

Конструктивный анализ периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова–Риккати

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ, О. А. МАКОВЕЦКАЯ

Аннотация. Получены условия однозначной разрешимости и алгоритмы построения решения периодической краевой задачи для матричного дифференциального уравнения, представляющего собой обобщение уравнений Ляпунова и Риккати.

Ключевые слова: Матричное дифференциальное уравнение Ляпунова—Риккати, периодическая краевая задача.

Рассматривается краевая задача

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + F(t, X), \quad X(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (1)$$

$$X(0) = X(\omega), \quad (2)$$

где $t \in I$, $A, B, Q \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, $F \in C(D_{\bar{\rho}}, \mathbb{R}^{n \times n})$. Предполагается, что матрица-функция $F(t, X)$ в области $D_{\bar{\rho}} = \{(t, X) : t \in I, \|X\| < \bar{\rho}\}$ удовлетворяет относительно X условию Липшица (локально); $F(t, 0) \equiv 0$; $I = [0, \omega]$, $\omega > 0$, $0 < \bar{\rho} \leq \infty$.

При $Q = 0$ двухточечная краевая задача качественными методами исследовалась в работе [1], конструктивными методами [2] — в [3–5], с периодическими краевыми условиями — в [6–8]. В данной работе используются конструктивные методы, изложенные в [2]. Полученные результаты представляют собой обобщение и развитие соответствующих результатов, изложенных в [6–8].

Примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} D_{\rho} &= \{(t, X) : t \in I, \|X\| \leq \rho\}, \quad D = \{X(t) : \|X\|_C \leq \rho\}, \quad \tilde{A}(\omega) = \int_0^{\omega} A(\tau) d\tau, \\ \gamma &= \|\tilde{A}^{-1}(\omega)\|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|, \quad \delta = \max_t \|Q(t)\|, \quad h = \max_t \|F(t, 0)\|, \\ \phi(\rho) &= \gamma\delta\omega \left(1 + \frac{1}{2}\alpha\omega\right) \rho^2 + \gamma\omega \left[\beta + L + \frac{1}{2}\alpha\omega(\alpha + \beta + L)\right] \rho + \gamma\omega h \left(1 + \frac{1}{2}\alpha\omega\right), \\ q(\rho) &= \gamma\delta\omega(\alpha\omega + 2)\rho + \frac{1}{2}\gamma\alpha\omega^2(\alpha + \beta + L) + \gamma\omega(\beta + L), \quad \|X\|_C = \max_t \|X(t)\|, \end{aligned}$$

где $0 < \rho < \bar{\rho}$, $t \in I$, $L = L(\rho) > 0$ — постоянная Липшица для $F(t, X)$ в области D_{ρ} , $\|\cdot\|$ — подходящая норма матриц, например, любая из норм, приведенных в [9, с. 21].

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

$$\det \tilde{A}(\omega) \neq 0, \quad (3)$$

$$\phi(\rho) \leq \rho, \quad (4)$$

$$q(\rho) < 1. \quad (5)$$

Тогда в области D_{ρ} решение задачи (1), (2) существует и единственно, при этом справедлива оценка $\|X\|_C \leq \phi(\rho)$.

Доказательство. Используя условие (3), сначала выведем матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2).

Из уравнения (1) на основании условия (2) имеем

$$\int_0^{\omega} A(\tau) X(\tau) d\tau = - \int_0^{\omega} [X(\tau) B(\tau) + X(\tau) Q(\tau) X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau. \quad (6)$$

В (6) воспользуемся тождеством типа [2, с. 47]:

$$\int_0^{\omega} A(\tau) X(\tau) d\tau = \tilde{A}(\omega) X(t) - \int_0^t \left(\int_0^{\tau} A(\sigma) d\sigma \right) dX(\tau) + \int_t^{\omega} \left(\int_{\tau}^{\omega} A(\sigma) d\sigma \right) dX(\tau). \quad (7)$$

