

Нелинейная динамика начальной стадии ламинарно-турбулентного перехода в задаче развития неустойчивости Кельвина—Гельмгольца

Н. М. Евстигнеев, Н. А. Магницкий

Аннотация. В работе публикуются результаты по анализу ламинарно-турбулентного перехода на ранней стадии в задаче развития неустойчивости Кельвина—Гельмгольца. Показывается значимость задачи для фундаментальной и практической науки, устанавливаются границы устойчивости. Показан выбор бифуркационного параметра и параметра «чувствительности». Начально-краевая задача ставится в терминах уравнений вязкого идеального газа. Кратко показан численный метод решения уравнений высокого порядка. Показаны результаты численного расчета в виде скалярных полей газодинамической функции, а также фазовые портреты в трехмерных подпространствах. Даются предварительные оценки сценария перехода к турбулентному режиму и дальнейшее развитие работы.

Ключевые слова: *нелинейная динамика, турбулентность, неустойчивость Кельвина—Гельмгольца, численное исследование уравнений в частных производных.*

Введение

В цикле работ сотрудников лаборатории № 11–3 ИСА РАН ([9]– [12], [14] и др.) были проведены исследования некоторых начально-краевых задач (н. к. з.) для уравнений динамики несжимаемой вязкой жидкости (уравнения Навье—Стокса, гидродинамическое приближение уравнений Больцмана), магнитной гидродинамики слабо сжимаемой жидкости, а также исследованы особенности формирования фазового пространства для сверхзвукового режима течения сжимаемого газа [13]. Задачей работ было рассмотрение ламинарно-турбулентного перехода некоторых характерных н. к. з. для этих уравнений с точки зрения бифуркационной теории динамических систем. В работах показано, что наблюдается либо прямой, либо обратный сценарий Фейгенбаума—Шарковского—Магницкого (ФШМ) [10], в который может входить сценарий Ландау—Хопфа (бифуркации Андронова—Хопфа до тора периода N). Такой сценарий наблюдается во всех пробных точках фазового бесконечномерного пространства и не зависит от выбранной точки в конфигурационном пространстве. В работе [13] проводится исследование характерной н. к. з. для так называемой сжимаемой предельной турбулентности, где рассматриваются уравнения газовой динамики в сверхзвуковых режимах течений при стремлении числа Рейнольдса к бесконечности. Показано, что фазовое пространство распадается на независимые

подпространства и в различных точках наблюдаются различные сценарии перехода к турбулентности. В данной работе рассматривается динамика ламинарно-турбулентного перехода для задачи, в которой развивается неустойчивость Кельвина—Гельмгольца в сжимаемой вязкой газовой среде. Процедура анализа получаемых данных аналогична вышеперечисленным работам.

1. Неустойчивость Кельвина—Гельмгольца

Неустойчивость Кельвина—Гельмгольца возникает при наличии сдвига между слоями сплошной среды, либо когда две контактирующие среды имеют достаточную разность скоростей (см. рис. 1). Впервые бала описана еще Гельмгольцем [4] и Кельвином [5] в середине XIX века.

При этом в сечении, перпендикулярном границе раздела этих сред, профиль скорости имеет точку перегиба (вторая производная скорости по координате сечения обращается в нуль). Как показал Рэлея [6], течение с наличием в профиле скорости точки перегиба является неустойчивым. Теорема получена Рэлеем в приближении идеальной жидкости и является только необходимым (но не достаточным) условием возникновения неустойчивости движения жидкости. Например, течение Пуазейля теряет устойчивость при начальном параболическом профиле скорости, очевидно не имеющем

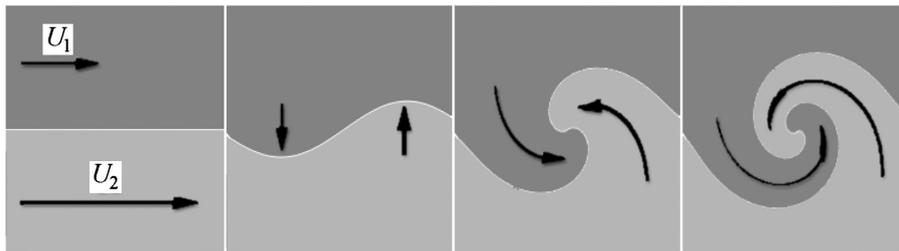


Рис. 1. Схема возникновения неустойчивости Кельвина—Гельмгольца в сдвиговом слое. Более светлая жидкость более легкая

точки перегиба. Тем не менее, утверждение теоремы является весьма общим. Экспериментальные и численные исследования показывают, что, хотя и в отсутствие точки перегиба неустойчивость возможна, абсолютно устойчивых течений с точками перегиба не обнаружено. Многочисленные аналитические работы и численные расчеты демонстрируют неустойчивость при множестве различных параметров. Однако нигде не проведен анализ развития неустойчивости как динамической системы с определением бифуркационных параметров и построением сценариев перехода к хаосу.

