):

1) Рассмотрим$f^{i-1}(x)$ на $I_{\bar{s}_1\bar{s}_2\ldots\bar{s}_{i-1}}$,

$$\begin{aligned}I_{\bar{s}_1\bar{s}_2\ldots\bar{s}_i} &= I_{\bar{s}_1\bar{s}_2\ldots\bar{s}_{i-1}} \cap \{x \in \mathbb{R} : s_i(x) = \bar{s}_i\} = \\ &= I_{\bar{s}_1\bar{s}_2\ldots\bar{s}_{i-1}} \cap \{x \in \mathbb{R} : x_{c_{\bar{s}_i}} \leqslant f^{i-1}(x) < x_{c_{\bar{s}_i+1}}\} = \\ &= I_{\bar{s}_1\bar{s}_2\ldots\bar{s}_{i-1}} \cap (f^{i-1})^{-1}([x_{c_{\bar{s}_i}}; x_{c_{\bar{s}_i+1}})).\end{aligned}$$

В силу монотонности $f^{i-1}(x)$ на $I_{\bar{s}_1\bar{s}_2\ldots\bar{s}_{i-1}}$ полным прообразом $[x_{c_{\bar{s}_i}}; x_{c_{\bar{s}_i+1}})$ — полуинтервала будет ø/интервал/отрезок/полуинтервал.

2) Рассмотрим$f^{i-1}(x)$ на $I_{\bar{s}_1\bar{s}_2\ldots\bar{s}_{i-1}}$,

$$f^i(x) = f(f^{i-1}(x)) \text{ или } \begin{cases} f^i(x) = f(y), \\ y = f^{i-1}(x) \end{cases} \quad \text{на } x \in I_{\bar{s}_1\bar{s}_2\ldots\bar{s}_i}$$

Ф-я $f^{i-1}(x)$ монотонна при $x \in I_{\bar{s}_1\bar{s}_2\ldots\bar{s}_{i-1}}$ по индуктивному предположению и $I_{\bar{s}_1\bar{s}_2\ldots\bar{s}_i} \subset I_{\bar{s}_1\bar{s}_2\ldots\bar{s}_{i-1}} \Rightarrow$ $\Rightarrow y = f^{i-1}(x)$ монотонна при $x \in I_{\bar{s}_1\bar{s}_2\ldots\bar{s}_i}$. При $x \in I_{\bar{s}_1\bar{s}_2\ldots\bar{s}_i}$ $y = f^{i-1}(x) \in [x_{c_{\bar{s}_i}}; x_{c_{\bar{s}_i+1}})$(см. опр. $s_i(x)$), а ф-я $f(y)$ монотонна при $y \in [x_{c_{\bar{s}_i}}; x_{c_{\bar{s}_i+1}})$. Тогда $f^i(x)$ монотонна на $I_{\bar{s}_1\bar{s}_2\ldots\bar{s}_i}$, как суперпозиция монотонных.

□

Теперь рассмотрим вопрос упорядочения множеств $I_{\bar{s}_1\bar{s}_2\ldots\bar{s}_i}$ на прямой.

Заметим, что если $\bar{s}_k \neq \bar{\bar{s}}_k$ для некоторого $k : 1 \leqslant k \leqslant i$, то $I_{\bar{s}_1\bar{s}_2\ldots\bar{s}_i} \cap I_{\bar{\bar{s}}_1\bar{\bar{s}}_2\ldots\bar{\bar{s}}_i} = \varnothing$ (Действительно, пусть $s_k(\bar{x}_0) \neq s_k(\bar{\bar{x}}_0)$. Тогда $f^{k-1}(\bar{x}_0) \neq f^{k-1}(\bar{\bar{x}}_0)$ (см. опр. $s_k(x)$) $\Rightarrow \bar{x}_0 \neq \bar{\bar{x}}_0$ и множества $I_{\bar{s}_1\bar{s}_2\ldots\bar{s}_i}$ и $I_{\bar{\bar{s}}_1\bar{\bar{s}}_2\ldots\bar{\bar{s}}_i}$ не могут иметь ни одной общей точки.)

Так как I-множества — это ø/интервал/отрезок/полуинтервал, то $\forall$ два непересекающихся непустых I-множества можно строго упорядочить на прямой.

Определение 4. Будем говорить, что два непересекающихся непустых множества $I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i}$ и $I_{\overline{\overline{s}}_1\overline{\overline{s}}_2\ldots\overline{\overline{s}}_i}$ подчинены отношению $I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i} < I_{\overline{\overline{s}}_1\overline{\overline{s}}_2\ldots\overline{\overline{s}}_i}$, если $\overline{x}_0 < \overline{\overline{x}}_0$ для $\forall$ $\overline{x}_0 \in I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i}, \overline{\overline{x}}_0 \in I_{\overline{\overline{s}}_1\overline{\overline{s}}_2\ldots\overline{\overline{s}}_i}$.

В силу сказанного выше, данное отношение однозначно определено для $\forall$ двух несовпадающих непустых I-множеств.

Рассмотрим теперь две производные от последовательности $S = s_1s_2\ldots$, последовательности $P = \{p_i\}_{i=0}^{\infty}, p_i \in \{-1, 1\}$ и $W = \{w_i\}_{i=1}^{\infty}$, которые помогут нам упорядочить на прямой $\mathbb{R}$ I-множества, а затем и траектории ДС.

Определение 5. Рассмотрим конечную последовательность символов $s_1s_2\ldots s_i$ в алфавите $\{0, 1, \ldots, n\}$. Определим две ф-и от этой последовательности $p_j(s_1s_2\ldots s_i)$ и $w_j(s_1s_2\ldots s_i)$(здесь индекс ф-и p изменяется от 0 до i, а ф-и w — от 1 до i) индукцией по j:

$j = 0:$

$$p_0(s_1s_2\ldots s_i) = 1 \text{ для } \forall\, s_1s_2\ldots s_i.$$

$j > 0:$

$$w_j(s_1s_2\ldots s_i) = \begin{cases} s_j, & \text{если } p_{j-1}(s_1s_2\ldots s_i) = 1, \\ n - s_j, & \text{если } p_{j-1}(s_1s_2\ldots s_i) = -1; \end{cases}$$

$$p_j(s_1s_2\ldots s_i) = \begin{cases} p_{j-1}(s_1s_2\ldots s_i), & \text{если } s_i \text{ — четное}, \\ -p_{j-1}(s_1s_2\ldots s_i), & \text{если } s_i \text{ — нечетное}. \end{cases}$$

Заметим, что ф-я w_j принимает значения в алф. $\{0, 1, \ldots, n\}$, а ф-я p_j принимает два значения из множества $\{-1, 1\}$.

Заметим также, что в силу определения значения w_j и p_j не зависят от s_k при $k > j$. То есть, $w_j(s_1s_2\ldots s_j\ldots s_i) = w_j(s_1s_2\ldots s_j)$ и $p_j(s_1s_2\ldots s_j\ldots s_i) = p_j(s_1s_2\ldots s_j)$.

Раскроем теперь смысл введенных ф-й.

Утверждение 2. *Рассмотрим n-модальное одномерное отображение f и последовательность $\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i$ такую, что $I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i} \neq \varnothing$ для данного отображения. Тогда*:

$p_i(\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i) = 1$, *если f^i возрастает на $I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i}$.*

$p_i(\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i) = -1$, *если f^i убывает на $I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i}$.*

Доказательство 2. Докажем индукцией по i:

а) $i = 1$:

Согласно опр. 5, $p_1(\overline{s}_1) = \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{s}_1 \text{ — четное}, \\ -1, & \text{если } \overline{s}_1 \text{ — нечетное}, \end{cases}$

f монотонна на $I_{\overline{s}_1}$(см. утв. 1). $I_{\overline{s}_1} = [x_{c_{\overline{s}_1}}; x_{c_{\overline{s}_1+1}})$ и согласно предположению о типе ф-ии $f(f$ — (+-+...)) получаем:

$$\begin{cases} f \text{ возрастает на } I_{\overline{s}_1}, & \text{если } \overline{s}_1 \text{ — четное}, \\ f \text{ убывает на } I_{\overline{s}_1}, & \text{если } \overline{s}_1 \text{ — нечетное}. \end{cases}$$

Учитывая теперь, что возможны только два варианта относительно четности $\overline{s}_1$, получаем требуемую в формулировке зависимость между значением $p_1(\overline{s}_1)$ и типом монотонности f на $I_{\overline{s}_1}$.

