

Вычисление области притяжения для систем с полиномиальной правой частью

А. И. БАРКИН

Аннотация. С помощью частотной теоремы Якубовича—Калмана вычисляется оценка области притяжения для систем, содержащих полиномиальные нелинейности.

Ключевые слова: нелинейные полиномиальные системы, устойчивость, область притяжения, матричные уравнения, частотная теорема.

1. Постановка задачи

Рассматривается система вида

$$\dot{x} = Ax + \sum_{p=2}^N B_p x^{[p]}, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, A — постоянная устойчивая (гурвицева) матрица размера $n \times n$. Вектор $x^{[p]}$ является степенным преобразованием [1] вектора x и имеет размер $m_p \times 1$, где

$$m_p = \binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}. \quad (2)$$

Компонентами $x^{[p]}$ являются лексикографически упорядоченные мономы вида

$$\sqrt{\binom{p}{p_1} \binom{p-p_1}{p_2} \dots \binom{p-p_1-\dots-p_{n-1}}{p_n}} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n}, \quad (3)$$

причем $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n p_i = p$. Соответственно размер постоянной матрицы B_p равен $n \times m_p$.

Свойства степенных преобразований векторов и матриц изложены в [1–3]. Одно из этих свойств, имеющее вид

$$x'^{[p]} x^{[p]} = (x'x)^p, \quad (4)$$

будет использовано ниже (штрихом обозначается операция транспонирования матриц).

Уравнения вида (1) встречаются при описании динамики движущихся объектов и при построении некоторых экономических моделей [4]. При соответствующем выборе матриц B_p уравнениями (1) можно описать все системы со степенными нелинейностями. Известно, что в общем случае при произвольных начальных условиях система (1) может

быть неустойчивой (не является устойчивой в целом). В данной работе решается задача получения оценки области притяжения по начальным условиям x_0 .

2. Основной результат

В качестве возможной функции Ляпунова возьмем квадратичную форму

$$V(x) = x' L x, \quad L = L' > 0 \quad (5)$$

и продифференцируем ее в силу уравнения (1). Получаем

$$\frac{d}{dt} V(x) = x' (A' L + L A) x + 2 \sum_{p=2}^N x' L B_p x^{[p]}. \quad (6)$$

Используя очевидное неравенство $(x' L B_p - x'^{[p]}) \times (B_p' L x - x^{[p]}) \geq 0$, получаем оценку

$$2x' L B_p x^{[p]} \leq x' (L B_p B_p' L) x + x'^{[p]} x^{[p]}. \quad (7)$$

Рассмотрим в фазовом пространстве шар радиуса r :

$$x' x \leq r^2. \quad (8)$$

Отметим, что неравенство (9) можно представить в виде

$$(x' x)^p \leq r^{2(p-1)} x' x. \quad (9)$$

Из приведенных соотношений получаем

$$\frac{d}{dt} V(x) \leq x' (A' L + L A + L M L + \alpha I) x, \quad (10)$$

где

$$\alpha = \sum_{p=2}^N r^{2(p-1)} = (r^2 - r^{2N}) / (1 - r^2), \quad M = \sum_{p=2}^N B_p B_p'. \quad (11)$$

Для того чтобы $\frac{d}{dt} V(x) < 0$ в шаре (9), достаточно существования положительно определенной

действительной симметричной матрицы L , удовлетворяющей неравенству

$$A'L + LA + LML + \alpha I < 0. \quad (12)$$

Необходимые и достаточные условия существования такого решения неравенства (13) даются условием

$$I - \alpha(A - i\omega I)^{-1}M(A' + i\omega I)^{-1} > 0, \quad \forall \omega \geq 0, \quad (13)$$

которое следует из частотной теоремы Якововича — Калмана [5, см. также 1–3].

В том случае, когда матрица M невырожденная, неравенство (13) эквивалентно неравенству

$$M^{-1} - \alpha(A' + i\omega I)^{-1}(A - i\omega I)^{-1} > 0, \quad \forall \omega \geq 0. \quad (14)$$

Итак, при выполнении условия (13) функция (5) положительно определена, а ее производная по времени в силу системы (1) в области (8) отрицательна. Для вычисления области притяжения рассмотрим эллипсоид

$$x' L x = \beta. \quad (15)$$

Для применения теоремы Ляпунова об устойчивости достаточно, чтобы эллипсоид (15) находился внутри шара (8). Для этого длина наибольшей полуоси эллипсоида (15), равная $\sqrt{\beta/\lambda_1}$ (λ_1 — наименьшее собственное значение матрицы L), была не больше радиуса шара r , т. е. при $\beta \leq \lambda_1 r^2$. Таким образом, область притяжения системы (1) при выполнении условия (13) определяется неравенством

$$x'_0 L x_0 \leq \lambda_1 r^2, \quad (16)$$

где L — решение матричного уравнения типа Лурье

$$A'L + LA + LML + \alpha I = 0 \quad (17).$$

Последовательность получения оценки (16) такова:

- 1) определяем наибольшее значение α , при котором удовлетворяется условие (13);
- 2) решаем уравнение (17) относительно матрицы L ;
- 3) вычисляем наименьшее собственное значение λ_1 матрицы L и радиус шара r по формуле (11), что приводит к оценке области притяжения (16).