Примером проявлений данной неустойчивости в природе являются сдвиговая неустойчивость фазы раздела сред: формирование цилиндрических облаков (атмосферные течения земли), образование ветровых волн в океанах и морях, кольца Сатурна, красное пятно Юпитера, неустойчивость короны Солнца и др. В технике примером проявления неустойчивости Кельвина—Гельмгольца является неустойчивость фазы раздела на среде газ-жидкость, жидкость-плазма, газ-плазма. Например, неустойчивость Кельвина—Гельмгольца возникает на границе плазма-бериллий в инерционных реакторах ядерного синтеза [8].

Критерием устойчивости является число Ричардсона, определяющееся как:

$$Ri = \frac{\Delta\rho gh}{\rho_A \Delta U^2}, \tag{1}$$

где g — ускорение свободного падения, h — высота слоя смешения, ΔU — разница скоростей сдвигового слоя, ρ_A — средняя плотность жидкости (газа), $\Delta\rho$ — разница плотностей сдвиговых слоев. В литературе [6] на основе линейного анализа устойчивости отмечается, что турбулентное перемешивание наступает при $Ri > 1/4$.

2. Исходные уравнения, анализ решений уравнений

Исходные уравнения — уравнения динамики вязкого сжимаемого газа. В дифференциальной фор-

ме рассматривается следующая система уравнений [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho u_j] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho u_i u_j + p \delta_{ij} - \tau_{ij}] &= g_i, \\ i &= 1, 2, 3; \tag{2} \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho u_j E + u_j p - u_i \tau_{ij}] &= 0; \\ E &= \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 + \rho e; \\ p &= (\gamma - 1)(E - 1/2 \rho \mathbf{u}^2). \end{aligned}$$

Здесь для замкнутой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ скалярная функция f определяется как $f : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, вектор-функция \mathbf{f} определяется как $\mathbf{f} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда E — скалярная функция полной энергии газа, e — скалярная функция внутренней энергии газа, γ — показатель адиабаты газа (1,4 для воздуха), p — скалярная функция давления, \mathbf{u} — вектор-функция скорости газа, ρ — скалярная функция плотности газа, \mathbf{g} — внешняя сила. Подразумевается суммирование по одинаковым индексам. Предполагается ньютоновский одноатомный газ с тензором вязких напряжений:

$$\tau_{ij} = 2\nu S_{ij}, \tag{3}$$

где ν — динамическая вязкость газа, а тензор скоростей деформаций определяется как

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \tag{4}$$

Для данной задачи рассматривается трехмерная по пространству система (2), т. е. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Для проведения интегрирования произвольной н. к. з. (постановка которой обсуждается ниже) был построен численный метод. В связи с причинами, указанными в предыдущих работах авторов, необходимым условием проведения бифуркационного анализа является высокая точность результатов, получаемых в численных решениях н. к. з. для исходных уравнений. Так, для моделирования н. к. з. для