б) Пусть для $j = i - 1$ утв. уже доказано.

Вновь представим ф-ию $f^i(x)$ на $I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i} \subset I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_{i-1}}$ в виде композиции: $\begin{cases} f^i(x) = f(y), \\ y = f^{i-1}(x), \end{cases}$ где $y \in$ $\in [x_{c_{\overline{s}_i}}; x_{c_{\overline{s}_i+1}})$ по опр. 1, а тип монотонности $f^{i-1}(x)$ задается значением $p_{i-1}(\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_{i-1})$ (1 — возрастает, -1 — убывает) по предположению индукции (см. рис. 3).

Тогда если

1) $\overline{s}_i$-четное, то $f(y)$ возрастает при $y \in [x_{c_{\overline{s}_i}}; x_{c_{\overline{s}_i+1}})$ и тип монотонности $f^i(x)$ на $I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i}$ совпадает с типом мнотонности $f^{i-1}(x)$ на $I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_{i-1}}$. Учитывая также, что в данном случает $p_i(\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i) = p_{i-1}(\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_{i-1})$(опр. 5), получаем требуемую в условии связь между типом монотонности $f^i(x)$ и значением $p_i(\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i)$.
2) случай $\overline{s}_i$-нечетное рассматривается аналогично ($f(y)$ убывает $\Rightarrow$ тип монотонности $f^i(x)$ и $f^{i-1}(x)$ различен и $p_i(\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i) = -p_{i-1}(\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_{i-1})$).

$\square$

Утверждение 3. *Рассмотрим две конечные последовательности символов $\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i$ и $\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{\overline{s}}_i$, отличающиеся в последнем и только последнем символе: $\overline{s}_i \neq \overline{\overline{s}}_i$. Тогда $I_{\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i} < I_{\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{\overline{s}}_i} \Leftrightarrow w_i(\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i) < w_i(\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{\overline{s}}_i)$ при условии, что $I_{\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i} \neq \varnothing$ и $I_{\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{\overline{s}}_i} \neq \varnothing$.*

Доказательство 3. Так как $\overline{s}_i \neq \overline{\overline{s}}_i$ множества $I_{\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i}$ и $I_{\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{\overline{s}}_i}$ не пересекаются и выполнено одно из двух: либо $I_{\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i} < I_{\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{\overline{s}}_i}$, либо $I_{\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i} > I_{\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{\overline{s}}_i}$.

Рассмотрим два случая:

а) $p_{i-1}(\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_{i-1}) = 1$.
Тогда согласно утв. 2 $f^{i-1}(x)$ возрастает на $I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_{i-1}}$.
По опр. 5 $w_i(\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i) = \overline{s}_i$ и $w_i(\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{\overline{s}}_i) = \overline{\overline{s}}_i$.
Пусть $\overline{x}_0 \in I_{\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i}, \overline{\overline{x}}_0 \in I_{\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{\overline{s}}_i}$. Докажем, что $\overline{x}_0 < \overline{\overline{x}}_0 \Leftrightarrow w_i(\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i) < w_i(\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{\overline{s}}_i)$, откуда и будет следовать требуемое утверждение.
$I_{\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i} = I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_{i-1}} \cap (f^{i-1})^{-1}([x_{c_{\overline{s}_i}}; x_{c_{\overline{s}_i+1}})) \Rightarrow \overline{x}_0 \in I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_{i-1}}$ и $f^{i-1}(\overline{x}_0) \in [x_{c_{\overline{s}_i}}; x_{c_{\overline{s}_i+1}})$.
$I_{\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{\overline{s}}_i} = I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_{i-1}} \cap (f^{i-1})^{-1}([x_{c_{\overline{\overline{s}}_i}}; x_{c_{\overline{\overline{s}}_i+1}})) \Rightarrow \overline{\overline{x}}_0 \in I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_{i-1}}$ и $f^{i-1}(\overline{\overline{x}}_0) \in [x_{c_{\overline{\overline{s}}_i}}; x_{c_{\overline{\overline{s}}_i+1}})$.
$\overline{x}_0 \neq \overline{\overline{x}}_0 (I_{\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i} \cap I_{\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{\overline{s}}_i} = \varnothing)$, поэтому
$\overline{x}_0 < \overline{\overline{x}}_0 \overset{\substack{\text{возр. } f^{i-1}(x) \\ \text{на } I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_{i-1}}}}{\Leftrightarrow} f^{i-1}(\overline{x}_0) < f^{i-1}(\overline{\overline{x}}_0) \Leftrightarrow \overline{s}_i < \overline{\overline{s}}_i \overset{\text{опр. } 5}{\Leftrightarrow} w_i(\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i) < w_i(\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{\overline{s}}_i)$.

б) $p_{i-1}(\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_{i-1}) = -1$.
Доказывается аналогично:
$\overline{x}_0 < \overline{\overline{x}}_0 \overset{\substack{\text{убыв. } f^{i-1}(x) \\ \text{на } I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_{i-1}}}}{\Leftrightarrow} f^{i-1}(\overline{x}_0) > f^{i-1}(\overline{\overline{x}}_0) \Leftrightarrow \overline{s}_i > \overline{\overline{s}}_i \overset{\text{опр. } 5}{\Leftrightarrow} n - w_i(\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i) > n - w_i(\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{\overline{s}}_i) \Leftrightarrow$ $w_i(\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i) < w_i(\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{\overline{s}}_i)$.

$\square$

Определение 6. Как и раньше рассмотрим конечную последовательность символов $s_1s_2\ldots s_i$ в алфавите $\{0, 1, \ldots, n\}$. Введем числовую функцию от этой последовательности следующим образом:

$$\tau(s_1s_2\ldots s_i) = \sum_{j=1}^{i} \frac{w_j(s_1s_2\ldots s_i)}{(n+1)^j} = 0.w_1w_2\ldots w_i.$$

Утверждение 4. *Рассмотрим две несовпадающие целиком последовательности $\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i$ и $\overline{\overline{s}}_1\overline{\overline{s}}_2\ldots\overline{\overline{s}}_i$. Тогда $\tau(\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i) < \tau(\overline{\overline{s}}_1\overline{\overline{s}}_2\ldots\overline{\overline{s}}_i) \Leftrightarrow I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i} < I_{\overline{\overline{s}}_1\overline{\overline{s}}_2\ldots\overline{\overline{s}}_i}$, при условии, что $I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i} \neq \varnothing$ и $I_{\overline{\overline{s}}_1\overline{\overline{s}}_2\ldots\overline{\overline{s}}_i} \neq \varnothing$.*

Доказательство 4. Обозначим для краткости:

$$\overline{w}_j = w_j(\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i), \overline{\overline{w}}_j = w_j(\overline{\overline{s}}_1\overline{\overline{s}}_2\ldots\overline{\overline{s}}_i) \text{ для } j = 1, \ldots, i.$$

Тогда по опр. 6:

$$\overline{\tau} = \tau(\overline{s}_1\overline{s}_2\dots\overline{s}_)) = \sum_{j=1}^{i}\frac{\overline{w}_j}{(n+1)^j} = 0.\overline{w}_1\overline{w}_2\dots\overline{w}_i (\text{в (n+1)-й системе исчисления}),$$

$$\overline{\overline{\tau}} = \tau(\overline{\overline{s}}_1\overline{\overline{s}}_2\dots\overline{\overline{s}}_)) = \sum_{j=1}^{i}\frac{\overline{\overline{w}}_j}{(n+1)^j} = 0.\overline{\overline{w}}_1\overline{\overline{w}}_2\dots\overline{\overline{w}}_i.$$

Последовательности $\overline{s}_1\overline{s}_2\dots\overline{s}_i$ и $\overline{\overline{s}}_1\overline{\overline{s}}_2\dots\overline{\overline{s}}_i$ не совпадают $\Rightarrow \exists\, k : 1 \leqslant k \leqslant i, \overline{s}_k \neq \overline{\overline{s}}_k$ и $\overline{s}_j = \overline{\overline{s}}_j$ при $j = 1, \dots, k-1$. Откуда следует $\overline{w}_k = \overline{\overline{w}}_k, \overline{w}_j = \overline{\overline{w}}_j$ при $j = 1, \dots, k-1, \overline{\tau} \neq \overline{\overline{\tau}}$.

