

Об изменении подъемной силы в задаче об обтекании цилиндра при начальных стадиях перехода к турбулентности*

Д. А. БУРОВ, О. И. РЯБКОВ

Аннотация. Методами численного моделирования исследуется задача обтекания цилиндра в канале вязким сжимаемым газом в двумерной постановке. Задача рассматривается при фиксированном значении числа Маха, равном 0,3. Целью настоящей работы является изучение развития сценария бифуркаций при изменении параметра (число Рейнольдса), обнаружение первой бифуркации, приводящей к потере симметрии решения, и исследование изменения подъемной силы, действующей со стороны газа на цилиндр. Для численного исследования используется явная схема высокого порядка типа Годунова на регулярной прямоугольной сетке. Криволинейная граница цилиндра аппроксимируется с помощью метода погруженной границы. Расчеты проводились на кластере *cuda.cs.msu.su* НИВЦ МГУ имени М. В. Ломоносова.

Ключевые слова: динамические системы, хаос, сценарий ФШМ, сжимаемая среда, гидродинамика, подъемная сила.

1. Описание задачи

Исследуется задача об обтекании кругового цилиндра вязкой сжимаемой жидкостью в прямоугольном канале. Задача рассматривается в двумерной постановке, что можно интерпретировать как случай, соответствующий бесконечной (очень большой) длине цилиндра. В случае, если плоскость течения жидкости перпендикулярна стенкам канала (а, следовательно, и образующим цилиндра), можно перейти к рассмотрению плоской задачи в ограниченной области. Это значительно упрощает рассмотрение исходной трехмерной задачи, хотя и является некорректным при больших значениях числа Рейнольдса.

В качестве основных уравнений берутся уравнения Навье—Стокса для вязкой сжимаемой среды [7, 8]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot ((E + p) \vec{v}) = \nabla \cdot (\sigma \otimes \vec{v}). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь σ — тензор вязких напряжений.

Поскольку будут рассматриваться нестационарные решения, то постановка задачи помимо самих уравнений в частных производных требует также введения некоторых непротиворечивых начальных и граничных условий, что представляет собой нетривиальную задачу и связано с так называемыми характеристиками. Следует заметить, что хотя уравнения Навье—Стокса формально являются уравнениями параболического типа, при высоких значениях числа Рейнольдса (малой вязкости) коэффициент при старшей производной является малым, что приводит к необходимости при построении схемы учитывать свойства «гиперболических членов» первого порядка.

Обозначим Ω прямоугольную область канала. Тогда расчетной областью является $\Omega \setminus D$, где D — область цилиндра (или любого другого твердого тела). Тогда $\partial\Omega$ — граница. Через Γ_1 обозначим вход (inlet), Γ_2 — выход (outlet). Схематично геометрия изображена на рис. 1. По вертикали размер расчетной области равен 1, по горизонтали — 2; радиус цилиндра равен 0,1; центр цилиндра (если рассматривать нижний левый угол в качестве начала прямоугольной декартовой системы координат, а ось абсцисс направить вдоль длинной стороны области Ω) находится в точке $(2/3, 0,5)$. На рис. 1 изображены также 4 выбранных для исследования хаотической динамики точки, обозначенные $P_0 = (1, 0,5)$, $P_1 =$

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №12–07–31177 мол.а).

