Ограниченное линейное управление, оптимальное по квадратичному критерию специального вида

М. В. Хлебников, П. С. Щербаков

Аннотация. На основе техники линейных матричных неравенств решается задача построения стабилизирующей линейной обратной связи по состоянию для линейной системы при заданном ограничении на ресурс управления. Приводится квадратичный функционал, который минимизируется данным управлением.

Ключевые слова: *линейная управляемая система, ограниченная обратная связь по состоянию, линейные матричные неравенства, квадратичный критерий качества.*

Введение

Как известно [1, 2], построение стабилизирующей статической линейной обратной связи по состоянию для линейных систем может быть осуществлено путем переформулировки задачи к виду линейных матричных неравенств (LMI) с последующей проверкой их разрешимости.

При практической реализации к регуляторам и переходным процессам в замкнутых системах предъявляются разнообразные инженерные требования к степени устойчивости, времени затухания, колебательности, величине перерегулирования и пр. Одним из наиболее значимых практических требований является ограниченность ресурса управления, поэтому при синтезе естественно накладывать те или иные ограничения на величину управляющего воздействия. Несмотря на то, что в литературе имеются многочисленные результаты по так называемому управлению с насыщением [3–6], в настоящей работе рассматриваются лишь *линейные* ограниченные управления. Управление с насыщением обладает до определенной степени большей гибкостью, прежде всего потому, что определено на всем пространстве, но при этом не является линейным, что значительно усложняет анализ. Мы сосредоточимся на *линейном ограниченном управлении*, которое определено лишь в некоторой конечной области фазового пространства. Такое «упрощение» постановки задачи позволяет напрямую применять технику линейных матричных неравенств и получать простые вычислительные алгоритмы.

Еще одно важнейшее требование, предъявляемое к замкнутой системе, — заданная степень устойчивости. Это требование также может быть учтено в рамках используемого нами подхода.

Интуитивно понятно, что (удаленные) начальные условия могут вступать в противоречие с требованием ограниченности управления и желаемой степени устойчивости замкнутой системы. Конструктивное описание условий на величины этих трех параметров системы составляет одну из целей настоящей работы. Оценка допустимой области «в пространстве» этих параметров будет получена в терминах разрешимости системы линейных матричных неравенств.

Совокупность решений этих LMI предоставляет проектировщику множество допустимых регуляторов, удовлетворяющих всем перечисленным условиям, поэтому естественно задаться целью отыскания среди них оптимального по тому или иному критерию качества. Одним из распространенных критериев является квадратичный, который хорошо изучен в рамках теории линейно-квадратичного управления (LQR) [7]. Однако LQR-задача не предполагает наличия явного ограничения на управление и не может быть точно решена в такой постановке. Напомним, что в упрощенной формулировке LQR-задача заключается в минимизации по всем линейным стабилизирующим регуляторам некоторого квадратичного функционала с заданными весовыми матрицами. В [8] (см. также [9]) обсуждается обратная задача: найти весовые матрицы, при которых заданный линейный стабилизирующий регулятор является оптимальным. Второй главный результат настоящей работы лежит в русле такого подхода, а именно, будет построен допустимый регулятор и предъявлен специального вида квадратичный функционал, для которого он будет оптимальным.

Полученные в работе результаты обобщаются в некоторых направлениях, таких как дискретное времени, робастные постановки, когда матрица динамики системы содержит неопределенность, ограниченную в некоторой норме и др. Мы, однако, не будем останавливаться на них, чтобы не нарушать целостности изложения материала.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x(0) = x_0, \tag{1}$$

с фазовым состоянием $x \in R^n$ и управлением $u \in R^m$, где $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$; пара матриц (A, B) управляема, начальное условие x_0 фиксировано.