Тогда:

$$\overline{\tau} < \overline{\overline{\tau}} \overset{\substack{\text{св-ва}\\ \text{сравн.}\\ \text{чисел}}}{\Leftrightarrow} \overline{w} < \overline{\overline{w}} \overset{\substack{\text{по утв. 3}\\ I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\dots\overline{s}_k}\neq\varnothing\\ I_{\overline{\overline{s}}_1\overline{\overline{s}}_2\dots\overline{\overline{s}}_k}\neq\varnothing\\ \overline{s}_j=\overline{\overline{s}}_j,\ j=1\dots k-1\\ \overline{s}_k\neq\overline{\overline{s}}_k}}{\Leftrightarrow} I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\dots\overline{s}_k} < I_{\overline{\overline{s}}_1\overline{\overline{s}}_2\dots\overline{\overline{s}}_k} \overset{\substack{I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\dots\overline{s}_i}\subset I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\dots\overline{s}_k}\\ I_{\overline{\overline{s}}_1\overline{\overline{s}}_2\dots\overline{\overline{s}}_i}\subset I_{\overline{\overline{s}}_1\overline{\overline{s}}_2\dots\overline{\overline{s}}_k}}}{\Leftrightarrow} I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\dots\overline{s}_i} < I_{\overline{\overline{s}}_1\overline{\overline{s}}_2\dots\overline{\overline{s}}_i}.$$

□

Распространим определение τ на бесконечные последовательности.

Определение 7. Рассмотрим бесконечную последовательность $S = s_1s_2\dots s_i\dots$ в алфавите $\{0, 1, \dots, n\}$. Введем τ следующим образом:

$$\tau(S) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{w_j(s_1s_2\dots s_j)}{(n+1)^j} = 0.w_1w_2\dots w_i\dots$$

Поскольку каждой точке $x \in \mathbb{R}$ соответствует одна и только одна последовательность $S = S(x)$, мы можем определить ф-ию τ и для точек.

Определение 8. $\tau(x) = \tau(S(x))$.

Утверждение 5. $\overline{x}_0 \leqslant \overline{\overline{x}}_0 \Rightarrow \tau(\overline{x}_0) \leqslant \tau(\overline{\overline{x}}_0)$.

Доказательство 5. Для краткости, введем обозначения $(i = 1, \dots)$:

$$\overline{s}_i = s_i(\overline{x}_0), \qquad \overline{\overline{s}}_i = s_i(\overline{\overline{x}}_0),$$

$$\overline{I}_i = I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\dots\overline{s}_i}, \qquad \overline{\overline{I}}_i = I_{\overline{\overline{s}}_1\overline{\overline{s}}_2\dots\overline{\overline{s}}_i},$$

$$\overline{w}_i = w_i(\overline{s}_1\overline{s}_2\dots\overline{s}_i), \qquad \overline{\overline{w}}_i = w_i(\overline{\overline{s}}_1\overline{\overline{s}}_2\dots\overline{\overline{s}}_i).$$

Докажем утверждение от противного: пусть$\tau(\overline{x}_0) > \tau(\overline{\overline{x}}_0)$.

Так как $\tau(\overline{x}_0) = 0.\overline{w}_1\overline{w}_2\dots\overline{w}_i\dots, \tau(\overline{\overline{x}}_0) = 0.\overline{\overline{w}}_1\overline{\overline{w}}_2\dots\overline{\overline{w}}_i\dots$, то из предположения следует, что $\exists\, k : \overline{w}_i = \overline{\overline{w}}_i$ при $i < k$ и $\overline{w}_k > \overline{\overline{w}}_k$.

Согласно утв. 3 получаем $\overline{I}_k > \overline{\overline{I}}_k(\overline{s}_i = \overline{\overline{s}}_i$ при $i < k, \overline{s}_k \neq \overline{\overline{s}}_k, \overline{w}_k > \overline{\overline{w}}_k$ и $\overline{I}_k \neq \varnothing, \overline{\overline{I}}_k \neq \varnothing$, т.к. $\overline{x}_0 \in \overline{I}_i$ и $\overline{\overline{x}}_0 \in \overline{\overline{I}}_i$ для $\forall\, i)$. Теперь по опр. 4 и учитывая $\overline{x}_0 \in \overline{I}_k, \overline{\overline{x}}_0 \in \overline{\overline{I}}_k$, заключаем $\overline{x}_0 > \overline{\overline{x}}_0$, что противоречит с условием. □

Перейдем теперь к рассмотрению условий существования в данной ДС f хотя бы одной точки с заданной траекторией $\overline{S} = \overline{s}_1\overline{s}_2\dots\overline{s}_i\dots$.

Определение 9. Для данной ДС f определим следующие параметры$(q = 1, \dots, n)$:

1) $G_q = S(f(x_{c_q}))$ назовем **делящей траекторией** системы f.
2) $g_q = \tau(f(x_{c_q}))$ назовем **топологическим параметром** системы f.

Теорема 1. *Рассмотрим ДС $f(+-\dots)$ с набором топологических параметров $g_1, g_2, \dots, g_n$. Дополнительно потребуем, чтобы на первом и последнем лучах области определения (I_0,I_n) функция f бесконечно возрастала (или убывала, в зависимости от типа монотонности на соответсвующем интервале). Тогда в данной ДС траектория $\overline{S} = \overline{s}_1\overline{s}_2\dots\overline{s}_i\dots\exists$ ($\exists$ хотя бы одна точка $x_0 : S(x_0) = \overline{S}$)$\Leftrightarrow \forall\, q = 1, \dots, n \ \ \forall\, k \geqslant 1$ таких, что $(\overline{s}_k = q-1) \vee (\overline{s}_k = q)$ выполнено:*

$$\tau(\sigma^k\overline{S}) \leqslant g_q, \text{ если } q \text{ — нечетное},$$

$$\tau(\sigma^k\overline{S}) \geqslant g_q, \text{ если } q \text{ — четное}.$$

Доказательство 6. **Необходимость.** Заметим, что $\forall\, x : x_{c_{q-1}} \leqslant x < x_{c_{q+1}}$ выполнено:
$f(x) \leqslant f(x_{c_q})$, если q — нечетное (x_{c_q} — локальный максимум; $f(x)$ возрастает при $x_{c_{q-1}} \leqslant x < x_{c_q}$ и убывает при $x_{c_q} \leqslant x < x_{c_{q+1}}$).
$f(x) \geqslant f(x_{c_q})$, если q — четное (аналогично).

Перейдем теперь к доказательству. Пусть$\exists\, x_0 : S(x_0) = \overline{S}$. Рассмотрим произвольные $q, k : 1 \leqslant q \leqslant n$, $k \geqslant 1, (\overline{s}_k = q-1) \vee (\overline{s}_k = q)$. Из последнего, учитывая опр. 1, получаем $(x_{c_{q-1}} \leqslant f^{k-1}(x_0) < x_{c_q}) \vee$ $\vee (x_{c_q} \leqslant f^{k-1}(x_0) < x_{c_{q+1}}) \Leftrightarrow (x_{c_{q-1}} \leqslant f^{k-1}(x_0) < x_{c_{q+1}})$. Положив теперь в замечании выше $x = f^{k-1}(x_0)$, получим:
$f^k(x_0) = f(f^{k-1}(x_0)) \leqslant f(x_{c_q}) \overset{\text{монотонность } \tau}{\Leftrightarrow} \tau(f^k(x_0)) \leqslant \tau(f(x_{c_q})) \Leftrightarrow \tau(S(f^k(x_0))) \leqslant g_q \Leftrightarrow \tau(\sigma^k S(f(x_0))) \leqslant g_q \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \tau(\sigma^k \overline{S})) \leqslant g_q$, если q — нечетное.
$f^k(x_0) = f(f^{k-1}(x_0)) \geqslant f(x_{c_q}) \overset{\text{аналогично}}{\Leftrightarrow} \tau(\sigma^k \overline{S})) \geqslant g_q$, если q — четное.