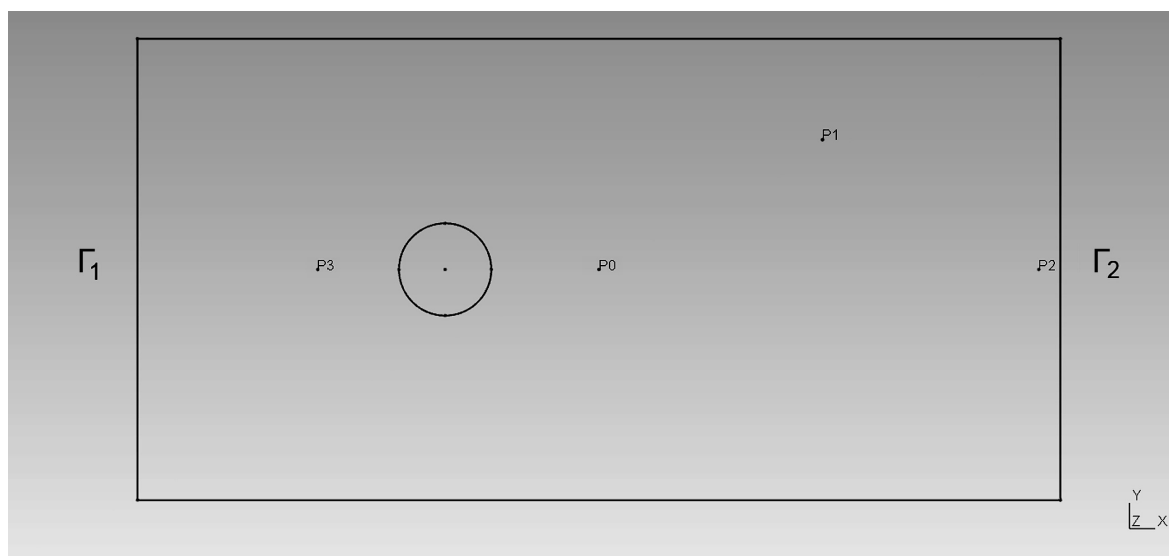


Рис. 1. Геометрия задачи

$= (1^{31/64}, 2^{25/32}) = (1,484375, 0,78125)$, $P2 = (1^{61/64}, 0,5) = (1,953125, 0,5)$, $P3 = (2^{25/64}, 0,5) = (0,390625, 0,5)$. В работе представлены только результаты, полученные для точки P3. Ниже представлены граничные условия в областях Γ_1 и Γ_2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(x, y, t) = \tilde{\rho}, \\ v_j(x, y, t) = \tilde{v}_j \quad \forall j = 1, 2, \\ \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial \vec{n}} = 0, \end{array} \right\} \text{ при } (x, y) \in \Gamma_1, \quad 0 < t < T;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho(x, y, t)}{\partial \vec{n}} = 0, \\ \frac{\partial v_j(x, y, t)}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \forall j = 1, 2, \\ p(x, y, t) = p_0, \end{array} \right\} \text{ при } (x, y) \in \Gamma_2, \quad 0 < t < T. \quad (2)$$

Таким образом, в области Γ_1 (inlet) для четырех из пяти величин задано условие Дирихле и для одной — условие Неймана. С другой стороны, в области Γ_2 (outlet) ситуация ровно противоположная (одно условие Дирихле, пять условий Неймана). Такой подход отчасти соответствует методу постановки характеристических условий для гиперболических систем уравнений [1], когда количество задаваемых условием Дирихле величин определяется количеством входящих в область характеристик.

Вдоль оси y (поперечной основному потоку) ставились условия периодичности области. На поверхности цилиндра (окружности) ставились условия «прилипания» ($v = 0$).

Помимо граничных необходимо также задать и начальные условия. Выпишем их:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(x, y, 0) = \tilde{\rho}, \\ v_j(x, y, 0) = v_{0j} \quad \forall j = 1, 2, \\ p(x, y, 0) = p_0, \end{array} \right\} \text{ при } (x, y) \in \Omega \setminus D. \quad (3)$$

Следует обратить внимание, что начальные и граничные условия для давления согласованы (то есть значения в начальный момент времени совпадают с теми значениями на границе, где задана задача Дирихле), и, кроме того, задаются из следующих соображений. В качестве характерной скорости используется скорость на входе (v_{00}, v_{01}) , которая в свою очередь (так как мы решаем безразмерную задачу) берется равной единичному значению $(1, 0)$. Характерная плотность $\tilde{\rho}$ также полагается равной единице. Как уже отмечалось, задача решается при фиксированном значении числа Маха $M = v/c = 0,3$. Для этого давление выбирается так, чтобы $\sqrt{p/\rho} = c_{cp}$, где c_{cp} — желаемая скорость звука в среде, которая исходя из условия $M = 0,3$ берется равной $c_{cp} = 3,33$. В качестве бифуркационного параметра берется число Рейнольдса $Re = \rho v L / \eta$, где в качестве характерного размера L выбирается диаметр цилиндра. Число Рейнольдса варьировалось путем выбора соответствующего значения динамической вязкости η .