Задача заключается в построении управления в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx, \qquad K \in R^{m\times n}, \tag{2}$$

которое стабилизирует замкнутую систему и вдоль всей ее траектории удовлетворяет ограничению

$$\| u(t) \| \leqslant \mu \tag{3}$$

при заданном уровне μ допустимых управлений.

При этом будет показано, что получающийся регулятор оптимален в смысле минимума квадратичного функционала (взвешенного функционала энергии)

$$J = \int_0^\infty x^T R x \, dt,$$

в котором весовая матрица R является матрицей функции Ляпунова для системы (1), замкнутой найденным регулятором (2).

В качестве основного технического средства будем использовать технику линейных матричных неравенств.

2. Предварительные сведения и результаты

Нам понадобятся следующие предварительные результаты. Первый из них представляет собой необходимое и достаточное условие (квадратичной) стабилизируемости линейной системы (с помощью линейной обратной связи по состоянию), выраженное в терминах линейных матричных неравенств; см., например, [1, 2].

Теорема 1. *Если матрицы $\hat{P} \succ 0$ и $\hat{Y}$ удовлетворяют неравенству*

$$AP + PA^T + BY + Y^T B^T \prec 0, \tag{4}$$

то регулятор (2) *с матрицей*

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$$

стабилизирует систему (1), *а квадратичная форма*

$$V(x) = x^T \hat{P}^{-1} x$$

является функцией Ляпунова для замкнутой системы.

Для полноты картины приведем набросок доказательства этого результата. Замкнув систему (1) обратной связью (2), приходим к замкнутой системе

$$\dot{x} = A_c x, \qquad A_c = A + BK. \tag{5}$$

Как известно, квадратичная форма

$$V(x) = x^T Q x, \qquad Q \succ 0,$$

является функцией Ляпунова для системы (5) тогда и только тогда, когда

$$\dot{V}(x) = x^T (A_c^T Q + Q A_c) x \prec 0$$

или

$$A_c^T Q + Q A_c \prec 0.$$

Таким образом, должны найтись матрицы K и $Q \succ 0$ такие, что

$$(A + BK)^T Q + Q(A + BK) \prec 0. \tag{6}$$

Домножив неравенство (6) слева и справа на матрицу $P = Q^{-1}$, получим

$$(A + BK)P + P(A + BK)^T \prec 0$$

или

$$AP + PA^T + BKP + PK^T B^T \prec 0.$$

Введем вспомогательную матричную переменную $Y = KP$, исключая переменную K. В силу $P \succ 0$, матрица K восстанавливается единственным образом:

$$K = YP^{-1}.$$

В результате приходим к искомому матричному неравенству

$$AP + PA^T + BY + Y^T B^T \prec 0,$$

линейному по переменным Y и P.

Из Теоремы 1 вытекает следующее важное соображение. Рассмотрим эллипсоид

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad x^T \hat{P}^{-1} x \leqslant 1\}$$

с центром в начале координат и матрицей $\hat{P}$. Тогда, если начальное условие x_0 системы (1), замкнутой регулятором $\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$, лежит в этом эллипсоиде, то ее траектория будет оставаться в нем для всех моментов времени; это следует из того, что квадратичная форма $x^T \hat{P}^{-1} x$ является функцией Ляпунова для данной системы. Это свойство будем называть *инвариантностью* полученного эллипсоида относительно начальных условий.

Для построения инвариантного эллипсоида, содержащего заданную начальную точку x_0, необходимо потребовать, чтобы

$$x_0^T P^{-1} x_0 \leqslant 1.$$

С помощью леммы Шура [10, 2] этому соотношению можно придать эквивалентный вид

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^T \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succeq 0; \tag{7}$$

полученное линейное матричное неравенство добавляется к ограничению (4) в Теореме 1.

В следующей лемме дается достаточное условие выполнения ограничения на управление (3); оно формулируется в виде линейного матричного неравенства относительно матричных переменных P и Y, фигурирующих в Теореме 1.