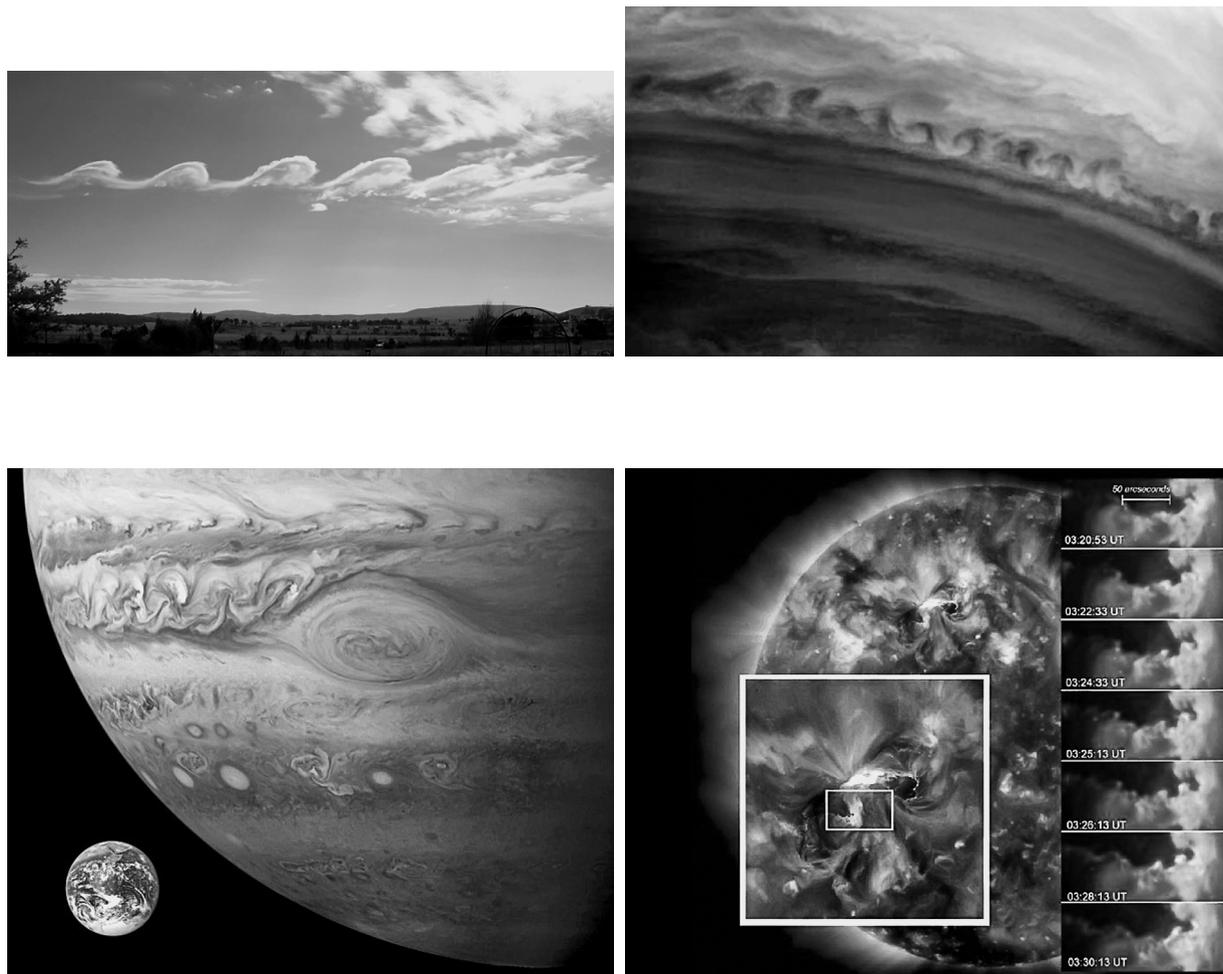


Рис. 2. Примеры неустойчивости Кельвина—Гельмгольца в природе

уравнений Навье—Стокса в работах [9]– [11] применялся метод минимум пятого порядка (на больших градиентах функций) по пространству и четвертого по времени.

3. Численный метод интегрирования

Пусть задана замкнутая область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, в которой определяется н. к. з. и разбиение этой области на N прямоугольных элементов $\delta\Omega$ таких, что:

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{N-1} \delta\Omega_k, \quad (5)$$

$$\delta\Omega_m \cap \delta\Omega_p = \emptyset, \quad m \neq p.$$

Каждый элемент занумеруем индексом i — по оси X , j — по оси Y и k — по оси Z , таким образом

каждый элемент получит уникальный номер в системе координат $\{i, j, k\}$, т. е. формируется структурированная сетка. Рассмотрим векторную запись (2) в интегральной форме на каждом элементе. Применяя теорему Гаусса, получим:

$$\int_{\Omega_p} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} d\mathbf{x} + \oint_{\partial\Omega_p} \mathbf{F} dS = \int_{\Omega_p} \mathbf{g} d\mathbf{x} + \oint_{\partial\Omega_p} \mathbf{G} dS, \quad (6)$$

где: $\mathbf{U} = (\rho; \rho\mathbf{u}; \rho E)^T$ — вектор консервативных переменных; $\mathbf{g} = (0; g_x; g_y; g_z; 0)^T$; $\mathbf{F} = [(\rho\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}; ((\rho\mathbf{u}) \otimes (\mathbf{u}^T) + \mathbb{I}p)\mathbf{n}; (\mathbf{u}(\rho E + p)) \cdot \mathbf{n}]^T$ — вектор невязких потоков; $\mathbf{G} = [0; 2\nu S\mathbf{n}; 2\nu(S\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}]^T$ — вектор вязких потоков; \mathbf{n} — вектор нормали к поверхности; \mathbb{I} — единичная матрица. Здесь $\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}^T$ следует понимать как тензорное произведение вектора-столбца на вектор-строку, результат — матрица. Переходя от интеграла

к сумме (сумма по всем граням элемента Ω_i):

$$\frac{dU_i}{dt}(dxdydz)_i + \sum_j F_{ij}dl_j - \sum_j G_{ij}dl_j = g(dxdydz)_i, \tag{7}$$

где dl_j — площадь границы элемента Ω_i . В связи с тем, что уравнение записывается на структурированной сетке, последнее уравнение можно расщепить по направлениям и для простоты рассматривать одномерную задачу.