На основании (3), (7) и в силу (1) получим матричное интегральное уравнение вида

$$\begin{aligned} X(t) = \tilde{A}^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left(\int_0^{\tau} A(\sigma) d\sigma \right) [A(\tau) X(\tau) + X(\tau) B(\tau) + X(\tau) Q(\tau) X(\tau) + \right. \\ \left. + F(\tau, X(\tau))] d\tau - \int_t^{\omega} \left(\int_{\tau}^{\omega} A(\sigma) d\sigma \right) [A(\tau) X(\tau) + X(\tau) B(\tau) + X(\tau) Q(\tau) X(\tau) + \right. \\ \left. + F(\tau, X(\tau))] d\tau - \int_0^{\omega} [X(\tau) B(\tau) + X(\tau) Q(\tau) X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение (8) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} X(t) = \int_0^{\omega} K(t, \tau) [A(\tau) X(\tau) + X(\tau) B(\tau) + X(\tau) Q(\tau) X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau - \\ - \tilde{A}^{-1}(\omega) \int_0^{\omega} [X(\tau) B(\tau) + X(\tau) Q(\tau) X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau, \end{aligned}$$

где

$$K(t, \tau) = \begin{cases} \tilde{A}^{-1}(\omega) \int_0^{\tau} A(\sigma) d\sigma, & 0 \leq \tau \leq t \leq \omega, \\ -\tilde{A}^{-1}(\omega) \int_{\tau}^{\omega} A(\sigma) d\sigma, & 0 \leq t < \tau \leq \omega. \end{cases}$$

Верно и обратное: всякое непрерывное решение матричного интегрального уравнения (8) является решением задачи (1), (2). Это можно показать с помощью несложных выкладок.

Исследуем разрешимость уравнения (8). Запишем это уравнение в операторной форме:

$$X = \mathcal{L}(X), \quad (9)$$

где через $\mathcal{L}$ обозначен соответствующий интегральный оператор в (8). Этот оператор действует на множестве $C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$.

Покажем, что из условий (4), (5) следует выполнение на множестве D принципа сжимающих отображений [10, с. 605], то есть в замкнутом шаре $\|X\|_C \leq \rho$.

Сначала покажем, что $\mathcal{L}(X) \in D$ для произвольной матрицы-функции $X(t) \in D$. Выполнив оценки по нормам в (9), получим последовательно

$$\|\mathcal{L}(X)\| \leq \|\tilde{A}^{-1}(\omega)\| \left\{ \int_0^t \left(\int_0^{\tau} \|A(\sigma)\| d\sigma \right) [(\|A(\tau)\| + \|B(\tau)\|) \|X(\tau)\| + \|Q(\tau)\| \|X(\tau)\|^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \|F(\tau, X(\tau))\| d\tau + \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega \|A(\sigma)\| d\sigma \right) \left[(\|A(\tau)\| + \|B(\tau)\|) \|X(\tau)\| + \|Q(\tau)\| \|X(\tau)\|^2 + \right. \\
& \left. + \|F(\tau, X(\tau))\| \right] d\tau + \int_0^\omega \left[\|B(\tau)\| \|X(\tau)\| + \|Q(\tau)\| \|X(\tau)\|^2 + \|F(\tau, X(\tau))\| \right] d\tau \Bigg\} \leq \\
& \leq \gamma \left\{ \alpha \int_0^t \tau \left[(\alpha + \beta) \|X(\tau)\| + \delta \|X(\tau)\|^2 + \|F(\tau, X(\tau))\| \right] d\tau + \right. \\
& + \alpha \int_t^\omega (\omega - \tau) \left[(\alpha + \beta) \|X(\tau)\| + \delta \|X(\tau)\|^2 + \|F(\tau, X(\tau))\| \right] d\tau + \\
& \left. + \int_0^\omega \left[\beta \|X(\tau)\| + \delta \|X(\tau)\|^2 + \|F(\tau, X(\tau))\| \right] d\tau \right\} \leq \\
& \leq \gamma \omega \left\{ \frac{1}{2} \alpha \omega \left[\delta \rho^2 + (\alpha + \beta + L) \rho + h \right] + \delta \rho^2 + (\beta + L) \rho + h \right\}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\mathcal{L}(X)\| \leq \gamma \omega \left\{ \frac{1}{2} \alpha \omega \left[\delta \rho^2 + (\alpha + \beta + L) \rho + h \right] + \delta \rho^2 + (\beta + L) \rho + h \right\} = \phi(\rho). \quad (10)$$