Лемма 1 [1]. *Пусть матрицы $P \succ 0$ и Y удовлетворяют неравенству (4). Тогда выполнение линейного матричного неравенства*

$$\begin{pmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu^2 I \end{pmatrix} \succeq 0 \tag{8}$$

гарантирует выполнение ограничения (3) внутри эллипсоида

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \quad x^T P^{-1} x \leqslant 1\}$$

для системы (1), замкнутой регулятором $K = YP^{-1}$.

Таким образом, для построения квадратично стабилизирующего регулятора при наличии ограничения (3), Теорема 1 модифицируется следующим образом: к неравенству (4), гарантирующему стабилизацию замкнутой системы, добавляются линейные матричные неравенства (7) и (8). При этом эллипсоид с полученной матрицей $\hat{P}$ будет инвариантным, содержащим начальное условие x_0, а ограниченность управления вдоль траектории гарантируется условием (8).

Ясно, что не для всякого начального условия x_0 управляемую систему можно стабилизировать управлением заданного уровня. Вопрос о минимально возможном значении величины μ решается следующим образом.

Лемма 2. Пусть $\hat{\lambda}$ — *решение задачи полуопределенного программирования*

$$\lambda \to \min$$

при ограничениях

$$AP + PA^T + BY + Y^T B^T \prec 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^T \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succeq 0, \qquad \begin{pmatrix} P & Y^T \\ Y & \lambda I \end{pmatrix} \succeq 0,$$

где минимизация проводится по матричным переменным $P = P^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и скалярной переменной λ.

Тогда при

$$\mu \geqslant \mu_{\min} \doteq \sqrt{\hat{\lambda}}$$

для системы (1) существует регулятор $u = Kx$, стабилизирующий замкнутую систему и удовлетворяющий ограничению (3).

Замечание 1. Заменив неравенство (6) на

$$(A + BK)^T Q + Q(A + BK) \preceq -2\sigma Q, \qquad \sigma > 0, \tag{9}$$

мы гарантируем желаемую степень σ устойчивости замкнутой системы:

$$-\max_i \mathrm{Re}\lambda_i(A_c) \leqslant \sigma.$$

Соответственно, неравенство (4) в формулировке Теоремы 1 и ее модификаций заменяется на линейное матричное неравенство

$$AP + PA^T + BY + Y^T B^T \preceq -2\sigma P.$$

3. Основной результат

Итак, если матрицы $P \succ 0$ и Y удовлетворяют неравенствам

$$AP + PA^T + BY + Y^T B^T \preceq -2\sigma P,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^T \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succeq 0, \qquad \begin{pmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu^2 I \end{pmatrix} \succeq 0$$

(где величина μ удовлетворяет лемме 3), то регулятор (2) с матрицей

$$K = YP^{-1}$$

стабилизирует систему (1) со степенью устойчивости $\sigma > 0$; вдоль всей траектории системы выполнено ограничение (3), а квадратичная форма

$$V(x) = x^T P^{-1} x$$

является функцией Ляпунова для замкнутой системы; в этом случае тройку (x_0, μ, σ) будем называть допустимой. Иными словами, мы получили характеризацию совокупности допустимых троек параметров (x_0, μ, σ) системы.

Далее, в силу (9) для всех $x \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\dot{V}(x) = x^T (A_c^T Q + QA_c) x \leqslant -2\sigma x^T Q x,$$

откуда

$$\int_0^\infty \dot V(x(t))dt = V(x(t))|_0^\infty = -x_0^T Q x_0 \leqslant -2\sigma \int_0^\infty x^T Q x\,dt$$

или

$$\int_0^\infty x^T P^{-1} x\,dt \leqslant \frac{1}{2\sigma} x_0^T P^{-1} x_0. \qquad (10)$$