Для расчета (7) рассматривается консервативная схема для уравнения (7) в дискретной форме

на сетке $G_m = (x_i \times t_n)$ ($x_i = \sum_{i=1}^N \Delta x_i$), вида:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t_n} + \frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{\Delta x_i} = \frac{G_{i+1/2} - G_{i-1/2}}{\Delta x_i} + g_x, \tag{8}$$

где g_x — составляющая вектора гравитации на выбранном одномерном направлении. Дальнейшее расщепление уравнения (8) можно провести на основании расчета сначала невязкого потока на первом полушаге и решение вязкого потока на втором полушаге. Для решения невязкой части уравнений применяется метод конечного объема, основанный на том, что пространственная аппроксимация проводится не в точке-центре сетки, а на гранях (индексы $i \pm 1/2$) между двумя соседними сетками. Расчет невязких потоков через грани сетки $F_{i \pm 1/2}$ основан на решении задачи Римана на каждой грани. Итерационное аналитическое решение задачи о распаде произвольного разрыва проводится с помощью хорошо известного метода С. К. Годунова [3]. Для такой дискретизации справедлива

Теорема Лакса—Вендроффа [2].

Пусть введена последовательность сеток $\{G_m\}$, такая, что $\Delta l_i, \Delta t_n \rightarrow 0$, когда $i \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ и пусть $U_m(t, x)$ — численное решение н. к. з. с применением схемы (7) на m -том пространстве сеток, численный поток F является консервативным и согласованным и выполнено условие устойчивости численной схемы. При решении задачи Римана в каждой точке G_m так, что при $m \rightarrow \infty, U(t, x)_m$ сходится к $U(t, x)$ почти всюду (т. е. может быть за исключением множества меры нуль). Тогда $U(t, x)$ есть слабое решение (2).

Более детально см. работы [9, 13]. Для доказательства сходимости вязкостной части уравнений достаточно в связи с линейностью уравнений доказать аппроксимацию и устойчивость схемы. Аппроксимация выполняется методом конечного элемента с трилинейной интерполяцией, позволяющим достигнуть четвертого порядка точности по пространству. Такая аппроксимация, в отличие от класси-

ческой конечно-разностной аппроксимации четвертого порядка, не имеет неустойчивых собственных значений линейного оператора (см. [9]). Устойчивость же достигается применением неявной схемы интегрирования по времени на каждом шаге метода Рунге—Кутты. Таким образом достигается сходимость вязкой части схемы. Решение задачи Римана выполняется на основе итерационного метода Годунова, описанного и протестированного в работе [13]. Для повышения точности расчета используется монотонизированный TVB вариант схемы WENO 9-го порядка [13], которая на разрывных и немонотонных решениях падает до 5-го порядка. Метод интегрирования по времени — TVD многошаговый метод четвертого порядка точности для невязких потоков и неявный для вязких потоков. Общая аппроксимация имеет порядок $\mathcal{O}(\Delta t^4, \max(\Delta x_i)^4)$, критерий устойчивости $\Delta t \leq \sum_j \frac{\Delta x_j}{\|u\| + a}$, где $a = \sqrt{\gamma p / \rho}$.

В таком случае достигается сходимость.

4. Постановка начально-краевой задачи

В качестве характерной задачи будем рассматривать задачу течения вязкого газа в прямоугольной области, см. рис. 1.

Область Ω — прямоугольная, размером $X = 1,8$ м, $Y = 0,3$ м $Z = 0,7$ м, сила гравитации направлена по направлению оси $-Y$. Граничные условия: условия симметрии по оси Y при $y = 0$ и $y = 0,3$, условия периодичности по оси Z , условия свободного истечения из области по оси X при $x = 1,8$. При $x = 0$ задаются невозмущенные условия потока. Плотность потока, расположенного снизу, на 40% ниже плотности потока газа, расположенного выше. Скорость нижнего потока на 50% выше, чем скорость верхнего потока, что создает неустойчивый сдвиговой слой. Модуль вектора гравитации подбирается так, чтобы обеспечить неустойчивость по критерию Ричардсона, поскольку является свободным параметром. Начальное условие — невозмущенное течение газа во всей области с характеристиками, определяемыми граничными условиями на входе при $x = 0$. Давление задается так, чтобы максимальное число Маха составляло 0,8. Расчет числа Ричардсона выполняется по формуле (1). Здесь $h = 0,15, \Delta \rho = 0,4, \rho_A = 0,8, \Delta U = 0,5$. Для такой задачи число Ричардсона $Ri = 2,2$. Для учета вязкости вводится единственное число Рейнольдса, определяемое как:

$$R = \frac{\Delta U h \rho_A}{\nu}. \tag{9}$$

Таблица 1

Координаты точек анализа фазового портрета

№ точки	x	y	z
0	0,18	0,21	0,35
1	0,36	0,09	0,35
2	0,54	0,09	0,35
3	0,9	0,09	0,35
4	1,62	0,09	0,35
5	1,08	0,27	0,35
6	1,08	0,24	0,35
7	1,08	0,21	0,35
8	1,08	0,18	0,35
9	1,08	0,15	0,35

Таким образом формируется сложная двухпараметрическая задача, где бифуркационными параметрами являются Ri и R ; таким образом задача близка к задаче неустойчивости Рэлея—Бенара, см. [10]. Здесь число Ричардсона будет задавать «жесткость» отклика на изменение числа Рейнольдса. В настоящее время рассматривается только одна ветвь по параметру R для фиксированного $Ri = 2,2$. Для анализа фазового портрета, получаемого при расчете задачи, вводится 10 контрольных точек, в которых записывается пять параметров системы — вектор U . Для данной задачи рассматривались точки с координатами, указанными в табл. 1.