Из (10) на основании (4) следует соотношение

$$\|\mathcal{L}(X)\|_C \leq \rho. \quad (11)$$

Далее из (9) имеем для произвольных $\tilde{X}, \tilde{\tilde{X}} \in D$:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}(\tilde{\tilde{X}}) - \mathcal{L}(\tilde{X})\| & \leq \gamma \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau \|A(\sigma)\| d\sigma \right) \left[(\|A(\tau)\| + \|B(\tau)\|) \|\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\| + \right. \right. \\
& + \|\tilde{\tilde{X}}(\tau) Q(\tau) \tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau) Q(\tau) \tilde{X}(\tau)\| + \|F(\tau, \tilde{\tilde{X}}(\tau)) - F(\tau, \tilde{X}(\tau))\| \Bigg] d\tau + \\
& + \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega \|A(\sigma)\| d\sigma \right) \left[(\|A(\tau)\| + \|B(\tau)\|) \|\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\| + \right. \\
& + \|\tilde{\tilde{X}}(\tau) Q(\tau) \tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau) Q(\tau) \tilde{X}(\tau)\| + \|F(\tau, \tilde{\tilde{X}}(\tau)) - F(\tau, \tilde{X}(\tau))\| \Bigg] d\tau + \\
& + \int_0^\omega \left[\|B(\tau)\| \|\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\| + \|\tilde{\tilde{X}}(\tau) Q(\tau) \tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau) Q(\tau) \tilde{X}(\tau)\| + \right. \\
& \left. + \|F(\tau, \tilde{\tilde{X}}(\tau)) - F(\tau, \tilde{X}(\tau))\| \right] d\tau \Bigg\} \leq \\
& \leq \gamma \omega \left[\frac{1}{2} \alpha \omega (2\delta \rho + \alpha + \beta + L) + 2\delta \rho + \beta + L \right] \|\tilde{\tilde{X}} - \tilde{X}\|_C = q \|\tilde{\tilde{X}} - \tilde{X}\|_C.
\end{aligned}$$

Отсюда имеем оценку

$$\|\mathcal{L}(\tilde{\tilde{X}}) - \mathcal{L}(\tilde{X})\|_C \leq q \|\tilde{\tilde{X}} - \tilde{X}\|_C. \quad (12)$$

Из анализа соотношений (11), (12) видно, что неравенства (4), (5) являются условиями принципа сжимающих отображений применительно к (11). На основании этого заключаем, что в шаре $\|X\|_C \leq \rho$

решение уравнения (11) существует и единственно. Таким образом, задача (1), (2) однозначно разрешима в области D_ρ . При этом на основании (10) справедлива оценка $\|X\|_C \leq \phi(\rho)$. Теорема полностью доказана.

Для построения решения матричного интегрального уравнения (8) рассмотрим в дифференциальной форме алгоритм

$$\frac{dX_{k+1}(t)}{dt} = A(t) X_k(t) + X_k(t) B(t) + X_k(t) Q(t) X_k(t) + F(t, X_k(t)), \quad (13)$$

$$X_{k+1}(0) = X_{k+1}(\omega), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (14)$$

где в качестве начального приближения X_0 принята постоянная матрица, определяемая из условия (14) для приближения X_1 :

$$\tilde{A}(\omega) C = - \int_0^\omega [CB(\tau) + CQ(\tau) C + F(\tau, C)] d\tau.$$

Отсюда на основании условия (3) имеем матричное уравнение

$$C = -\tilde{A}^{-1}(\omega) \int_0^\omega [CB(\tau) + CQ(\tau) C + F(\tau, C)] d\tau. \quad (15)$$

Для исследования разрешимости в шаре $\|C\| \leq \rho$ уравнения (15) применим принцип сжимающих отображений [10, с. 605], записав это уравнение в операторной форме

$$C = \mathcal{H}(C). \quad (16)$$

Покажем что $\|\mathcal{H}(C)\| \leq \rho$ для произвольной матрицы $C \in D$. Выполнив оценки по норме в (16), получим

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}(C)\| &\leq \|\tilde{A}^{-1}(\omega)\| \int_0^\omega [\|CB(\tau)\| + \|CQ(\tau) C\| + \|F(\tau, C)\|] d\tau \leq \\ &\leq \gamma \int_0^\omega [\beta \|C\| + \delta \|C\|^2 + \|F(\tau, C)\|] d\tau \leq \gamma\omega [\delta\rho^2 + (\beta + L)\rho + h] \equiv l. \end{aligned}$$

Поскольку $l < \phi(\rho)$, то на основании (4) имеем

$$\|\mathcal{H}(C)\| < \rho. \quad (17)$$

Таким образом, оператор $\mathcal{H}$ отображает множество D в себя.