2. Схема численного решения

Для численного решения поставленной задачи использовалась чисто явная схема высокого порядка точности. Для пространственной аппроксимации конвективных членов применялась WENO5-

реконструкция (см. [3]), необходимая для разрешения областей высоких градиентов переменных без появления численных осцилляций решения. Для интегрирования по времени применялась TVD-RK3 схема, вязкие члены аппроксимировались с помощью конечных разностей. Отдельно стоит отметить способ разрешения криволинейной границы цилиндра. Для этого использовался метод «погруженной границы». Ранее для разрешения нестационарных аттракторов в задачах гидродинамики этот подход уже применялся в [5], однако в последней работе он применялся в сочетании с сеточным методом Больцмана.

3. Сценарий бифуркаций

В результате численного исследования было установлено, что при значении числа Рейнольдса $Re = 50$ в системе существует хорошо различимое периодическое решение (рис. 2 и 3). Как минимум при значении числа Рейнольдса $Re = 500$ в системе существует квазипериодическое решение (рис. 6 и 7). Решение, обнаруженное при больших значениях параметра ($Re = 540,5$ и $Re = 588,2$), также было классифицировано нами как квазипериодическое решение с двумя частотами (двумерный тор), однако при более детальном рассмотрении временных зависимостей и фазовых портретов можно увидеть обмотку малой амплитуды, которая может свидетельствовать о наличии в системе третьей частоты (трехмерный тор). По всей видимости, для прояснения этого вопроса требуется накопление большего числа данных, чтобы увидеть более детальную картину в сечении Пуанкаре. В целом найденные начальные стадии соответствуют начальным стадиям сценария Ландау—Хопфа [2, 6], а также не про-

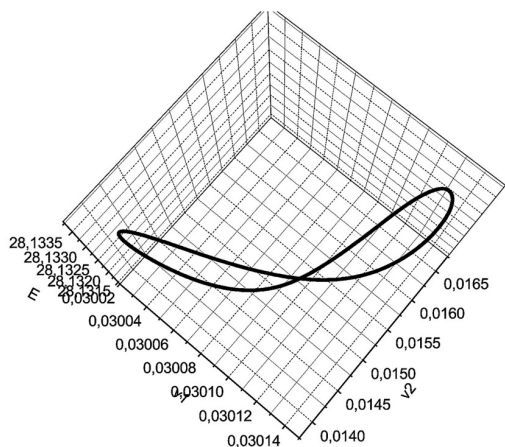


Рис. 2. Фазовый портрет системы в точке $P3$ при значении $Re = 50$ — периодическое решение

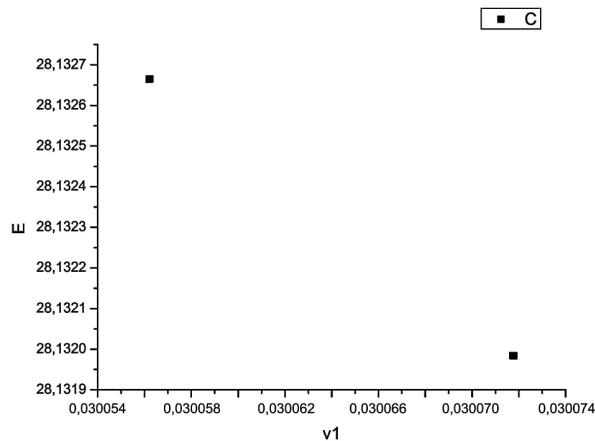


Рис. 3. Сечение фазового портрета системы в точке $P3$ при значении $Re = 50$

тиворечат предложенному в [9] и [10] обобщенному сценарию (в частности, в задаче, исследованной в работе [4], был обнаружен сценарий, при котором после трех бифуркаций Хопфа образовавшийся трехмерный тор претерпевает бифуркацию удвоения периода).