Размер сетки составляет $(800 \times 500 \times 350)$; таким образом прямое численное моделирование обеспечивается до $R \leq 4170$. Расчет ведется на графических процессорах NVIDIA C2050 и C2070, все переменные заданы с двойной точностью.

5. Результаты расчета

Рассмотрим результаты некоторых расчетов поставленной начально-краевой задачи. Для анализа бифуркационной картины в различных точках области расчета записывались переменные, входящие в U , после чего по ним строились фазовые портреты поведения системы после выхода решения системы (2) на квазистационарный режим.

Вначале при $R < 1000$ в фазовом подпространстве наблюдается устойчивая точка, что соответ-

ствует стационарному течению. При этом благодаря вязкости слой смешения смазывается и представляет из себя равномерно распределенный переход по плотности и по скорости. Начиная с $R = 1000$ образуется начальный «валец», похожий на неустойчивость, изображенную на рис. 3. Образование такого «валца» приводит к потере устойчивости стационарной точкой и рождению цикла во всех рассматриваемых трехмерных подпространствах. Образует-

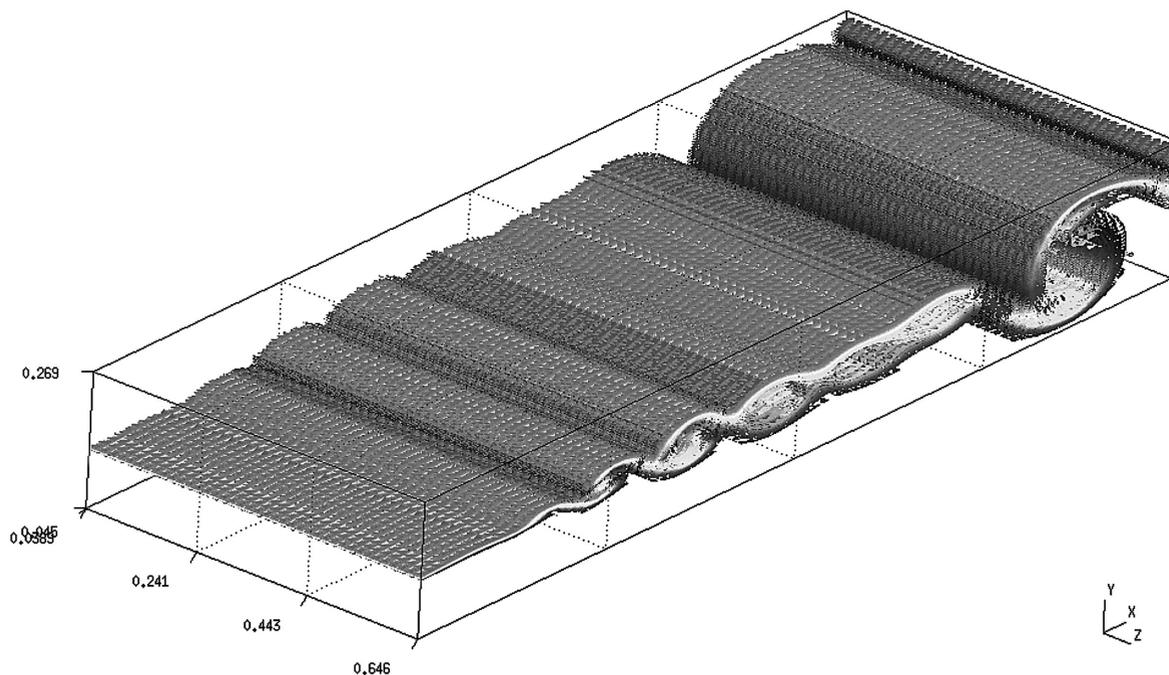


Рис. 3. Возникновение неустойчивости Кельвина—Гельмгольца. Изоповерхности плотности. $Ri = 2,2$, $R = 2000$