Далее изучим вопрос о сжимаемости оператора $\mathcal{H}$. Для произвольных $\tilde{C}, \tilde{\tilde{C}} \in D$ имеем

$$\begin{aligned} &\left\| \mathcal{H}(\tilde{\tilde{C}}) - \mathcal{H}(\tilde{C}) \right\| \leq \\ &\leq \left\| \tilde{A}^{-1}(\omega) \right\| \int_0^\omega \left[\left\| \tilde{\tilde{C}} - \tilde{C} \right\| \|B(\tau)\| + \left(\left\| \tilde{\tilde{C}} \right\| + \left\| \tilde{C} \right\| \right) \|Q(\tau)\| \left\| \tilde{\tilde{C}} - \tilde{C} \right\| + L \left\| \tilde{\tilde{C}} - \tilde{C} \right\| \right] d\tau \leq \\ &\leq \gamma\omega (2\delta\rho + \beta + L) \left\| \tilde{\tilde{C}} - \tilde{C} \right\|. \end{aligned} \quad (18)$$

Запишем соотношение (18) в следующем виде:

$$\left\| \mathcal{H}(\tilde{\tilde{C}}) - \mathcal{H}(\tilde{C}) \right\| \leq \tilde{q} \left\| \tilde{\tilde{C}} - \tilde{C} \right\|, \quad (19)$$

где

$$\tilde{q} = \gamma\omega (2\delta\rho + \beta + L).$$

Поскольку $\tilde{q} < q$, то $\tilde{q} < 1$ согласно условию (5).

Условия (17), (19) являются условиями принципа сжимающих отображений применительно к уравнению (16). Стало быть, это уравнение однозначно разрешимо в шаре $\|C\| \leq \rho$.

Замечание 1. В качестве начального приближения в данном алгоритме вместо постоянной матрицы C можно принять произвольную матрицу $X_0(t) \in D$, дающую приближенное решение $X_1(t)$, удовлетворяющее условию (14) (при $k = 0$).

Далее, исходя из (13), (14) с помощью (7), получим рекуррентное интегральное соотношение для определения приближенных решений $X_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, задачи (1), (2).

Из (13) на основании (14) имеем

$$\int_0^{\omega} A(\tau) X_k(\tau) d\tau = - \int_0^{\omega} [X_k(\tau) B(\tau) + X_k(\tau) Q(\tau) X_k(\tau) + F(\tau, X_k(\tau))] d\tau. \quad (20)$$

Используя тождество (7), получим из (20) на основании условия (3)

$$\begin{aligned} X_k(t) = \tilde{A}^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left(\int_0^{\tau} A(\sigma) d\sigma \right) [A(\tau) X_{k-1}(\tau) + X_{k-1}(\tau) B(\tau) + \right. \\ \left. + X_{k-1}(\tau) Q(\tau) X_{k-1}(\tau) + F(\tau, X_{k-1}(\tau))] d\tau - \right. \\ \left. - \int_t^{\omega} \left(\int_{\tau}^{\omega} A(\sigma) d\sigma \right) [A(\tau) X_{k-1}(\tau) + X_{k-1}(\tau) B(\tau) + X_{k-1}(\tau) Q(\tau) X_{k-1}(\tau) + \right. \\ \left. + F(\tau, X_{k-1}(\tau))] d\tau - \int_0^{\omega} [X_k(\tau) B(\tau) + X_k(\tau) Q(\tau) X_k(\tau) + F(\tau, X_k(\tau))] d\tau \right\}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Как видно из (21), для определения приближенных решений X_k , $k = 1, 2, \dots$, получены матричные интегральные уравнения.

