Динамические системы

О природе динамического хаоса в круговой ограниченной задаче трех тел

Д. Н. Никифоров

Аннотация. На примере круговой ограниченной задачи трех тел показан нелокальный эффект размножения циклов и торов в окрестности замкнутого гетероклинического контура невозмущенной системы в соответствии с теорией ФШМ (Фейгенбаума—Шарковского—Магницкого).

Ключевые слова: *ограниченная задача трех тел, теория ФШМ.*

Введение

В публикациях Н. Магницкого [1–4] было продемонстрировано, что динамика гамильтоновых систем является предельным случаем динамики расширенной диссипативной системы со слабой диссипацией при стремлении параметра диссипации к нулю, причем области устойчивости циклов такой системы при нулевой диссипации переходят в торы консервативной (гамильтоновой) системы вокруг ее эллиптических циклов, в которые переходят сами устойчивые циклы. Торы консервативной (гамильтоновой) системы касаются по гиперболическим циклам, в которые переходят седловые циклы расширенной диссипативной системы. При уменьшении параметра диссипации в расширенной диссипативной системе происходит каскад седло-узловых бифуркаций, в процессе которого рождаются устойчивые и седловые циклы, которые образуют в консервативной (гамильтоновой) системе гетероклиническое сепаратрисное многообразие, натянутое на сложные многооборотные гиперболические циклы системы.

При взятии сечения Пуанкаре можно наблюдать семейство гиперболических особых точек, соединенных сепаратрисными контурами. При сдвиге начальных условий система в сечении Пуанкаре выглядит как набор замкнутых кривых вокруг витков эллиптического цикла, что является подтверждением их бифуркационного происхождения. При увеличении числа витков гиперболических и эллиптических циклов растет количество, но уменьшается размер замкнутых кривых, окружающих эллиптические циклы, что приводит к образованию гетероклинического сепаратрисного многообразия в окрестности исходного гиперболического цикла консервативной (гамильтоновой) системы и невозможности точного вычисления траектории в окрестности такого многообразия любым численным методом. Нелокальность эффекта размножения циклов и торов приводит к тому, что более простые гетероклинические сепаратрисные многообразия более высокого порядка появляются при росте значений бифуркационного параметра не только в окрестностях гетероклинических сепаратрисных многообразий более низкого порядка, но и на значительном расстоянии от них.

В данной статье приведена иллюстрация эффекта нелокального размножения циклов и торов на примере седло-узловой бифуркации рождения цикла произвольного периода в расширенной диссипативной системе круговой ограниченной задачи трех тел.

1. Постановка задачи

Рассмотрим движение космического аппарата или небесного тела в системе координат, вращающейся вокруг центра масс системы Земля—Луна в плоскости x—y. Для удобства будем рассматривать задачу в канонических безразмерных единицах. За единицу длины берется постоянное расстояние между Землей и Луной, а единица времени выбрана так, что ω, угловая скорость вращения Земли и Луны вокруг центра масс, равна 1. Третий закон Кеплера для этой формулировке задается уравнением

$$\omega^2|m_1m_2|^3 = g(m_1+m_2) = 1.$$

Координаты Земли и Луны в этой системе координат

$$x_1 = -\mu, \qquad y_1 = 0,$$
$$x_2 = 1-\mu, \quad y_2 = 0.$$

Система безразмерных дифференциальных уравнений второго порядка движения материальной точки спутника или небесного тела в этой вращающейся системе координат задается уравнениями

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - 2\dot{y} &= x - (1-\mu)\frac{x-x_1}{r_1^3} - \mu\frac{x-x_2}{r_2^3},\\
\ddot{y} + 2\dot{x} &= y - (1-\mu)\frac{y}{r_1^3} - \mu\frac{y}{r_2^3},\\
\ddot{z} &= -(1-\mu)\frac{z}{r_1^3} - \mu\frac{z}{r_2^3},
\end{aligned} \tag{1}$$

где

$$x_1 = -\mu,$$
$$x_2 = 1-\mu,$$
$$\mu = \text{Отношение масс Луна-Земля} = m_2/m_1 \approx \frac{1}{81{,}27},$$
$$r_1^2 = (x-x_1)^2 + y^2 + z^2,$$
$$r_2^2 = (x-x_2)^2 + y^2 + z^2.$$

Сформулированная задача имеет один известный интеграл движения

$$x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - (\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = C. \tag{2}$$

В этом выражении C — это произвольная константа, которую обозначают как «интеграл Якоби», а поскольку эта величина не изменяется, то ее также называют «энергией» или «энергией Якоби».