Пример 1. Пусть система вида (1) описывается уравнениями с кубическими элементами

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + 0,5x_1^3, \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - x_2 + 0,5(\sqrt{3}x_1x_2^2 + x_2^3). \end{aligned}$$

По определению $x^{[3]} = (x_1^3 \sqrt{3}x_1^2x_2 \sqrt{3}x_1x_2^2 x_2^3)$.

$$\text{Имеем } B_3 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad M = B_3 B_3' = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix},$$

$$(A' + i\omega I)^{-1}(A - i\omega I)^{-1} = \Delta_1^{-1}(\omega) \begin{bmatrix} 5 + \omega^2 & 1 - 3i\omega \\ 1 + 3i\omega & 1 + \omega^2 \end{bmatrix},$$

где $\Delta_1(\omega) = (1 + \omega^2)(5 + \omega^2) - (1 + 9\omega^2)$.

Условие (14)

$$\left(4/\alpha - \frac{5 + \omega^2}{\Delta_1(\omega)}\right) \left(2/\alpha - \frac{1 + \omega^2}{\Delta_1(\omega)}\right) - \frac{1 + 9\omega^2}{\Delta_1^2} > 0$$

удовлетворяется для всех $\omega \geq 0$ при $\alpha \leq 0,6$. Решая уравнение (17) при $\alpha = 0,6$ получаем матрицу

$$L = \begin{bmatrix} 1,8079 & 0,3715 \\ 0,3715 & 0,8843 \end{bmatrix},$$

имеющую собственные значения $\lambda_1 = 0,7534$; $\lambda_2 = 1,9388$. В данном случае $\alpha = r^4$, т. е. $r = 0,8801$. Таким образом, оценка области притяжения имеет вид

$$1,8079x_1^2 + 0,7430x_1x_2 + 0,8843x_2^2 \leq \lambda_1 r^2 = 0,5836 \quad (18)$$

Эллипс (18) (кривая 1) изображен на рис. 1. Кривая 2 на том же рисунке определяет истинную границу устойчивости, вычисленную по результатам моделирования.

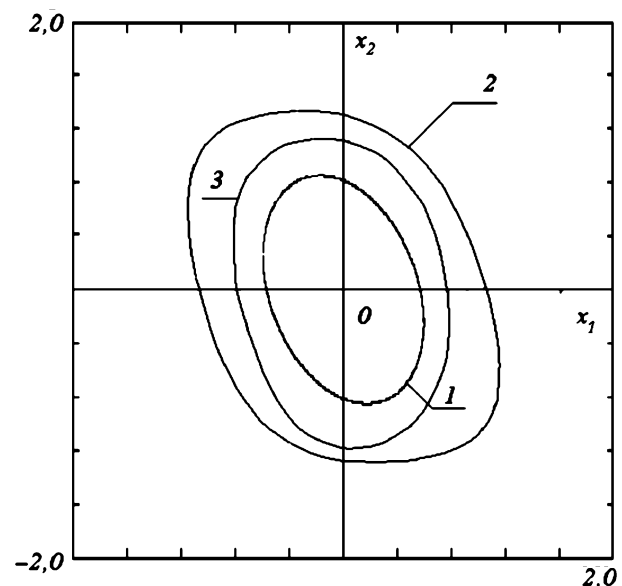


Рис. 1

Пример 2. Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + 0,5x_2^3, \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - x_2 + \sqrt{0,5}x_2^3. \end{aligned}$$

$$\text{Имеем } B_3 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{0,5} \end{bmatrix}, M = B_3 B_3 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,25 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \text{ что совпадает с матрицей } M \text{ из}$$

примера 1. Поэтому дальнейшие вычисления совпадают с примером 1, т. е. область притяжения имеет вид (18) (кривая 1 на рис. 1).

Однако в данном случае эта оценка ближе к истинной границе устойчивости, показанной на рис. 1 в виде кривой 3.