На остальных рис. 2–11 представлены фазовый портрет системы в контрольной точке $P3$ и его сечение при различных значениях числа Рейнольдса.

Внешний вид решения (пространственное распределение плотности течения) представлен на рис. 12–13 для двух характерных значений числа Рейнольдса: $Re = 1$ — стационарное течение (большая вязкость), $Re = 666,7$ — нестационарное решение при низкой вязкости (для данного значения параметра тип решения определить не удалось).

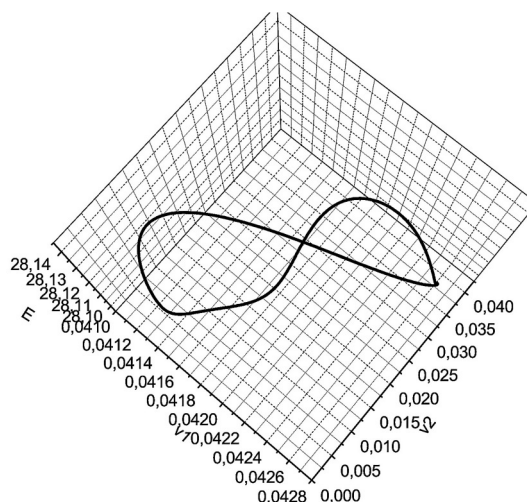


Рис. 4. Фазовый портрет системы в точке $P3$ при значении $Re = 100$ — периодическое решение

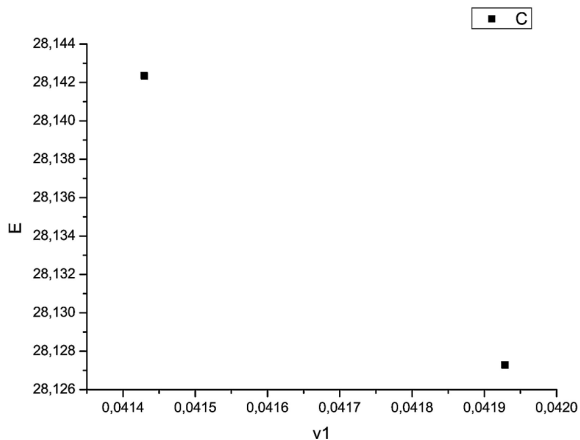


Рис. 5. Сечение фазового портрета системы в точке $P3$ при значении $Re = 100$

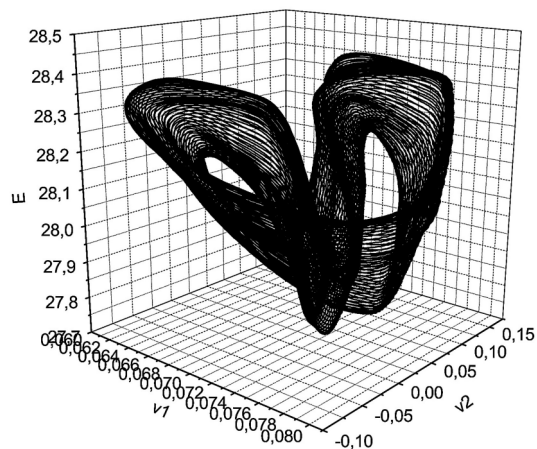


Рис. 8. Фазовый портрет системы в точке $P3$ при значении $Re = 540,5$ — квазипериодическое решение