Достаточность. Рассмотрим последовательность множеств $I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i}$. Докажем по индукции, что все они не являются пустыми. Для этого нам понадобится ввести несколько дополнительных обозначений и сформулировать индуктивное утверждение. Обозначим через x_i^L и x_i^R левый и правый концы $I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i}$ (они могут быть равны $\pm\infty$). Утверждение будет состоять из четырех частей:

1) $I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i}$ — не пусто.
2) $\exists\, q_i^L, v_i^L, q_i^R, v_i^R$: $1 \leqslant q_i^L \leqslant n, v_i^L \geqslant 1$ и $1 \leqslant q_i^R \leqslant n, v_i^R \geqslant 1$, такие что $f^i(x_i^L) = f^{v_i^L}(x_{c_{q_i^L}})$ и $f^i(x_i^R) = f^{v_i^R}(x_{c_{q_i^R}})$.
3) $\overline{s}_{i-v_i^L+1} \in \{q_i^L - 1, q_i^L\}$, $\overline{s}_{i-v_i^L+l+1} = s_l(f(x_{c_{q_i^L}}))$ для $l = 1, .., v_i^L - 1$ и аналогично для индекса R.
4) $p_1(q_i^L) = p_{i-v_i^L+1}(\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i)$ и аналогично для индекса R.

Схема индуктивного перехода в доказательстве может быть проиллюстрирована рис. 3, фактически идея содержится в указанном выше индуктивном предположении, пункты которого доказываются в указанном порядке. Остановимся подробнее на доказательстве пункта $\boxed{1)}$. Пусть для $i-1$ индуктивное предположение выполнено. Предположим, что $p_{i-1}(\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_{i-1}) = 1$, и согласно утв. 2, f^{i-1} возрастает на $I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_{i-1}}$. Чтобы показать, что $I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i}$ не является пустым множеством, нам достаточно доказать, что $x_{c_{\overline{s}_i+1}} \geqslant f^{i-1}(x_{i-1}^L)$ и $x_{c_{\overline{s}_i}} \leqslant f^{i-1}(x_{i-1}^R)$. Эти неравенства аналогичны, докажем первое из них. По индуктивному предположению мы имеем $f^{i-1}(x_{i-1}^L) = f^{v_{i-1}^L}(x_{c_{q_{i-1}^L}})$. Из условия теоремы и $\boxed{3)}$ индуктивного предположения следует, что $\tau(\sigma^{i-1-v_{i-1}^L+1}\overline{S}) \cdot p_1(q_{i-1}^L) \geqslant g_{q_{i-1}^L} \cdot p_1(q_{i-1}^L)$ или $\tau(\overline{s}_{i-v_{i-1}^L+1}..) \cdot p_1(q_{i-1}^L) \geqslant \tau(s_1(f(x_{c_{q_{i-1}^L}}))s_2(f(x_{c_{q_{i-1}^L}}))..) \cdot p_1(q_{i-1}^L)$. Согласно тому же $\boxed{3)}$ индуктивного предположения имеем $\overline{s}_{i-v_{i-1}^L+l} = s_l(f(x_{c_{q_{i-1}^L}}))$ для $l = 1, .., v_{i-1}^L - 1$, из чего следует, что первые $v_{i-1}^L - 1$ символов в строках-аргументах функции τ в последнем неравенстве совпадают. Тогда, учитывая определение τ, мы можем сравнить символ с номером v_{i-1}^L, а именно: $\overline{s}_i \cdot p_1(q_{i-1}^L) \cdot p_{v_{i-1}^L-1}(\overline{s}_{i-v_{i-1}^L+1}..) \geqslant s_{v_{i-1}^L}(f(x_{c_{q_{i-1}^L}})) \cdot p_1(q_{i-1}^L) \cdot p_{v_{i-1}^L-1}(\overline{s}_{i-v_{i-1}^L+1}..)$. Теперь используем $\boxed{4)}$ индуктивного предположения, чтобы раскрыть $p_1(q_{i-1}^L)$. Получим, что $p_1(q_{i-1}^L) \cdot p_{v_{i-1}^L-1}(\overline{s}_{i-v_{i-1}^L+1}..) = p_{i-v_{i-1}^L}(\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_{i-1}) \cdot p_{v_{i-1}^L-1}(\overline{s}_{i-v_{i-1}^L+1}..) = p_{i-v_{i-1}^L}(\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_{i-v_{i-1}^L}) \cdot p_{v_{i-1}^L-1}(\overline{s}_{i-v_{i-1}^L+1}..) = p_{i-1}(\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_{i-1})$. Последнее в рассматриваемом случае равно 1, и неравенство переходит в $\overline{s}_i \geqslant s_{v_{i-1}^L}(f(x_{c_{q_{i-1}^L}})) = s_1(f^{v_{i-1}^L-1}(f(x_{c_{q_{i-1}^L}}))) = s_1(f^{v_{i-1}^L}(x_{c_{q_{i-1}^L}})) =$ $= s_1(f^{i-1}(x_{i-1}^L))$. Из последнего следует $x_{c_{\overline{s}_i+1}} \geqslant s_1(f^{i-1}(x_{i-1}^L))$, что и требовалось доказать.

Заметим, что мы не можем применить в явном виде для последовательности $I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i}$ теорему об общей точке системы вложенных отрезков, поскольку не все из них обязаны быть отрезками (это могут быть интервалы и полуинтервалы). Но мы можем заметить, что теорема об общей точке будет верна и для системы вложенных интервалов (полуинтервалов), если исключить одни частный случай, а именно случай, когда начиная с некоторого номера, у всех интервалов совпадает левый (правый) конец. Действительно, в этом случае для любого интервала, зная, что у какого-то из последующих интервалов оба конца будут сдвинуты, мы заменим этот интервал на вложенный отрезок с концами, совпадающими с концами этого последующего интервала. У построенной таким образом системы вложенных отрезков будет общая точка, и эта общая точка будет одновременно принадлежать и всем исходных интервалам. Случай, когда начиная с определенного элемента у всех множеств $I_{\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i}$ будет совпадать один из концов можно рассмотреть отдельно. В этом случае, пользуясь приведенными выше рассуждениями, мы можем заключить, что последовательность $\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i$

с какого-то момента будет целиком совпадать с одной из делящих траекторий G_q, и следовательно, точка с соответствующей символической траекторией будет существовать в системе.

□

Замечание 1. При доказательстве необходимости мы не использовали условие про бесконечное возрастание (убывание) f.

Таким образом, все n-модальные одномерные ДС параметризуются n вещественными параметрами $g_q \in [0;1]$(на самом деле, эти параметры могут принимать не любые вещественные значения — в пространстве параметров существуют так называемые запрещенные области, но это в нашем рассмотрении не существенно). В частности, унимодальные отображения имеют всего один топологический параметр, который задает на множестве всех траекторий строгий порядок: для любых двух тракторий $S1$ и $S2$ можно выбрать более сильную (пусть это будет $S1$) так, что из существования в любой унимодальной системе $S1$ будет следовать существование $S2$. Данный факт записывается так: $S1 \blacktriangleright S2$. При численных эксперементах данные закономерности подтверждаются порядком появления/исчезновения устойчивых циклов.

В ДС с бимодальным отображением, однако это отношение определено уже не для любых двух траекторий [7]. Далее мы выделим подкласс бимодальных отображений, в котором остается всего один топологический параметр. Этот подкласс представляет особый интерес при рассмотрении систем дифференциальных уравнений с точки зрения, предложенной в [1].

Введем еще несколько понятий, которые понадобятся нам впоследствии.

Определение 10. Рассмотрим символическую траекторию $S = s_1 s_2 \ldots$. Введем семейство функций $(q = 1, \ldots, n)$:

$$\tau_q^{max}(S) = \sup_{k \geqslant 1: s_k \in \{q-1, q\}} \tau(\sigma^k S),$$

$$\tau_q^{min}(S) = \inf_{k \geqslant 1: s_k \in \{q-1, q\}} \tau(\sigma^k S).$$

Замечание 2. Используя опр. 10, мы можем переформулировать т. 1 следующим образом:

Рассмотрим ДС $f(+-\ldots)$ с набором топологических параметров $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Тогда в данной ДС траектория $\overline{S} = \overline{s}_1 \overline{s}_2 \ldots \overline{s}_i \ldots \exists \Leftrightarrow \forall\, q = 1, \ldots, n$ выполнено:

$$\tau_q^{max}(\overline{S}) \leqslant g_q, \text{ если q — нечетное,}$$

$$\tau_q^{min}(\overline{S}) \geqslant g_q, \text{ если q — четное.}$$

Определение 11. Будем писать $\overline{S} \blacktriangleright \overline{\overline{S}}$ для некоторого класса ДС, если для любой из систем этого класса из существования траектории $\overline{S}$ следует существование $\overline{\overline{S}}$.

Заметим, что эта запись существенно зависит от типа ДС (помимо одномерных отображений можно также применять символическую динамику и в других типах ДС) и также от класса отображений ДС. Например, далее будут доказаны некоторые утверждения указанного типа для специального класса бимодальных отображений. Во всем классе бимодальных отображений эти утверждения уже не верны.