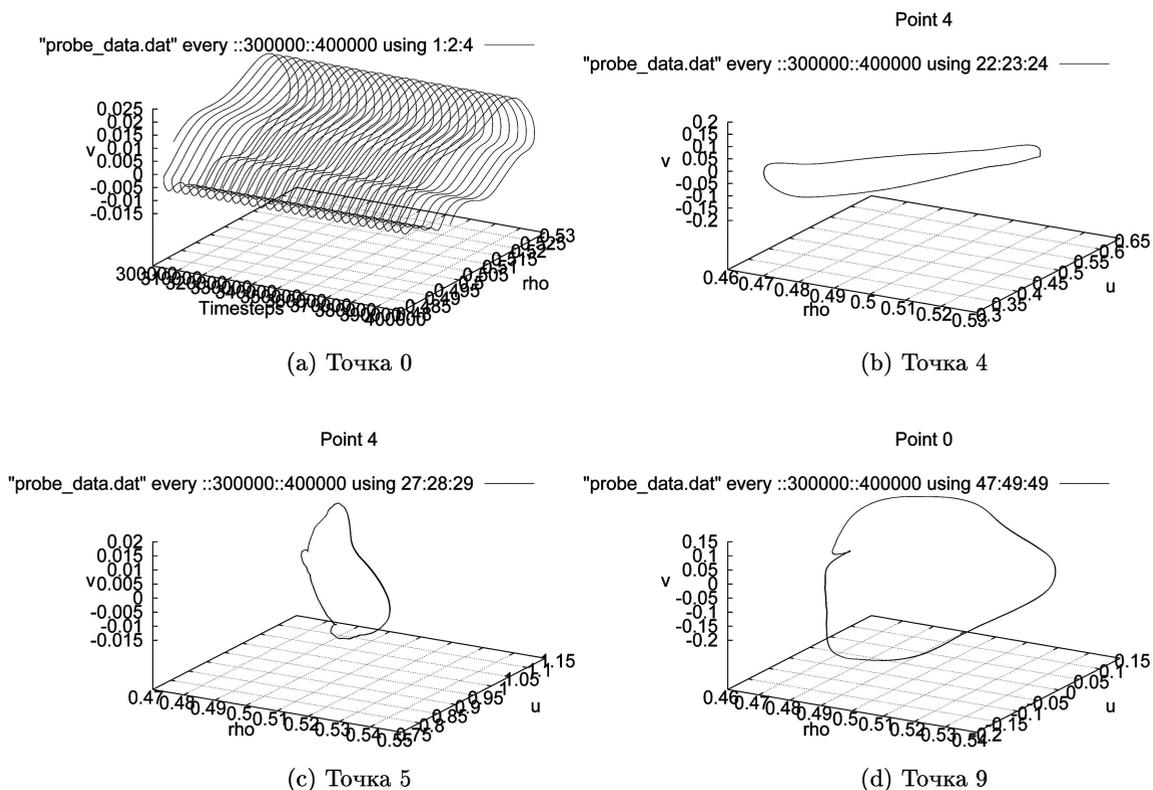


Рис. 4. Фазовые портреты точек, $R = 1000$. Верхний левый рисунок — цикл во времени; u — скорость в направлении x , v — скорость в направлении y , ρ — плотность ρ

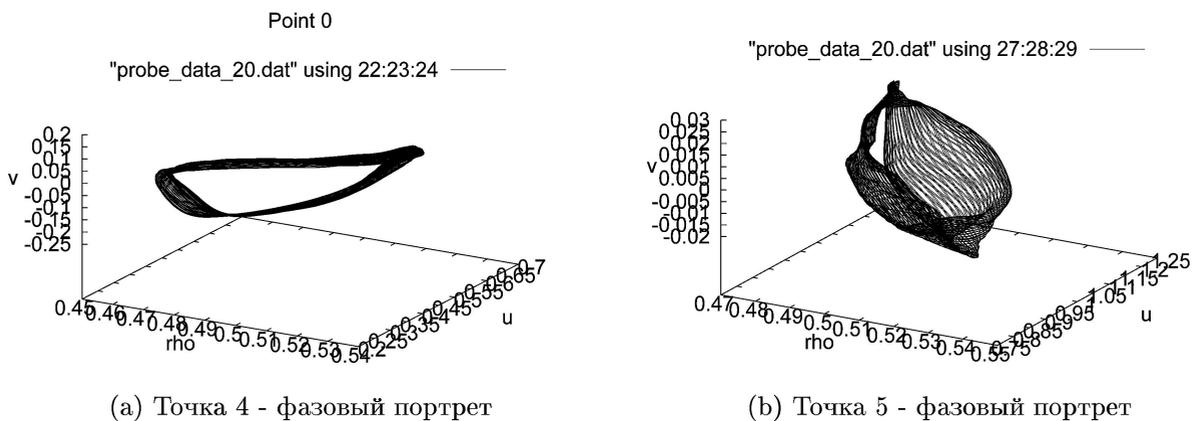


Рис. 5. Фазовые портреты точек, $R = 2000$

мые циклы в различных точках показаны на рис. 4d. Полученные данные соответствуют квазистационарному решению и построены по 500 000 точек.

При дальнейшем увеличении бифуркационного параметра происходит потеря устойчивости через бифуркацию Андронова—Хопфа с образованием тора, показанного на рис. 5. Для получения более точной картины были построены сечения торов плоскостью, построенной по среднему значению одному из компонент вектора \mathbf{U} . Компонента подбиралась

так, чтобы дать наиболее удобное визуальное представление. Такие сечения показаны на рис. 6, 7. Отчетливо видно форму тора в сечениях во всех точках.