Замечание 2. Соотношение (21) фактически получено с помощью тождества (7) как решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{dX_k(t)}{dt} = A(t) X_{k-1}(t) + X_{k-1}(t) B(t) + X_{k-1}(t) Q(t) X_{k-1}(t) + F(t, X_{k-1}(t)), \\ \int_0^{\omega} [A(\tau) X_k(\tau) + X_k(\tau) B(\tau) + X_k(\tau) Q(\tau) X_k(\tau) + F(\tau, X_k(\tau))] d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Используя условия (4), (5) теоремы 1 с помощью принципа сжимающих отображений индукцией по k можно доказать, что уравнения (21) однозначно разрешимы на множестве D .

С помощью алгоритма (21) построим последовательность $\{X_k(t)\}_0^{\infty}$ приближенных решений задачи (1), (2), принадлежащих множеству D .

Теперь изучим вопрос о сходимости полученной последовательности. Следуя известному приему [11, с. 54], этот вопрос заменим эквивалентным вопросом о сходимости ряда

$$X_0(t) + (X_1(t) - X_0(t)) + (X_2(t) - X_1(t)) + \dots + (X_k(t) - X_{k-1}(t)) + \dots \quad (22)$$

Докажем равномерную по $t \in [0, \omega]$ сходимость ряда (22). Для этого построим сходящийся числовой ряд, который мажорирует на $[0, \omega]$ матричный функциональный ряд (22).

Выполним оценки $\|X_{m+1}(t) - X_m(t)\|$, используя (21):

$$\begin{aligned} \|X_{m+1}(t) - X_m(t)\| \leq \\ \leq \|\tilde{A}^{-1}(\omega)\| \left\{ \int_0^t \left(\int_0^{\tau} \|A(\sigma)\| d\sigma \right) [(\|A(\tau)\| + \|B(\tau)\|) \|X_m(\tau) - X_{m-1}(\tau)\| + \right. \\ \left. + \|X_m(\tau) Q(\tau) X_m(\tau) - X_{m-1}(\tau) Q(\tau) X_{m-1}(\tau)\| + \right. \\ \left. + \|F(\tau, X_m(\tau)) - F(\tau, X_{m-1}(\tau))\|] d\tau + \right. \\ \left. + \int_t^{\omega} \left(\int_{\tau}^{\omega} \|A(\sigma)\| d\sigma \right) [(\|A(\tau)\| + \|B(\tau)\|) \|X_m(\tau) - X_{m-1}(\tau)\| + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \|X_m(\tau) Q(\tau) X_m(\tau) - X_{m-1}(\tau) Q(\tau) X_{m-1}(\tau)\| + \\
 & + \|F(\tau, X_m(\tau)) - F(\tau, X_{m-1}(\tau))\| d\tau + \int_0^\omega [\|X_{m+1}(\tau) - X_m(\tau)\| \|B(\tau)\| + \\
 & + \|X_{m+1}(\tau) Q(\tau) X_{m+1}(\tau) - X_m(\tau) Q(\tau) X_m(\tau)\| + \\
 & + \|F(\tau, X_{m+1}(\tau)) - F(\tau, X_m(\tau))\|] d\tau \Bigg\} \leq \\
 & \leq \frac{1}{2} \gamma \alpha \omega^2 (2\delta\rho + \alpha + \beta + L) \|X_m - X_{m-1}\|_C + \gamma \omega (2\delta\rho + \beta + L) \|X_{m+1} - X_m\|_C.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка

$$\|X_{m+1} - X_m\|_C \leq (q - \tilde{q}) \|X_m - X_{m-1}\|_C + \tilde{q} \|X_{m+1} - X_m\|_C, \quad m = 1, 2, \dots \quad (23)$$

Поскольку $\tilde{q} < 1$, то из (23) имеем рекуррентную оценку

$$\|X_{m+1} - X_m\|_C \leq \tilde{q} \|X_m - X_{m-1}\|_C, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (24)$$

где $\tilde{q} = \frac{q - \tilde{q}}{1 - \tilde{q}} < q$.