Пример. Дополним систему предыдущего примера квадратичными членами:

$$\dot{x}_1 = x_2 + 0,5(x_1^2 + x_1^3),$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 + 0,5(\sqrt{2}x_1x_2 - x_2^2) + \sqrt{0,5}x_2^3.$$

Имеем

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix},$$

$$M = B_2 B_2' + B_3 B_3' = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 1,0 \end{bmatrix}.$$

Условие (14) удовлетворяется при $\alpha = 0,3$. В соответствии с (11) $\alpha = r^4 + r^2$, откуда $r^2 = 0,2416$. Решая уравнение (17) получаем оценку

$$0,9039x_1^2 + 0,1858x_1x_2 + 0,4421x_2^2 \leq \lambda_1 r^2 = 0,091. \quad (19)$$

Эллипс (19) (кривая 1) изображен на рис. 2. Кривая 2 на том же рисунке определяет истинную границу устойчивости, вычисленную по результатам моделирования. Как видим, истинная граница несимметрична относительно начала координат.

Заключение

Предложенные выше оценки основаны на компактном описании системы с полиномиальными нелинейностями. Они связаны со сравнительно несложными вычислениями, поскольку для необходимых операций (матричная алгебра, уравнения Лурье и Риккати) имеется большой выбор методов в пакетах прикладных программ.

По основному вопросу о точности оценок можно сказать следующее. В том случае, когда в правой части (1) содержатся только нечетные элементы, истинная область устойчивости симметрична относительно начала координат. Эллипсоидальные оценки также имеют эту симметрию и поэтому могут

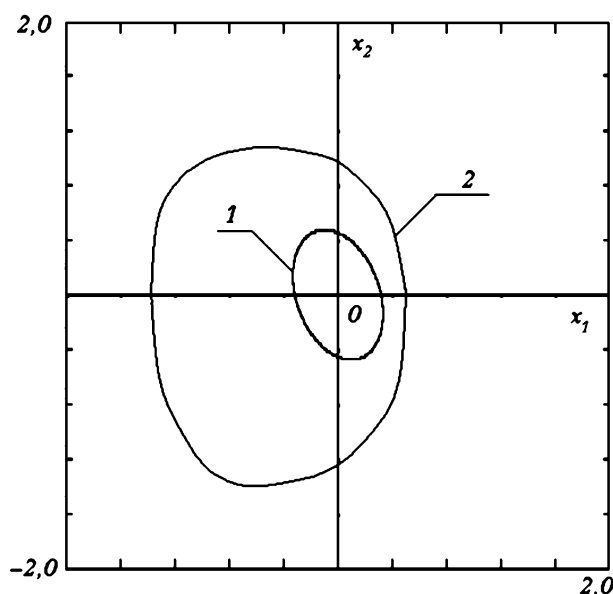


Рис. 2

сравнительно точно описывать область устойчивости (см. примеры 1, 2), хотя можно, разумеется, подобрать примеры, для которых используемые оценки очень консервативны. При наличии четных степеней ситуация ухудшается, поскольку истинная область устойчивости становится несимметричной. В этом случае, как показывает пример 3, симметричные оценки охватывают незначительную часть истинной области устойчивости. Такой же упрек можно отнести и на счет более сложных способов оценки области притяжения [6, 7]. К тому же сложность вычислений во многих случаях трудно оправдать, так как исследуются системы с известными постоянными параметрами, устойчивость которых можно проверить моделированием.

Литература

1. Брокетт Р. У. Алгебры Ли и группы Ли в теории управления // Математические методы в теории систем / Под ред. Ю. И. Журавлева. М.: Мир, 1979. С. 174–200.
2. Баркин А. И., Зеленцовский А. Л., Пакин П. В. Абсолютная устойчивость детерминированных и стохастических систем управления. М.: Издательство МАИ, 1992. С. 300.
3. Баркин А. И. Абсолютная устойчивость систем управления. М.: URSS, 2012. 176 с.
4. Попков Ю. С. Макросистемные модели пространственной экономики. М.: КомКнига, 2008. С. 240.
5. Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука. 1978. С. 400.
6. Valmorbida G., Tarbouriech S., Garcia G. Region of attraction estimates for polynomial systems. Joint 48th IEEE

Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference. Shanghai, P. R. China, December 16–18, 2009. P. 5947–5952.

7. *Tibken B., Hachicho O.* Estimation of the domain of at-

traction for polynomial systems using multidimensional grids // Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control. Sydney, Australia. December 12–15, 2000. P. 3870–3874.

Баркин Александр Иванович. Гл. н. с. ИСА РАН. Д. т. н., профессор. Окончил в 1962 г. МВТУ им. Н. Э. Баумана Кол-во печатных работ: 40, из них 3 монографии. Область научных интересов: системы управления, устойчивость динамических систем, оптимизация. E-mail: barkin@isa.ru