Левая часть соотношения (10) представляет собой так называемую обобщенную энергию системы, см. [9]. Будем минимизировать ее оценку — правую часть соотношения (10), нелинейную по переменной P. Введя скалярную переменную γ и пользуясь леммой Шура, запишем неравенство

$$\frac{1}{2\sigma} x_0^T P^{-1} x_0 \leqslant \gamma$$

в виде линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} 2\sigma\gamma & x_0^T \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succeq 0.$$

Поскольку минимизация величины $2\sigma\gamma$ эквивалентна минимизации γ, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. Пусть $\hat P \succ 0$ и $\hat Y$ — *решение задачи полуопределенного программирования*

$$\gamma \to \min$$

при ограничениях

$$AP + PA^T + BY + Y^T B^T \preceq -2\sigma P,$$

$$\begin{pmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu^2 I \end{pmatrix} \succeq 0, \qquad \begin{pmatrix} \gamma & x_0^T \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succeq 0,$$

где минимизация проводится по матричным переменным $P = P^T \in \mathbb{R}^{n\times n}, Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *и скалярной переменной* γ, *а величина* μ *удовлетворяет Лемме* 2.

Тогда:

1) *регулятор* (2) *с матрицей*

$$\hat K = \hat Y \hat P^{-1}$$

стабилизирует систему (1) *с заданной степенью устойчивости* σ, *причем вдоль всей траектории системы выполнено ограничение* (3);

2) *справедлива оценка*

$$\int_0^\infty x^T \hat P^{-1} x\,dt \leqslant \frac{x_0^T \hat P^{-1} x_0}{2\sigma}, \qquad (11)$$

где квадратичная форма $V(x) = x^T \hat P^{-1} x$ *является функцией Ляпунова для замкнутой системы* (1).

Замечание 2. Оказывается, что решение $\hat P$, $\hat Y$ задачи из формулировки Теоремы 2 обращает матричное неравенство

$$(A + B\hat K)^T \hat Q + \hat Q(A + B\hat K) \preceq -2\sigma \hat Q, \qquad \hat Q = \hat P^{-1},$$

в равенство. Это означает, что в равенство обращается и соотношение (11); таким образом, мы получаем не оценку, а точное значение функционала.

Таким образом, основной результат Теоремы заключается в следующем. Получен стабилизирующий регулятор, который удовлетворяет наложенным ограничениям (на величину управления и степень устойчивости замкнутой системы) и предъявлен квадратичный функционал, который минимизируется этим регулятором.

4. Пример

Рассмотрим систему вида (1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и начальной точкой

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6 \\ 0,2 \end{pmatrix}.$$

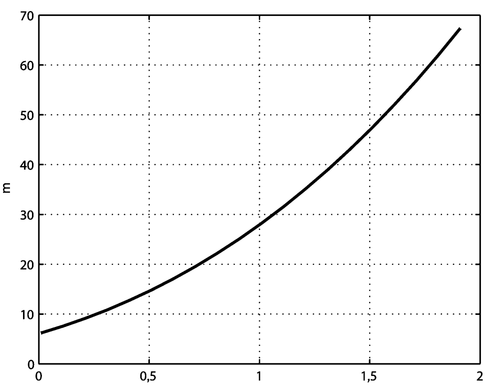

Рис. 1. Оценка области существования допустимых регуляторов.

На рис. 1 в плоскости параметров (σ, μ) показана область существования допустимых регуляторов (она ограничена снизу изображенной на рисунке кривой), найденная в соответствии с Леммой 2. Заметим, что в силу достаточности леммы мы получили оценку истинной области (т. е. для некоторых точек под кривой могут найтись допустимые регуляторы).