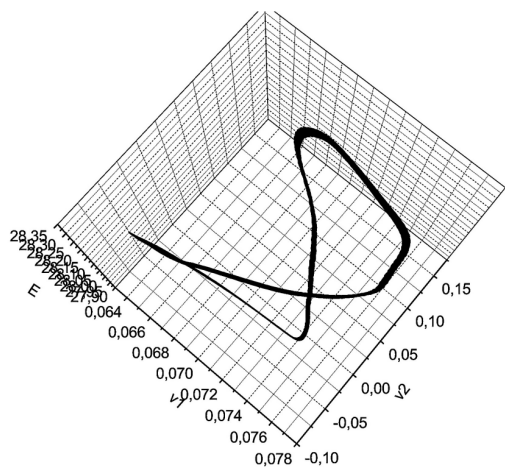


Рис. 6. Фазовый портрет системы в точке $P3$ при значении $Re = 500$ — квазипериодическое решение

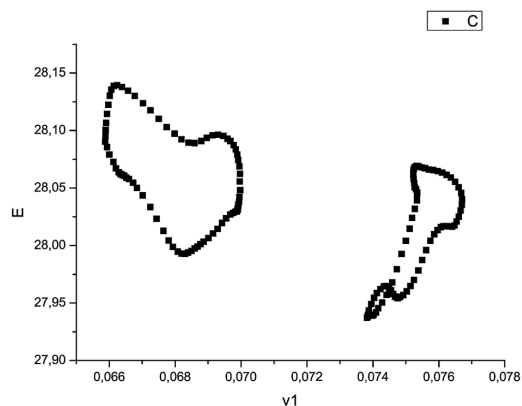


Рис. 9. Сечение фазового портрета системы в точке $P3$ при значении $Re = 540,5$

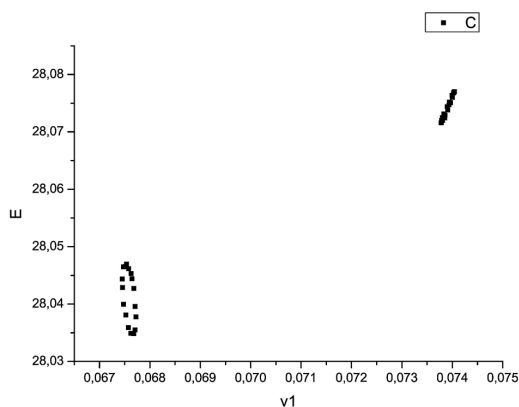


Рис. 7. Сечение фазового портрета системы в точке $P3$ при значении $Re = 500$

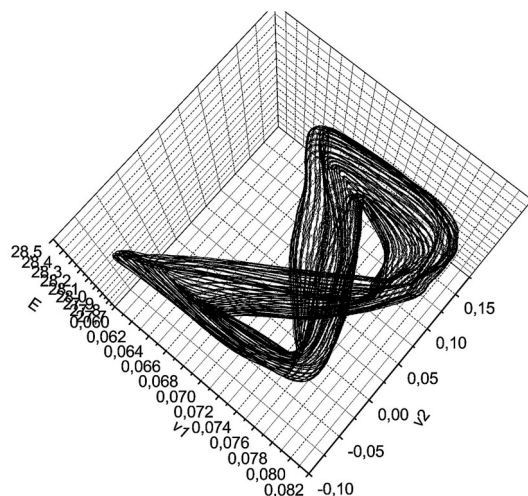


Рис. 10. Фазовый портрет системы в точке $P3$ при значении $Re = 588,2$ — квазипериодическое решение

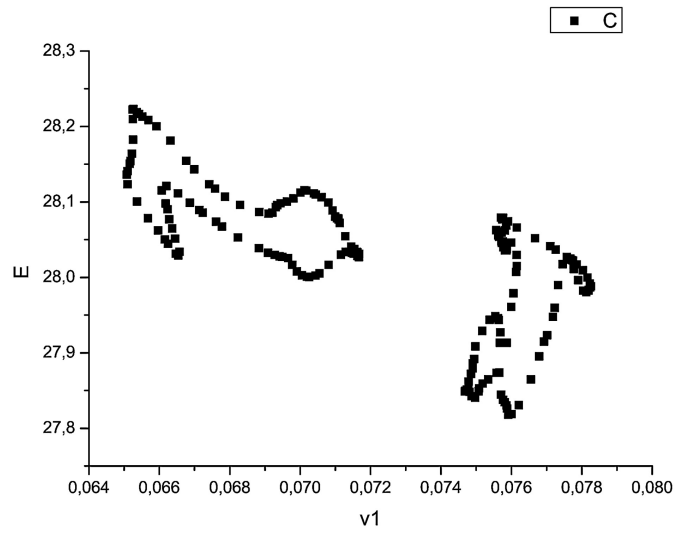


Рис. 11. Сечение фазового портрета системы в точке $P3$ при значении $Re = 588,2$