Из (24) имеем явную оценку

$$\|X_{m+1} - X_m\|_C \leq \tilde{q}^m \|X_1 - X_0\|_C, \quad m = 1, 2, \dots \quad (25)$$

Используя (25), можно доказать с помощью известных приемов [10, с. 605], [11, с. 54], что последовательность $\{X_k(t)\}_0^\infty$ сходится равномерно по $t \in I$ к решению интегрального уравнения (8), при этом справедлива оценка

$$\|X - X_k\|_C \leq \frac{\tilde{q}^k}{1 - \tilde{q}} \|X_1 - X_0\|_C, \quad k = 1, 2, \dots \quad (26)$$

На основе (26) имеем оценку области локализации решения $X(t)$, определяемую согласно алгоритму (21),

$$\|X\|_C \leq \|X_0\|_C + \frac{\|X_1 - X_0\|_C}{1 - \tilde{q}}. \quad (27)$$

Оценки (26), (27) следует дополнить оценкой для $\|X_1 - X_0\|_C$. Из (15), (21) имеем

$$\begin{aligned}
 \|X_1 - X_0\|_C & \leq \frac{\gamma \alpha \omega^2 [\delta \|X_0\|_C^2 + (\alpha + \beta + L) \|X_0\|_C + h]}{2(1 - \tilde{q})} \leq \\
 & \leq \frac{\gamma \alpha \omega^2 [\delta \rho^2 + (\alpha + \beta + L) \rho + h]}{2(1 - \tilde{q})}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, доказана следующая теорема (2).

Теорема 2. Пусть выполнены условия (3)–(5). Тогда в области D_ρ решение задачи (1), (2) существует и единственно. Это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением (21) (с неявной вычислительной схемой) и удовлетворяющих условию (14).

Алгоритм (21) представляет собой достаточно эффективное средство для построения решения задачи (1), (2). В [2] установлено, что такие алгоритмы могут быть использованы при решении конкретных задач.

Этот алгоритм неудобен тем, что основан на неявной вычислительной схеме: на каждом итерационном шаге для отыскания соответствующего приближенного решения приходится решать матричное интегральное уравнение. Поэтому рассмотрим алгоритм, основанный на явной вычислительной схеме. Такая вычислительная схема применительно к задаче (1), (2) вытекает из соотношений

$$\frac{dX_{k+2}(t)}{dt} = A(t) X_{k+1}(t) + X_k(t) B(t) + X_k(t) Q(t) X_k(t) + F(t, X_k(t)), \quad (28)$$

$$X_{k+2}(0) = X_{k+2}(\omega), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (29)$$

где в качестве начального приближения X_0 принимается нулевая матрица, приближение X_1 ищется в виде постоянной матрицы, дающей приближенное решение $X_2(t)$, удовлетворяющее условию (29).

Первое приближение отыскивается из матричного алгебраического уравнения

$$\int_0^{\omega} A(\tau) d\tau X_1 + \int_0^{\omega} F(\tau, 0) d\tau = 0,$$

решение которого на основании условия (3) имеет вид

$$X_1 = -\tilde{A}^{-1}(\omega) \int_0^{\omega} F(\tau, 0) d\tau.$$

Поскольку $\|X_1\| \leq \gamma\omega h < \phi(\rho)$, то на основании условия (5) имеем $\|X_1\| < \rho$.

Теперь на основе (28), (29) с помощью (7) получим рекуррентное интегральное соотношение для определения приближенных решений $X_i(t)$, $i = 2, 3, \dots$ исследуемой задачи:

$$\begin{aligned} X_{k+1}(t) = \tilde{A}^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left(\int_0^{\tau} A(\sigma) d\sigma \right) [A(\tau) X_k(\tau) + X_{k-1}(\tau) B(\tau) + X_{k-1}(\tau) Q(\tau) X_{k-1}(\tau) + \right. \\ \left. + F(\tau, X_{k-1}(\tau))] d\tau - \int_t^{\omega} \left(\int_{\tau}^{\omega} A(\sigma) d\sigma \right) [A(\tau) X_k(\tau) + X_{k-1}(\tau) B(\tau) + \right. \\ \left. + X_{k-1}(\tau) Q(\tau) X_{k-1}(\tau) + F(\tau, X_{k-1}(\tau))] d\tau - \right. \\ \left. - \int_0^{\omega} [X_k(\tau) B(\tau) + X_k(\tau) Q(\tau) X_k(\tau) + F(\tau, X_k(\tau))] d\tau \right\}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (30)$$