Утверждение 6. *Рассмотрим ДС $f(+-\ldots)$. Тогда если $\forall\, q = 1, \ldots, n$ выполнено:*

$$\tau_q^{max}(\overline{S}) \geqslant \tau_q^{max}(\overline{\overline{S}}), \text{ если } q \text{ — нечетное,}$$

$$\tau_q^{min}(\overline{S}) \leqslant \tau_q^{min}(\overline{\overline{S}}), \text{ если } q \text{ — четное,}$$

то $\overline{S} \blacktriangleright \overline{\overline{S}}$

Доказательство 7. Пусть в рассматриваемой ДС существует $\overline{S}$. Тогда по зам. 2 и по условию имеем:

$$g_q \geqslant \tau_q^{max}(\overline{S}) \geqslant \tau_q^{max}(\overline{\overline{S}}), \text{ если q — нечетное,}$$

$$g_q \leqslant \tau_q^{min}(\overline{S}) \leqslant \tau_q^{min}(\overline{\overline{S}}), \text{ если q — четное,}$$

откуда по тому же зам. 2 имеем, что в системе существует $\overline{\overline{S}}$.

□

Определение 12. Символическую траекторию вида $(s_1 s_2 \ldots s_p)^\infty$ будем называть **символическим циклом периода p** или просто **циклом**. Будем говорить, что цикл S является **собственным циклом периода p**, если:

1) S — цикл периода p.
2) $\forall\, p' < p$ S не является циклом периода p'.

2. Полимодальные отображения, предложенные Kai T. Hansen

В работе [7] Kai T. Hansen был предложен для рассмотрения еще один вид полимодальных отображений. Согласно предположению автора эти отображения могут иметь значение для описания правил сосуществования циклов и других траекторий в т. н. отображении Хенона. Статья [7] носит идейный характер, т. е. формальное описание введенных отображений отсутствует. В нашей работе мы несколько формализуем этот подход, единообразно с секцией 1 введем понятия и сформулируем (без доказательтсва) сходные утверждения, а также рассмотрим вопрос непрерывной релиализации таких отображений, что потребует добавить к списку необходимых свойств данных отображений, уже указанных в [7] еще одно.

Из работы [7]:

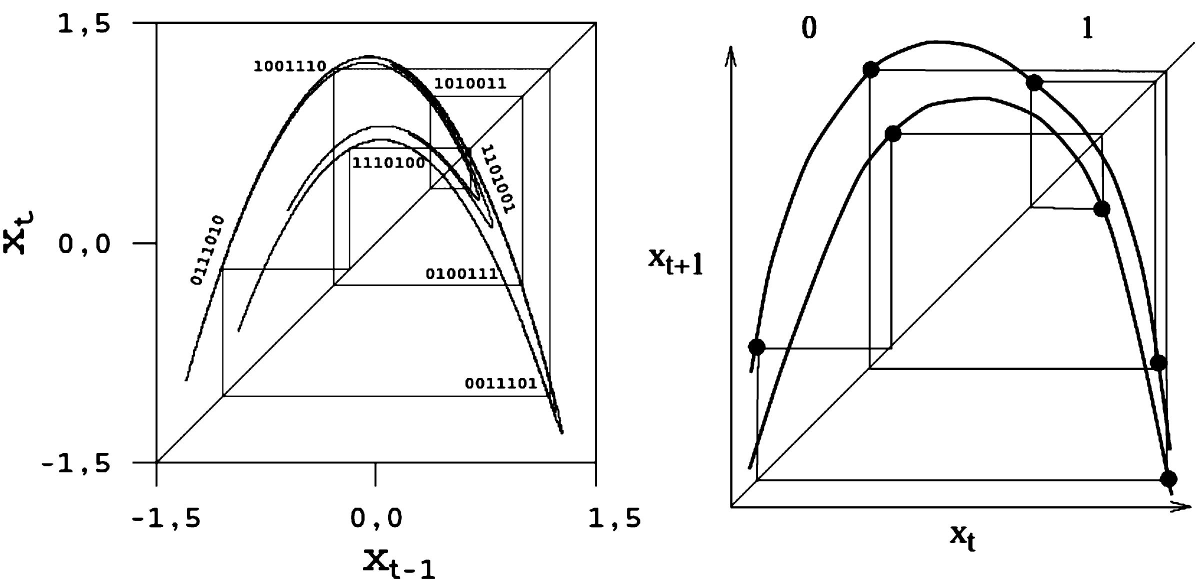

Рис. 4. Слева — двумерное отображение Хенона; справа — бимодальное отображение, предложенное в [7]

Рассмотрим набор из 2^b унимодальных функций $f_{c_{-b}\ldots c_{-1}}(x)$ типа $(+-\ldots)$, где в качестве индекса берутся всевозможные строки $c_{-b}\ldots c_{-1}$ длины b (b — целое, $b \geqslant 0$), составленные из символов $0, 1$. В текущем изложении дополнительно потребуем, чтобы все функции имели экстремум в одной и той же точке x_{c_1}. Далее рассмотрим связанную с этой системой функций дискретную динамическую систему. В данном типе ДС, в отличие от полимодальных отображений, рассмотренных выше, положение на шаге $i+1$ определяется не только положением на предыдущем шаге, но и некоторой предысторией:

$$x_{i+1} = F(x_i, x_{i-1}, \ldots, x_{i-b}) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \ldots \\ f_{c_{-b}\ldots c_{-1}}(x_i), \text{ если } s_1(x_{i-b}) = c_{-b}, \ldots, s_1(x_{i-1}) = c_{-1} \\ \ldots \end{array} \right. \tag{1}$$

Здесь мы используем введенную ранее функцию s_1 вещественно аргумента, несмотря на то, что данная функция была формально введена относительно полимодальных отображений предыдущего типа. Это можно делать, поскольку s_1 определяется лишь положением своего аргумента (номером интервала монотонности, в котором он лежит) и не зависит от последующих итераций. Отметим также, что поскольку все рассматриваемые функции $f_{\ldots}$ имеют экстремум в одной и той же точке, указание номера функции не требуется.

Договоримся об использовании знака многократного применения функции F — F^i, поскольку понимать этот знак как обычную композицию функций уже нельзя. Будем считать, что

$$F^k(x_i, x_{i-1}, \ldots, x_{i-b}) = F(F^{k-1}(x_i, x_{i-1}, \ldots, x_{i-b}), F^{k-2}(x_i, x_{i-1}, \ldots, x_{i-b}), \ldots).$$

Причем под F^0 автоматически понимается x_i, под F^{-1} x_{i-1} и т. д.

Заметим также, что значение функции $F(x_i, x_{i-1}, \ldots, x_{i-b})$ по определению однозначно определяется значениями первого аргумента x_i и значениями функций $s_1(x_{i-1}), s_1(x_{i-2}), \ldots$ последующих аргументов. Поэтому там, где это требуется, можно пользоваться следующим вариантом функции: $F(x_i, c_{-1}, \ldots, c_{-b})$, где все аргументы, начиная со второго — это символы алфавита $\{0, 1\}$. То же самое касается и итераций F^k.

Аналогично предыдущему разделу введем функции S и s_k, связанные с рассматриваемым полимодальным отображением.

Определение 13. $s_i(x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-b}) = s_i(x_0, s_1(x_{-1}), \ldots, s_1(x_{-b})) = s_1(F^{i-1}(x_0, s_1(x_{-1}), \ldots, s_1(x_{-b})))$ для всех $i > 1$. $S(x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-b}) = S(x_0, s_1(x_{-1}), \ldots, s_1(x_{-b})) = s_1(x_0, s_1(x_{-1}), \ldots, s_1(x_{-b}))s_2(\ldots)\ldots$

Определение 14. Обозначим через $\mathbf{I}_{c_{-b}\ldots c_{-1}.\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i}$ множество точек $\{x \in \mathbb{R} : s_k(x, c_{-1}, \ldots, c_{-b}) = \overline{s}_k$ для $\forall\ k = 1, \ldots, i\}$.