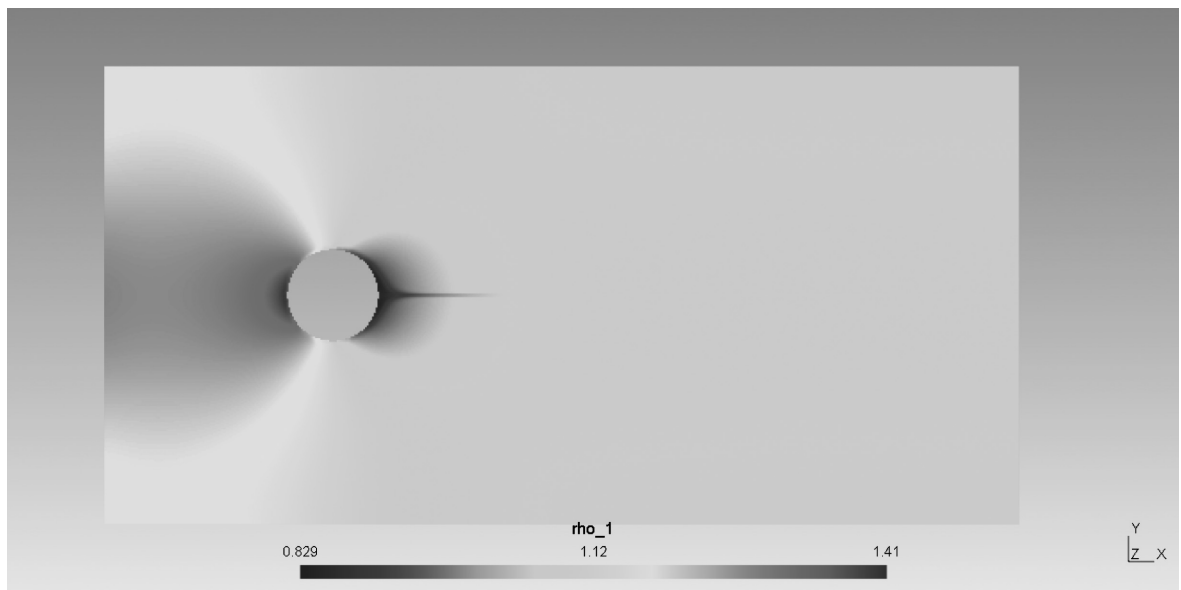


Рис. 12. Поле плотности при $Re = 1$

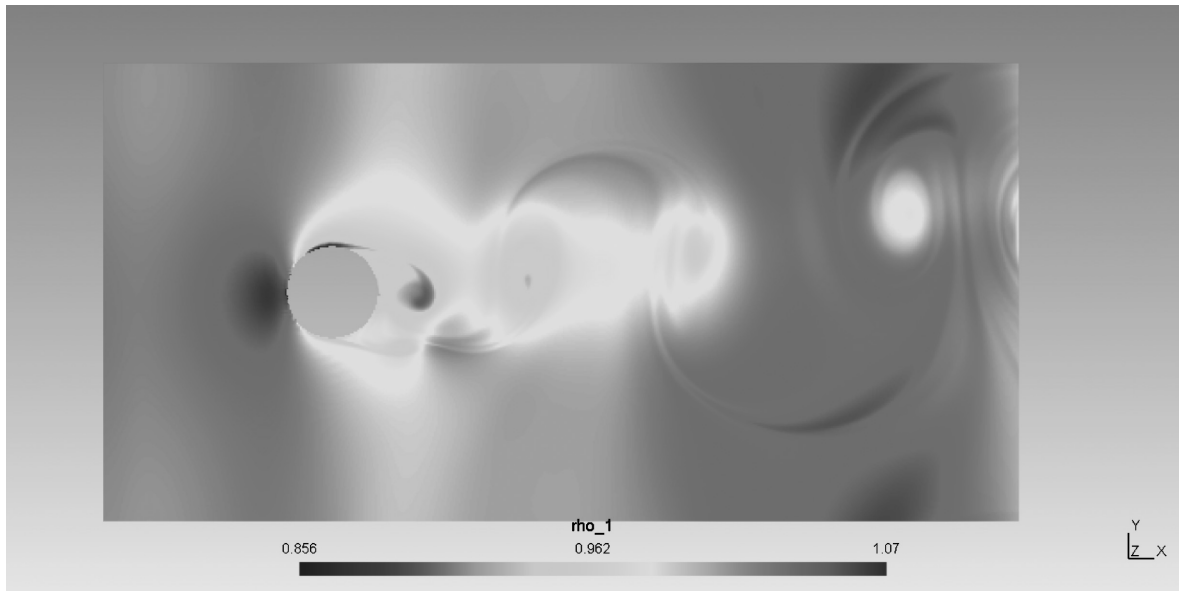


Рис. 13. Поле плотности при $Re = 666,7$

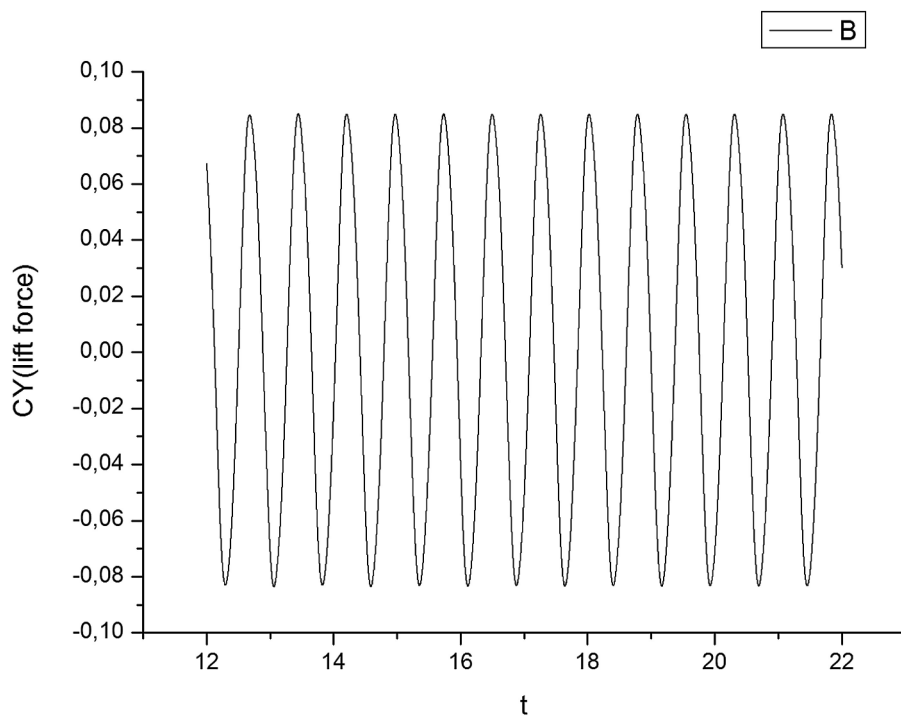


Рис. 14. Зависимость вертикальной составляющей подъемной силы от времени при $Re = 200$

4. Исследование подъемной силы

В работе были предприняты попытки найти нестационарное несимметричное решение, на котором среднее по времени значение подъемной силы отличалось бы от нуля. Для этого в каждый момент времени вычислялся интеграл по границе цилиндра от произведения давления на внешнюю нормаль:

$$\oint_{\partial D} \vec{n} p(t) dl = \vec{F}_{lift}(t), \quad (4)$$

и бралась вертикальная составляющая получающейся силы $\vec{F}_{lift}(t)$. Затем вычислялось среднее значение по времени:

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} F_{lift,1}(t) dt, = F_{aver}(Re) \quad (5)$$

и изучалась зависимость полученных значений от бифуркационного параметра.