Заметим, что соотношение (30) может быть получено с помощью тождества (7) как решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{dX_{k+1}(t)}{dt} = A(t) X_k(t) + X_{k-1}(t) B(t) + X_{k-1}(t) Q(t) X_{k-1}(t) + F(t, X_{k-1}(t)), \\ \int_0^{\omega} [A(\tau) X_{k+1}(\tau) + X_k(\tau) B(\tau) + X_k(\tau) Q(\tau) X_k(\tau) + F(\tau, X_k(\tau))] d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Замечание 3. В качестве приближений X_0 , X_1 можно принять произвольные матрицы класса $C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, принадлежащие множеству D и дающие приближение $X_2(t)$, удовлетворяющие условию (29) при $k = 0$.

Как видим, вычислительная схема алгоритма (30) является явной, при этом для построения приближенных решений по этому алгоритму следует выполнить сравнительно простые вычислительные процедуры. В результате получим последовательность $\{X_k(t)\}_0^{\infty}$. Используя условие (4), можно доказать индукцией по k , что все члены этой последовательности принадлежат множеству D .

Далее докажем равномерную по $t \in I$ сходимость ряда (22) применительно к алгоритму (30). Для этого построим соответствующий сходящийся числовой ряд, который мажорирует на I указанный матричный функциональный ряд.

Сначала выполним соответствующие оценки по норме, используя (30). Тогда получим последовательно

$$\begin{aligned} \|X_{k+2}(t) - X_{k+1}(t)\| \leq \|\tilde{A}^{-1}(\omega)\| \left\{ \int_0^t \left(\int_0^{\tau} \|A(\sigma)\| d\sigma \right) [\|A(\tau)\| \|X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)\| + \right. \\ \left. + [\|B(\tau)\| + (\|X_k(\tau)\| + \|X_{k-1}(\tau)\|) \|Q(\tau)\|] \|X_k(\tau) - X_{k-1}(\tau)\| + \right. \\ \left. + \|F(\tau, X_k(\tau)) - F(\tau, X_{k-1}(\tau))\|] d\tau + \int_t^{\omega} \left(\int_{\tau}^{\omega} \|A(\sigma)\| d\sigma \right) [\|A(\tau)\| \|X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)\| + \right. \\ \left. + [\|B(\tau)\| + (\|X_k(\tau)\| + \|X_{k-1}(\tau)\|) \|Q(\tau)\|] \|X_k(\tau) - X_{k-1}(\tau)\| + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \|F(\tau, X_k(\tau)) - F(\tau, X_{k-1}(\tau))\| d\tau + \\
 & + \int_0^\omega [(\|B(\tau)\| + (\|X_{k+1}(\tau)\| + \|X_k(\tau)\|) \|Q(\tau)\|) \|X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)\| + \\
 & + \|F(\tau, X_{k+1}(\tau)) - F(\tau, X_k(\tau))\|] d\tau \Big\} \leq \\
 & \leq \gamma\omega \left(2\delta\rho + \frac{1}{2}\alpha^2\omega + \beta + L \right) \|X_{k+1} - X_k\|_C + \frac{1}{2}\gamma\alpha\omega^2 (2\delta\rho + \beta + L) \|X_k - X_{k-1}\|_C.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка

$$\|X_{k+2} - X_{k+1}\|_C \leq q_1 \|X_{k+1} - X_k\|_C + q_2 \|X_k - X_{k-1}\|_C, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (31)$$

где

$$q_1 = \gamma\omega \left(2\delta\rho + \frac{1}{2}\alpha^2\omega + \beta + L \right), \quad q_2 = \frac{1}{2}\gamma\alpha\omega^2 (2\delta\rho + \beta + L).$$

Заметим, что $q = q_1 + q_2$.