Утверждение 7. *$\forall\, c_{-b}\ldots c_{-1}.\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i$ выполнено:*

1) *$I_{c_{-b}\ldots c_{-1}.\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i}$ — это ø/интервал/отрезок/полуинтервал, один или оба конца которого могут быть равны $\pm\infty$.*
2) *$F^i(x, c_{-1}, \ldots, c_{-b})$ — монотонна на $I_{c_{-b}\ldots c_{-1}.\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i}$.*

Определение 15. Два непересекающихся непустых множества $I_{c_{-b}\ldots c_{-1}.\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i}$ и $I_{c_{-b}\ldots c_{-1}.\overline{\overline{s}}_1\overline{\overline{s}}_2\ldots\overline{\overline{s}}_i}$ подчинены отношению $I_{c_{-b}\ldots c_{-1}.\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i} < I_{c_{-b}\ldots c_{-1}.\overline{\overline{s}}_1\overline{\overline{s}}_2\ldots\overline{\overline{s}}_i}$, если $\overline{x}_0 < \overline{\overline{x}}_0$ для $\forall\ \ \overline{x}_0 \in I_{c_{-b}\ldots c_{-1}.\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i}$, $\overline{\overline{x}}_0 \in I_{c_{-b}\ldots c_{-1}.\overline{\overline{s}}_1\overline{\overline{s}}_2\ldots\overline{\overline{s}}_i}$.

Утверждение 8. *Рассмотрим введенное выше 2^b-модальное отображение (и ДС) F и последовательности $c_{-b}\ldots c_{-1}\ \overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i$ такие, что $I_{c_{-b}\ldots c_{-1}.\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i} \neq \varnothing$ для данного отображения. Тогда:*

$p_i(\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i) = 1$, если $F^i(x, c_{-1}, \ldots, c_{-b})$ как функция первого аргумента возрастает на $I_{c_{-b}\ldots c_{-1}.\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i}$.

$p_i(\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i) = -1$, если $F^i(x, c_{-1}, \ldots, c_{-b})$ как функция первого аргумента убывает на $I_{c_{-b}\ldots c_{-1}.\overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i}$.

Утверждение 9. *Рассмотрим две конечные последовательности символов $c_{-b}\ldots c_{-1}.\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i$ и $c_{-b}\ldots c_{-1}.\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{\overline{s}}_i$, отличающиеся в последнем и только последнем символе: $\overline{s}_i \neq \overline{\overline{s}}_i$. Тогда $I_{c_{-b}\ldots c_{-1}.\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i} < I_{c_{-b}\ldots c_{-1}.\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{\overline{s}}_i} \Leftrightarrow w_i(\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i) < w_i(\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{\overline{s}}_i)$ при условии, что $I_{c_{-b}\ldots c_{-1}.\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{s}_i} \neq \varnothing$ и $I_{c_{-b}\ldots c_{-1}.\overline{s}_1\ldots\overline{s}_{i-1}\overline{\overline{s}}_i} \neq \varnothing$.*

В качестве определения τ как функции от последовательности символов можно оставить определение из предыдущего раздела. А для τ как функции вещественного аргумента необходимо добавить зависимость от <<предистории>>.

Определение 16. $\tau(x, x_{-1}, \ldots, x_{-b}) = \tau(x, s_1(x_{-1}), \ldots, s_1(x_{-b})) = \tau(S(x), s_1(x_{-1}), \ldots, s_1(x_{-b}))$.

Утверждение 10. $\overline{x}_0 \leqslant \overline{\overline{x}}_0 \Rightarrow \tau(\overline{x}_0, c_{-1}, \ldots, c_{-b}) \leqslant \tau(\overline{\overline{x}}_0, c_{-1}, \ldots, c_{-b})$.

Определение 17. Для данной ДС F определим 2^b параметров:

1) $G_{c_{-b}\ldots c_{-1}} = S(F(x_{c_1}, c_{-1}, \ldots, c_{-b}), c_{-1}, \ldots, c_{-b})$ назовем **делящей траекторией** системы F.
2) $g_{c_{-b}\ldots c_{-1}} = \tau(F(x_{c_1}, c_{-1}, \ldots, c_{-b}), c_{-1}, \ldots, c_{-b})$ назовем **топологическим параметром** системы F.

Здесь в качестве индексов берутся всевозможные слова из b символов в алфавите $\{0, 1\}$.

Теорема 2. *Рассмотрим ДС F. Потребуем, чтобы на $I_0(I_1)$ все функции $f_{\ldots}$ бесконечно возрастали (убывали). Тогда в данной ДС траектория $\overline{S} = \overline{s}_1\overline{s}_2\ldots\overline{s}_i\ldots$ с предысторией $c_{-b}\ldots c_{-1}$ $\exists$ ($\exists$ хотя бы одна точка x_0 : $S(x_0, c_{-1}, \ldots, c_{-b}) = \overline{S}$)$\Leftrightarrow \forall\, k \geqslant 1$ выполнено:*

$$\tau(\sigma^k\overline{S}, \overline{s}_{k-1}, \overline{s}_{k-2}, \ldots, \overline{s}_{k-b}) \leqslant g_{\overline{s}_{k-b}\overline{s}_{k-b+1}\ldots\overline{s}_{k-1}},$$

где мы считаем, что $\overline{s}_0 = c_{-1}$, $\overline{s}_{-1} = c_{-2}$ и т. д.

В работе [7] рассматривалось дополнительное требование, сужающее класс рассматриваемых отображений:

$$g_{\overline{c}_{-b}\ldots\overline{c}_{-1}} \geqslant g_{\overline{\overline{c}}_{-b}\ldots\overline{\overline{c}}_{-1}}, \text{ если } f_{\overline{c}_{-1}\ldots\overline{c}_{-b}}(x_{c_1}) < f_{\overline{\overline{c}}_{-1}\ldots\overline{\overline{c}}_{-b}}(x_{c_1}). \tag{2}$$

Обратимся к еще одному аспекту рассматриваемого типа ДС, а именно — к их непрерывной реализации. Если рассмотреть произвольный набор функций $f_{\dots}$, удовлетворяющих всем указанным выше условиям, и построить бифуркационную диаграмму соответствующей ДС, можно получить, например, результат показанный на рис. 5. На этом рисунке изображен каскад удвоений основного цикла. Как можно убедиться, он не соответствует диаграммам, которые обычно получаются при исследовании непрерывных систем, поскольку не выполнены два условия: основной цикл в устойчивом виде не может сосуществовать с удвоенным циклом, после потери устойчивости цикла, сразу происходит бифуркация удвоения. Такого рода проблемы возникают, по всей видимости, из-за того, что не для любого набора функций $f_{\dots}$ можно построить непрерывную реализацию соответствующей системы.

Рассмотрим частный случай, когда $b = 1$ (см., например, рис. 7). Можно привести достаточное условие того, что для соответствующей ДС можно построить непрерывную реализацию, а именно $f_0(x) = f_1(x)$ для $\forall\, x \geqslant f_1(x_{c_1})$ (согласно (2) $f_1(x_{c_1}) < f_0(x_{c_1})$). Реализацией в этом случае можно сделать отображение креста, как это показано на рис. 8. Отрезку AB будет соответствовать совпадающая часть f_0 и f_1, а отрезкам CA и DA — отличающиеся части. Причем, если на данной итерации x_i оказался меньше x_{c_1}, то на следующей итерации i+1 точка будет лежать где-то на объединении AB и CA, если x_i больше x_{c_1} — то на объединении AB и DA. Бифуркационная диаграмма такой реализации представлена на рис. 6.