Расчет был завершен на $R = 2800$ при котором происходит усложнение формы торов, что показано на рис. 8, 9. Аналогичное усложнение возникало и при рассмотрении задачи в конвекции Рэлея—Бенара, см. [10]. Дальнейшее усложнение решения пока показало хаотическое поведение при $R = 3000$ и здесь не показано.

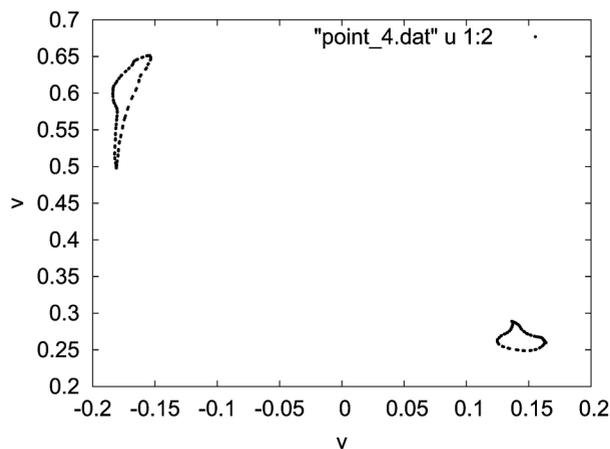


Рис. 6. Точка 4, сечение фазового портрета плоскостью, $R = 2000$

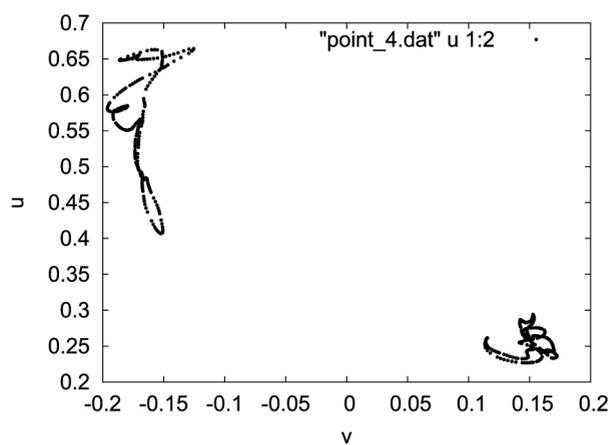


Рис. 8. Точка 4, сечение фазового портрета плоскостью, $R = 2800$

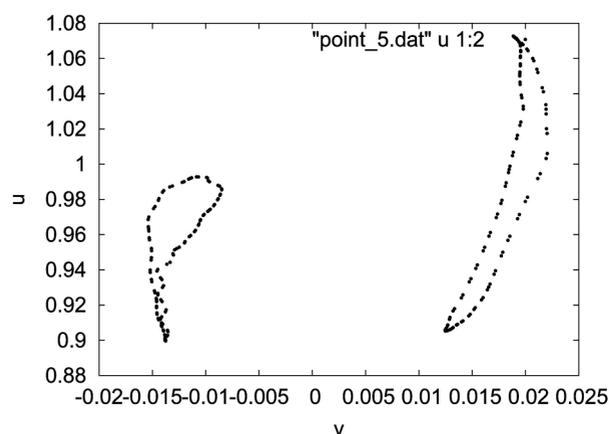


Рис. 7. Точка 5, сечение фазового портрета плоскостью, $R = 2000$

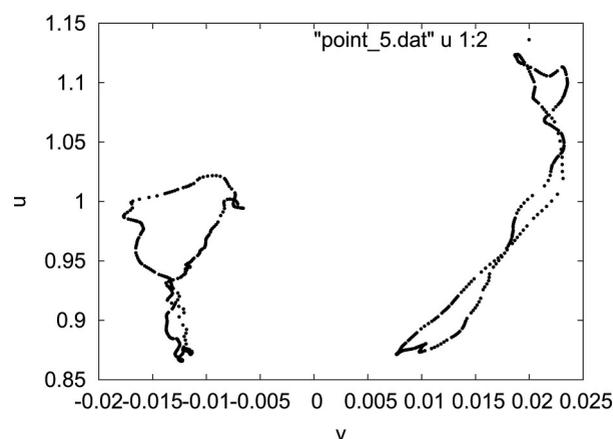


Рис. 9. Точка 5, сечение фазового портрета плоскостью, $R = 2800$

Заключение

В данной работе проанализирована задача возникновения неустойчивости Кельвина—Гельмгольца для течения вязкого газа. Проведен расчет начально-краевой задачи при фиксированном числе Ричардсона $Ri = 2,2$ и изменении числа Рейнольдса от 100 до 2800. Обнаружены бифуркации рождения цикла (при $R = 1000$) и бифуркация Андронова—Хопфа с рождением тора (при $R = 2000$). В связи с тем, что течение является дозвуковым, данные бифуркации происходят во всей области расчета независимо от точек анализа. При $R = 2800$ наблюдается усложнение траекторий движения тора, что, скорее всего, приведет к срыву в хаотический режим, аналогично задаче Рэля—Бенара [10] при малом числе Прандтля. Обнаруженная начальная стадия ламинарно-турбулентного перехода характерна