В качестве наглядного примера ниже на рис. 14 приведен график зависимости от времени вертикальной составляющей $F_{lift,1}(t)$ при $Re = 200$.

Однако все проведенные исследования не зафиксировали отклонений, превышающих допустимые погрешности. Несмотря на существенные колебания значений, среднее неотлично мало. Обнаружить существенные отклонения ни при одном из значений числа Рейнольдса не удалось. Также, по всей видимости, все обнаруженные нестационарные решения являются симметричными, т. е. можно говорить о том, что бифуркации вилки в системе при заданных значениях параметров не происходит.

5. Заключение

Несмотря на то, что бифуркация потери симметрии в рассмотренном диапазоне параметров не была обнаружена, примененный в работе численный метод решения задачи оказался применимым к разрешению сложных нестационарных аттракторов. Изначально авторами работы предполагалось, что потеря симметрии происходит в задаче обтекания на стадии стационарного или периодического решения. Однако никаких фактических доводов в пользу этой гипотезы у авторов не было (кроме

других примеров потери симметрии в задачах гидродинамики; например, в задаче о течении в канале с симметричным расширением потеря симметрии происходит на стадии стационарного течения). Тем не менее, многочисленные примеры из области систем обыкновенных дифференциальных уравнений [10] показывают, что если в системе имеется решение, обладающее определенной симметрией, при переходе системы к хаотической динамике на той или иной стадии усложнения симметричное решение теряет устойчивость, и дальнейшие каскады происходят уже с асимметричными решениями. Это дает основания полагать, что потеря симметрии в рассматриваемой в данной работе задаче произойдет с каким-либо из аттракторов высокой размерности (двумерный или трехмерный тор). Прояснению этого вопроса будет посвящена дальнейшая исследовательская работа.

Литература

1. Chung T. J. Computational Fluid Dynamics. М.: Cambridge University Press, 2002.
2. Hopf E. A mathematical example displaying the features of turbulence // Comm. Pure Appl. Math. 1948. Vol. 1. P. 303–322.
3. Xu-Dong Liu, Stanley Osher, and Tony Chan. Weighted essentially non-oscillatory schemes // J. Comput. Phys. 1994. Vol. 115. № 1. P. 200–212.
4. Евстигнеев Н. М., Магницкий Н. А., Сидоров С. В. О природе турбулентности в задаче движения жидкости за уступом // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 1.
5. Евстигнеев Н. М., Магницкий Н. А. О возможных сценариях перехода к турбулентности в конвекции Рэлея—Бенара // Доклады Академии Наук. 2010. Т. 433. № 3.
6. Ландау Л. Д. К проблеме турбулентности // Доклады Академии наук СССР. 1944. Т. 44. С. 339–342.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика. М.: Наука. 1986.
8. Лотов К. В. Физика сплошных сред. М.: Университет компьютерных исследований. 2002.
9. Магницкий Н. А., Сидоров С. В. Новые методы хаотической динамики. М.: URSS, 2004.
10. Магницкий Н. А. Теория динамического хаоса. М.: Леманд/URSS, 2011.

Буров Дмитрий Анатольевич. Студент МГУ им. М. В. Ломоносова. Количество печатных работ: 3. Область научных интересов: нелинейная динамика, хаос. E-mail: gsarret@gmail.com

Рябков Олег Игоревич. Инженер-исследователь ИСА РАН. Окончил МГУ в 2009 г. Количество печатных работ: 4. Область научных интересов: нелинейная динамика, хаос. E-mail: oleg.ryabkov.87@gmail.com