Далее на рисунках 9-11 представлены таблицы правил следования циклов в рассматриваемых отображениях, построенные для различных значений b. Мы видим, что правила следования на рис. 9 задают

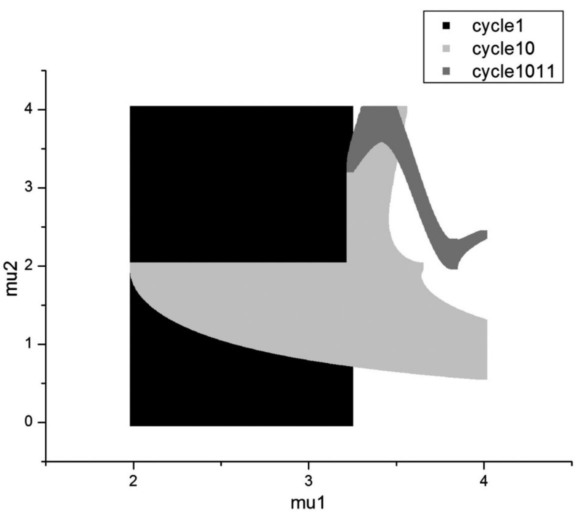

Рис. 5. Биф. диаграмма для отображения из [7] — «разрывы» в каскаде удвоения

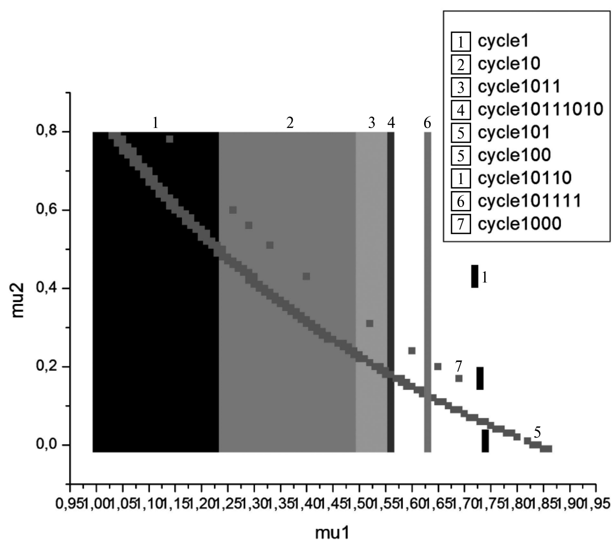

Рис. 6. Биф. диаграмма для модифицированного отображения

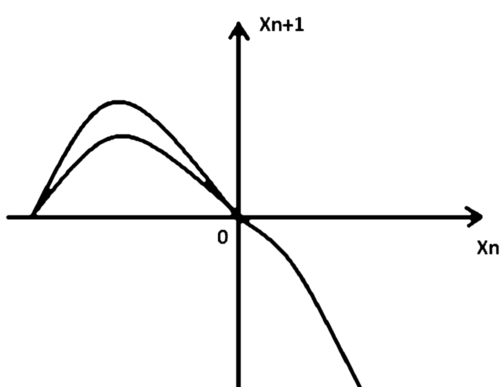

Рис. 7. Биф. диаграмма для модифицированного отображения

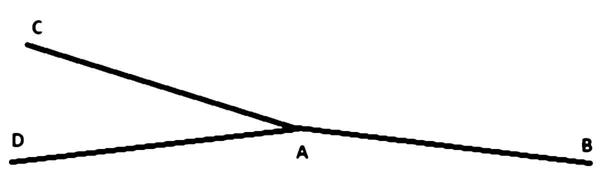

Рис. 8. Фазовое пространство непрерывной реализации

линейный порядок, что соответствует простому унимодальному отображению. Для отображений с большей модальностью этот порядок становиться уже частичным. Стоит отметить, что неправильно было бы полагать, что правила сосуществования траекторий в мультимодальных отображениях исчерпываются строгими правилами следования (такими, как показанные на таблицах). В качестве примера можно привести другие правила сосуществования траекторий, например, такие, в которых из существования двух траекторий S_1, S_2 следует существование третьей — S_3, хотя правил $S_1 \blacktriangleright S_3$ и $S_1 \blacktriangleright S_2$ может и не быть. Условно можно это записать так: $(S_1, S_2) \blacktriangleright S_3$. Строго говоря, самым правильным способом описания полученных закономерностей является полное перечисление всех возможных комбинаций сосуществования траекторий, т. е. построение некоторого рода *топологических карт*.

	1	10	1011	10111010	101110	10111110	1011110	10110	1011010	100	10010	1001110	10011110	100110	10011010	1001100	1000	1000100	10001010	100010	10001110	1000110	10000	10000100	1000010	100000	1000000
1	x																										
10	▶	x																									
1011	▶	▶	x																								
10111010	▶	▶	▶	x																							
101110	▶	▶	▶	▶	x																						
10111110	▶	▶	▶	▶	▶	x																					
1011110	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x																				
10110	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x																			
1011010	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x																		
100	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x																	
10010	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x																
1001110	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x															
10011110	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x														
100110	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x													
10011010	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x												
1001100	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x											
1000	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x										
1000100	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x									
10001010	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x								
100010	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x							
10001110	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x						
1000110	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x					
10000	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x				
10000100	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x			
1000010	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x		
100000	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x	
1000000	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x

Рис. 9. Правила следования циклов в отображениях (1) при $b = 0$

	1	10	1011	10111010	101110	10111110	1011110	10110	1011010	100	10010	1001110	10011110	100110	10011010	1001100	1000	1000100	10001010	100010	10001110	1000110	10000	10000100	1000010	100000	1000000
1	x																										
10	▶	x																									
1011	▶	▶	x																								
10111010	▶	▶	▶	x																							
101110	▶	▶	▶	▶	x																						
10111110	▶	▶	▶	▶	▶	x																					
1011110	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x																				
10110	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x																			
1011010	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x																		
100	▶									x																	
10010	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x																
1001110	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x															
10011110	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x														
100110	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x													
10011010	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x												
1001100	▶									▶						x											
1000	▶																x										
1000100	▶									▶						▶	▶	x									
10001010	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x								
100010	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x							
10001110	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x						
1000110	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x					
10000	▶																						x				
10000100	▶									▶						▶	▶	▶					▶	x			
1000010	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x		
100000	▶																									x	
1000000	▶																										x

Рис. 10. Правила следования циклов в отображениях (1) при $b = 1$

	1	10	1011	10111010	101110	10111110	1011110	10110	1011010	100	10010	1001110	10011110	100110	10011010	1001100	1000	1000100	10001010	100010	10001110	1000110	10000	10000100	1000010	100000	1000000
1	x																										
10	▶	x																									
1011	▶	▶	x																								
10111010	▶	▶	▶	x																							
101110	▶	▶			x																						
10111110	▶	▶				x																					
1011110	▶	▶					x																				
10110	▶	▶						x																			
1011010	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x																		
100	▶									x																	
10010	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x																
1001110	▶	▶			▶	▶	▶	▶		▶		x															
10011110	▶	▶						▶		▶			x														
100110	▶	▶								▶				x													
10011010	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x												
1001100	▶															x											
1000	▶																x										
1000100	▶									▶						▶	▶	x									
10001010	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x								
100010	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x							
10001110	▶	▶			▶	▶	▶	▶		▶		▶	▶	▶		▶	▶	▶			x						
1000110	▶	▶								▶				▶		▶	▶	▶				x					
10000	▶																						x				
10000100	▶									▶						▶	▶	▶					▶	x			
1000010	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x		
100000	▶																									x	
1000000	▶																										x

Рис. 11. Правила следования циклов в отображениях (1) при $b = 2$

	1	10	1011	10111010	101110	10111110	1011110	10110	1011010	100	10010	1001110	10011110	100110	10011010	1001100	1000	1000100	10001010	100010	10001110	1000110	10000	10000100	1000010	100000	1000000
1	x																										
10	▶	x																									
1011	▶	▶	x																								
10111010	▶	▶	▶	x																							
101110	▶	▶			x																						
10111110	▶	▶				x																					
1011110	▶						x																				
10110	▶							x																			
1011010	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x																		
100	▶									x																	
10010	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x																
1001110	▶	▶			▶	▶	▶	▶		▶		x															
10011110	▶							▶		▶			x														
100110	▶									▶				x													
10011010	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶		▶	▶	▶	x												
1001100	▶															x											
1000	▶																x										
1000100	▶									▶						▶	▶	x									
10001010	▶	▶			▶	▶	▶	▶		▶		▶	▶	▶		▶	▶	▶	x								
100010	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x							
10001110	▶	▶			▶	▶	▶	▶		▶		▶	▶	▶		▶	▶	▶			x						
1000110	▶									▶						▶	▶	▶				x					
10000	▶																						x				
10000100	▶									▶						▶	▶	▶					▶	x			
1000010	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	▶	x		
100000	▶																									x	
1000000	▶																										x

Рис. 12. Правила следования циклов следующие из методики Гиллмора

3. Полимодальные отображения и хаотическая динамика в системах дифференциальных уравнений

В данном разделе мы перейдем к связи полученных в предыдущих разделах закономерностей, справедливых для полимодальных отображений, и правил сосуществования траекторий в системах дифференциальных уравнений с хаотической динамикой. В работе [3] нами была рассмотрена модельная двумерная система дифференциальных уравнений с периодической правой частью, для которой были построены двумерные бифуркационные диаграммы перехода между диссипативным и консервативным случаями. Указанная система с двумя параметрами μ и ϵ имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= (2\mu + k(\cos t - 1))u_1 + k(\sin t)u_2 + {u_2}^2 \\ \dot{u}_2 &= k(\sin t)u_1 + (2\mu - k(1 + \cos t))u_2 \\ k &= \epsilon + 2\mu \end{aligned} \tag{3}$$