2. Результаты

Рассмотрим случай, когда вращение всех трех тел происходит в плоскости x—y. В таком случае, уравнение (1) эквивалентно четырехмерной консервативной (негамильтоновой) автономной системе уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= z,\\
\dot{y} &= r,\\
\dot{z} &= x + 2r - (1-\mu)\frac{x-x_1}{r_1^3} - \mu\frac{x-x_2}{r_2^3},\\
\dot{r} &= y - 2z - (1-\mu)\frac{y}{r_1^3} - \mu\frac{y}{r_2^3}
\end{aligned} \tag{3}$$

с условием

$$C = x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - (z^2+r^2) = \varepsilon, \ z_0 = 0. \tag{4}$$

Расширенная диссипативная система для системы (3) имеет вид

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= z,\\
\dot{y} &= r,\\
\dot{z} &= x + 2r - (1-\mu)\frac{x-x_1}{r_1^3} - \mu\frac{x-x_2}{r_2^3} - \eta z,\\
\dot{r} &= y - 2z - (1-\mu)\frac{y}{r_1^3} - \mu\frac{y}{r_2^3} - (\varepsilon - C(x,y,z,r))r.
\end{aligned} \tag{5}$$

Интегруя систему (5) при значении значении энергии Якоби $\varepsilon = 0{,}577$ и начальных условиях $x_0 = -0{,}305, y_0 = 0{,}22$, а затем при значении $\varepsilon = 0{,}587$, можно наблюдать, как в системе происходит седло-узловая бифуркация, приводящая к рождению из цикла периода 24 (рис. 2) из цикла периода 6 (рис. 1). В результате бифуркации рождается пара седлового и устойчивого цикла, вокруг которого рождаются торы, граничащие с седловым циклом. Данное явления объясняется эффектом нелокального размножения гиперболических и эллиптических циклов и окружающих их торов, что является

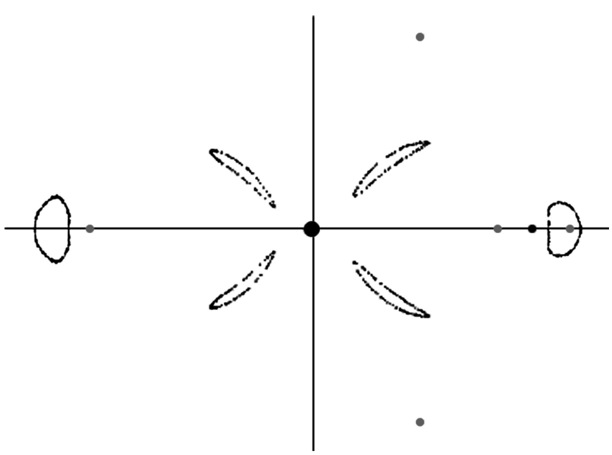

Рис. 1. Проекции на плоскость (x, y) цикла периода 6 при $\varepsilon = 0{,}577, x_0 = -0{,}305, y_0 = 0{,}22$;

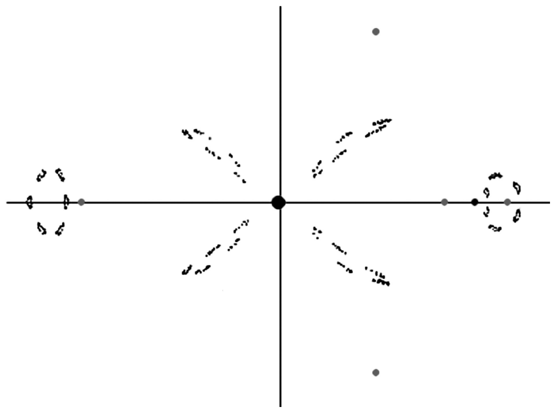

Рис. 2. Проекции на плоскость (x, y) цикла периода 24 при $\varepsilon = 0{,}587$, $x_0 = -0{,}305$, $y_0 = 0{,}22$;

основной причиной усложнения динамики в консервативных системах при росте величины возмущения.

Заключение

В работе на примере круговой ограниченной задачи трех тел показано, как при росте параметра возмущения происходит усложнение динамики системы через рождение циклов и торов вокруг циклов диссипативной системы, что является начальной стадией перехода к хаосу в соответствии со сценарием ФШМ.

Литература

1. *Магницкий Н. А.*, *Сидоров С. В.* Применение теории Фейгенбаума—Шарковского—Магницкого к анализу гамильтоновых систем // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 11. С. 1474–1479.
2. *Магницкий Н. А.* Новый подход к анализу гамильтоновых и консервативных систем // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 12. С. 1618–1627.
3. *Магницкий Н. А.* О природе динамического хаоса в окрестности сепаратрисы консервативной системы // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 647–654.
4. *Магницкий Н. А.* Неклассический подход к анализу гамильтоновых и консервативных систем // Нелинейная динамика и управление. Вып. 8 / Под ред. Емельянова С. В., Коровина С. К. М.: Физматлит, 2010.

Никифоров Дмитрий Николаевич. Аспирант МГУ. Окончил в 2011 г. МГУ им. М. В. Ломоносова. Область научных интересов: хаотическая динамика, численные методы. E-mail: dimaniki@mail.ru