При выборе точки

$$\sigma = 0,2, \qquad \mu = 9,$$

согласно Теореме 2 получаем матрицу функции Ляпунова

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 5,5559 & -6,6671 & 5,5209 \\ -6,6671 & 10,4801 & -12,5761 \\ 5,5209 & -12,5761 & 25,5596 \end{pmatrix},$$

причем

$$\int_0^\infty x^T \hat{P}^{-1} x \, dt = 2,4862,$$

и стабилизирующий регулятор

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} -5,0661 & -7,1017 & -3,6000 \end{pmatrix}.$$

При этом корни замкнутой системы равны

$$\lambda_1(A+B\hat{K}) = -0,2, \quad \lambda_{2,3}(A+B\hat{K}) = -0,2 \pm j1,6679.$$

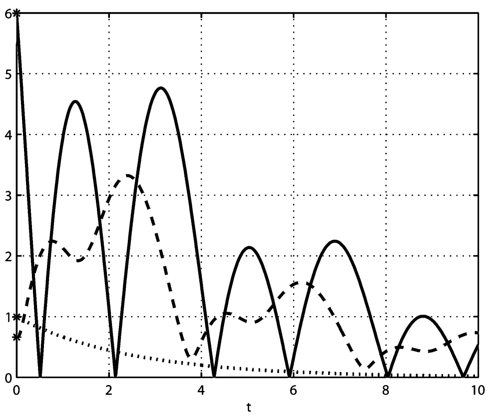

Рис. 2. Графики $\| u(t) \|$, $\| x(t) \|$ и $V(x(t))$

На рис. 2 показано поведение величины $\| u(t) \|$ при найденном регуляторе $\hat{K}$ (сплошная линия), а также величины $\| x(t) \|$ (пунктир) и построенной функции Ляпунова $V(x(t))$ (точечная линия).

Все вычисления проводились в среде Matlab с использованием программного пакета *cvx* [11].

Заключение

Предложен способ построения стабилизирующей статической линейной обратной связи по состоянию для линейной системы при заданных ограничениях на управление. Поставленная задача сведена к задаче разрешимости системы соответствующих линейных матричных неравенств. Отыскание квадратичного функционала качества, оптимизируемого допустимым управлением, сведено к задаче полуопределенного программирования, легко решающейся численно.

Авторы признательны Б. Т. Поляку и А. Г. Александрову за интерес к работе, плодотворные обсуждения и полезные предложения.

Литература

1. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., and Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
2. *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
3. *Hu T., Lin Z.* Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design, Birkhauser, Boston, 2001.
4. *Hu T. and Lin Z.* On the tightness of a recent set invariance condition under actuator saturation // Syst. Control Lett., 2003. Vol. 49. P. 389–399.
5. *Alamo T, Cepedo A., and Limon D.* Improved computation of ellipsoidal invariant sets for saturated control systems // 42-nd Conf. Decision Control, Seville, Spain. Dec 2005. P. 6216–6221.
6. *Polyak B., Shcherbakov P.* Ellipsoidal approximations to attraction domains of linear systems with bounded control // Proc. American Control Conf., St. Louis, USA. Jun 10–12. 2009. P. 5363–5367.
7. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
8. *Kalman R.* When is a linear control system optimal? //J. Basic Engineering. Vol. 86. Iss. 1. P. 51–60.
9. *Красовский А. А.* Интегральные оценки моментов и синтез линейных систем // АиТ. 1967. № 10. С. 53–71.
10. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.
11. *Grant M., Boyd S.* CVX: Matlab software for disciplined convex programming (web page and software). URL: http://stanford.edu/boyd/cvx

Хлебников Михаил Владимирович. гл.н. с. ИПУ РАН. Окончил в 1995 МПГУ им. В. И. Ленина. Д. ф. -м. н. Кол-во печатных работ: 97. Область научных интересов: теория управления, линейные матричные неравенства, робастность, подавление внешних возмущений. E-mail: khlebnik@ipu.ru

Щербаков Павел Сергеевич. гл. н. с. ИПУ РАН. Окончил в 1980 МИИТ. Д. ф. -. м. н. Кол-во печатных работ: 97. Область научных интересов: теория управления, линейные матричные неравенства, робастность, подавление внешних возмущений. E-mail: cavour118@mail.ru