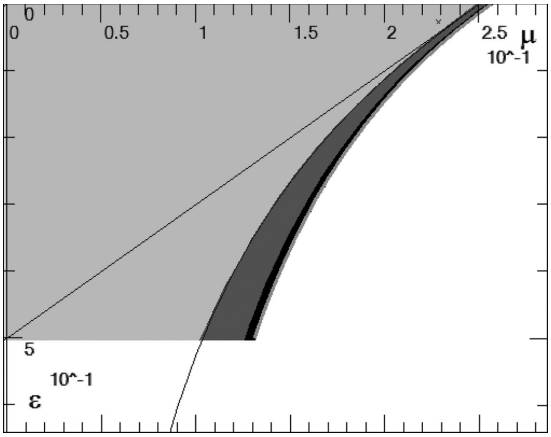

Рис. 13. Биф. диаграмма для модельного дифференциального уравнения: циклы 1, 10, 1011, 10111010

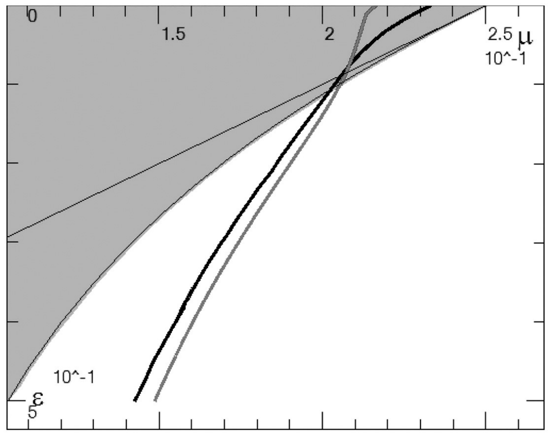

Рис. 14. Биф. диаграмма для модельного дифференциального уравнения — черная крайняя линия соответствует области устойчивости цикла 10010

Было показано, что в области высокой диссипации порядки появления новых циклов в точности совпадают с таковыми линейными порядками для унимодальных одномерных отображений (случай $n = 1$ в разд.1). При уменьшении диссипации, однако эти порядки нарушались (см. рис. 13 и рис. 14), области устойчивости циклов начинали пересекаться. Данная картина очень близка к тому, что наблюдается в многомодальных отображениях из предыдущего раздела (рис. 6).

Рассмотрим некоторые подтверждающие данную гипотезу факты. Мы дополнительно исследовали систему (3) используя методику Гиллмора-Лефранка [5]. Не вдаваясь в детали этого подхода, можно отметить его основные черты.

1) Подход позволяет строить символическую динамику системы (но только для периодических решений), т. е. назначать решениям некоторые идентифицирующие их последовательности символов. Причем подход основывается не на разбиении фазового пространства ДС на подобласти (как в случае с полимодальными отображениями), а на вычислении топологических инвариантов периодических решений-циклов.
2) Подход дает некоторые универсальные (т. е. не зависящие, например, от уровня диссипации) правила сосуществования циклов.
3) Подход не является полностью математически обоснованным, но в то же время, предположения эти касаются только свойств самой системы дифференциальных уравнений, а не гипотетической связи этой системы с другими видами ДС (такими как полимодальные отображения). В этом смысле можно считать, что подход Гиллмора более тесно привязан именно к системам дифференциальных уравнений.

Отметим некоторые важные результаты, полученные нами:

1) Символическая динамика (последовательности, назначенные найденным циклам системы уравнений) по методу Гиллмора в точности совпала с символической динамикой получающейся в случае использования гипотезы о связи динамики систем дифференциальных уравнений и отображений (то, что в случае высокой диссипации можно назвать ФШМ-сценарием [1], [2]).
2) Правила сосуществования даваемые Гиллморовским подходом полностью согласуются с правилами сосуществования в полимодальных отображениях. Более точно, правила сосуществования для полимодальных отображений типа Хансена любой модальности являются более сильными, чем правила по Гилмору. Этот результат является логичным, поскольку в нашей гипотезе увеличение модальности соответствующего системе отображения связано с уменьшение диссипации, а выводы из методики Гиллмора не связаны с тем или иным уровнем диссипации в системе. Этот результат продемонстрирован на рис. 9-11 и рис. 12. Для любой ячейки, где проставлено правило по Гиллмору, это правило имеется и для всех полимодальных отображений.

Можно обратить внимание на тот факт, что на таблицах сосуществования для некоторых циклов соответствующие строки заполнены до самой диагонали. Это значит, что присутствие таких циклов в системе влечет за собой присутствие в системе все циклов, которые в унимодальном порядке стоят перед ними. На рис. 15 для одного из таких циклов (10010) справедливость этого утверждения продемонстрирована бифуркационной диаграммой системы (3). На этой диаграмме показаны области устойчивости этого цикла и всех циклов предшествующих ему в унимодальном порядке. Область (полоса) устойчивости самого цикла 10010 отмечена черным цветом, остальные циклы отмечены различными оттенками. Можно видеть, что в то время, когда области устойчивости предшествующих циклов пересекаются между собой с уменьшением диссипации, цикл 10010 отстоит справа от них при любом уровне диссипации. Это значит, что он всегда появляется в системе позже предшествующих циклов, как то и предсказывает теория.

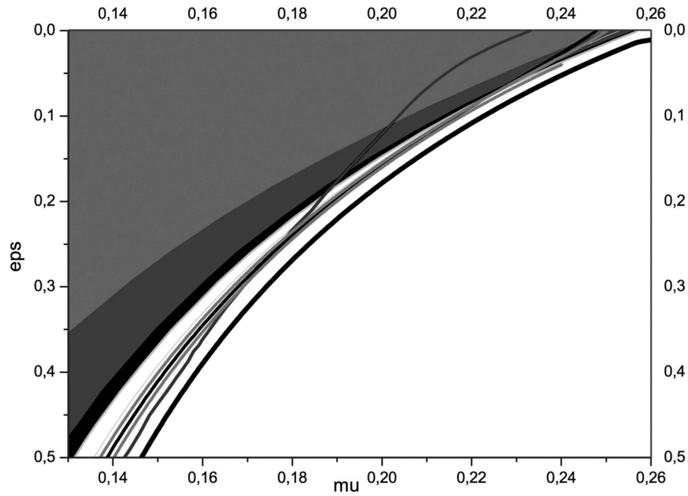

Рис. 15. Биф. диаграмма для модельного дифференциального уравнения — черная крайняя линия соответствует области устойчивости цикла 10010

Заключение

В данной работе нами единообразно были изложены качественные теории двух видов полимодальных отображений. Эти результаты являются в некотором смысле обобщением результатов Фейгенбаума и Шарковского относительно унимодальных отображений. Далее нами была продемонстрирована связь между динамикой полимодальных отображений и динамикой систем дифференциальных уравнений с хаосом. Показана согласованность данного подхода с результатами работ Гиллмора и теорией ФШМ.

Литература

1. *Магницкий Н. А.*, *Сидоров С. В.* Новые методы хаотической динамики. — М.:Едиториал УРСС, 2004.
2. *Магницкий Н. А.* Теория динамического хаоса. — М.:Едиториал УРСС, 2011.
3. *Рябков О. И.* Структура бифуркационных диаграмм двумерных нелинейных неавтономных систем дифференциальных уравнений с периодической правой частью. // Труды третьей международной конференции «Системный анализ и информационные технологии». 2009.
4. *Шарковский А. Н.*, *Коляда С. Ф.*, *Сивак А. Г.* Динамика одномерных отображений — М.:Наукова думка, 1989.
5. *R. Gilmore*, *M. Lefranc*, The topology of chaos, Wiley-Interscience, 2002.
6. *K. T. Hansen*, *P. Cvitanovic* Bifurcation structures in maps of Henon type // Nonlinearity. 1998. Vol. 11. P. 1233–1261.
7. *K. T. Hansen*, Bifurcation structures for multimodal maps. Submitted to Experimental Math. http://alf.nbi.dk/khansen/papers/multi mod.ps.gz

Рябков Олег Игоревич. Инженер-исследователь ИСА РАН. Окончил в 2009 г. МГУ. Количество печатных работ: 4. Область научных интересов: нелинейная динамика, хаос. E-mail: oleg.ryabkov.87@gmail.com