Используя оценку (31), можно доказать, что последовательность $\{X_k(t)\}_0^\infty$, полученная по алгоритму (30), сходится равномерно по $t \in I$ к решению интегрального уравнения (8). С помощью (31) можно получить также оценку

$$\|X - X_{k+1}\|_C \leq \frac{q \|X_{k+1} - X_k\|_C + q_2 \|X_k - X_{k-1}\|_C}{1 - q}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (32)$$

Оценку (32) следует дополнить оценками для $\|X_1 - X_0\|$, $\|X_2 - X_1\|_C$. Очевидно, $\|X_1 - X_0\| \leq \gamma\omega h$. Далее из (30) при $k = 1$ имеем

$$\begin{aligned}
 X_2(t) - X_1 &= \int_0^\omega K(t, \tau) [A(\tau) X_1 + F(\tau, 0)] d\tau - \\
 &- \tilde{A}^{-1}(\omega) \int_0^\omega [X_1 B(\tau) + X_1 Q(\tau) X_1 + F(\tau, X_1)] d\tau + \tilde{A}^{-1}(\omega) \int_0^\omega F(\tau, 0) d\tau.
 \end{aligned} \quad (33)$$

Выполнив в (33) соответствующие оценки, получим

$$\begin{aligned}
 \|X_2(t) - X_1\| &\leq \int_0^\omega \|K(t, \tau)\| \|A(\tau) X_1 + F(\tau, 0)\| d\tau + \\
 &+ \left\| \tilde{A}^{-1}(\omega) \right\| \int_0^\omega [\|X_1 B(\tau) + X_1 Q(\tau) X_1\| + \|F(\tau, X_1) - F(\tau, 0)\|] d\tau \leq \\
 &\leq \frac{1}{2}\gamma\alpha\omega^2 (\alpha \|X_1\| + h) + \gamma\omega [(\beta + L) \|X_1\| + \delta \|X_1\|^2].
 \end{aligned}$$

Отсюда следуют оценка

$$\|X_2 - X_1\|_C \leq \frac{1}{2}\gamma\alpha\omega^2 (\alpha\rho + h) + \gamma\omega [\delta\rho^2 + (\beta + L)\rho].$$

Итак, доказана теорема (3).

Теорема 3. Пусть выполнены условия (3)–(5). Тогда в области D_ρ решение задачи (1), (2) существует и единственно. Это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых алгоритмом (30) (с явной вычислительной схемой) и удовлетворяющих условию (29).

Заметим, что указанный алгоритм содержит достаточно простые вычислительные процедуры и поэтому удобен для применения.

Литература

1. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S. Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems existence and uniqueness // Journ. Mathem. Anal. and Appl., 1992. V. 167. P. 505–515.
2. Лаптинский В. Н. Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998. 300 с.
3. Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И. К конструктивному анализу двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова // Дифференц. уравнения, 2005. Т. 41. № 7. С. 994–996.
4. Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И. О разрешимости двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2006. № 3. С. 218–223.
5. Lapinsky V. N., Makovetsky I. I. On the Two-Point Boundary-Value Problem for the Riccati Matrix Differential Equations // Central European Science Journal, 2005. V. 3(1). P. 143–154.
6. Лаптинский В. Н. Конструктивный анализ периодической краевой задачи для нелинейного матричного дифференциального уравнения Ляпунова. Могилев: Белорусско-Российский университет, 2007. 26 с. (Препринт / ИТМ НАН Беларуси; № 7).
7. Лаптинский В. Н. О периодических решениях нелинейных матричных дифференциальных уравнений // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1997. № 4. С. 14–18.
8. Подоян С. В. Периодические решения нелинейных матричных дифференциальных уравнений // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1988. № 6. С. 31–34.
9. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
10. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.
11. Бибииков Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1991. 303 с.

Лаптинский Валерий Николаевич. Пл. н. с. ГНУ ИТМ НАН Беларуси. Д. ф. -м. н., профессор. Окончил в 1963 году Белорусский ГУ. Количество печатных работ: более 200, из них 11 монографий. Область научных интересов: дифференциальные уравнения. E-mail: i_makz@mail.ru

Маковецкая Ольга Александровна. Ассистент кафедры ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет». Окончила в 2001 г. УО «Могилевский ГУ им. А. А. Кулешова». Количество печатных работ: 7. Область научных интересов: дифференциальные уравнения. E-mail: i_makz@mail.ru