для сценария ФШМ [9], который был ранее обнаружен в задачах для несжимаемой жидкости. Дальнейшее исследование планируется провести по двум направлениям. Во-первых, посмотреть зависимость от числа Ричардсона, т. е. уменьшить «жесткость» системы по отношению к числу Рейнольдса. Особенно интересен режим около границы устойчивости, найденной в линейном приближении. Во-вторых, рассмотреть сверхзвуковое течение вязкого газа и исследовать влияние вязкости на результат расщепления фазового пространства, полученный в [13].

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 11–07–00126а) и программой ОНИТ1 РАН (проект 1.4).

Литература

1. Белоцерковский О. М., Опарин А. М. Численный эксперимент в турбулентности. От порядка к хаосу. М.: Наука, 2001.
2. Toro E. F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Springer Verlag, 1999.
3. Годунов С. К. (ред.) Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
4. Helmholtz Hermann von. Über discontinuierliche Flüssigkeits-Bewegungen. Monatsberichte der Koniglichen Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 23: 215–228, 1868.
5. Lord Kelvin (Thomson William). Hydrokinetic solutions and observations // Philosophical Magazine. 42: 362–377, 1871.
6. Линь Цзя-Цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностранной литературы, 1958.
7. Amerstorfer U., Erkaev N. V., Taubenschuss U., Biernat H. K. Influence of a density increase on the evolution of the Kelvin-Helmholtz instability and vortices // Physics of Plasmas. 2007. V. 7. P. 072901–8.
8. Harding E. C., Hansen J. F., Hurricane O. A., Drake R. P., Robey H. F., Kuranz C. C., Remington B. A., Bono M. J., Grosskopf M. J., Gillespie R. S. Observation of a Kelvin-Helmholtz Instability in a High-Energy-Density Plasma on the Omega Laser // Physical Review Letters LLNL-JRNL–410680. February 18, 2009.
9. Evstigneev N. M., Magnitskii N. A., Sidorov S. V. Nonlinear dynamics of laminar-turbulent transition in three dimensional Rayleigh-Benard convection // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. October 2010. V. 15. Issue 10. P. 2851–2859.
10. Evstigneev N. M., Magnitskii N. A. On possible scenarios of the transition to turbulence in Rayleigh-Benard convection // Doklady Mathematics Russian Acad. Sc., 8/2010. V. 82. Issue 1. P. 659–662 (Turbulence Mathematics, general Mathematics).
11. Evstigneev N. M., Magnitskii N. A. Nonlinear dynamics in the initial-boundary value problem on the fluid flow from a ledge for the hydrodynamic approximation to the boltzmann equations // Differential Equations. 12/2010. V. 46. Issue 12. P. 1794–1798.
12. Evstigneev N. M., Magnitskii N. A. Nonlinear Dynamics of Laminar-Turbulent Transition in Back Facing Step Problem for Boltzmann Equations in Hydrodynamic Limit // Proc. of AIP (American Institute of Physics). 2010. V. 1281. P. 896–900.
13. Евстигнеев Н. М., Магницкий Н. А. Особенности фазового пространства уравнений динамики газа для трансзвуковой начально-краевой задачи // Труды ИСА РАН. 2012. Т. 62. Вып. 4. С. 85–102.
14. Евстигнеев Н. М., Магницкий Н. А., Рябков О. И. Численное исследование перехода к турбулентности в задаче о двумерном течении вязкой сжимаемой проводящей жидкости в канале с симметричным расширением // Труды ИСА РАН. 2012. Т. 62. Вып. 1. С. 55–62.
15. Евстигнеев Н. М. Интегрирование трехмерных уравнений невязкого газа на неструктурированной сетке с применением распределенных вычислений // Вычислительные методы и программирование, НИВЦ МГУ. 2007. Т. 8. С. 252–264.

Евстигнеев Николай Михайлович. К. т. н., с. н. с. лаборатории 11–3 ИСА РАН. Количество печатных работ: более 30. Адрес: 125 167, Москва, ул. Планетная, д. 25, кв. 27, т. (495)998–7683, e-mail: evstigneevnm@yandex.ru

Магницкий Николай Александрович. Зав. лаб. ИСА РАН. Д. ф.-м. н., профессор. Окончил в 1974 г. МГУ им. М. В. Ломоносова. Количество печатных работ: более 200, 6 монографий. Область научных интересов: интегральные и дифференциальные уравнения, нелинейные хаотические динамические системы, нейронные сети и математическое моделирование. E-mail: nikmagn@gmail.com