Оптимизация, идентификация, теория игр

Ослабленные вспомогательные конфликтные равновесия*

В. Э. Смольяков, Э. Р. Смольяков

Аннотация. В работе предлагаются понятия конфликтных равновесий, наиболее эффективные при поиске решений игровых задач с тремя и более участниками, комбинирующие понятия индивидуально-паретовской оптимальности с понятием конфликтности, позволяющие уточнять иерархию равновесий и облегчающие поиск решения игровых задач любого класса.

Ключевые слова: *конфликтные задачи, ослабленные равновесия.*

Введение

Разработанная в [1–6] теория конфликтных равновесий создавалась не с целью предложить методику решения каких-либо конкретных классов игровых задач, а чтобы обеспечить общую базу для решения любых конфликтных проблем. Она радикально отличается от классического подхода к общей теории игр [7–11] и представляет собой альтернативу этой последней, позволив, в частности, с единых общих позиций подойти к проблеме поиска решения любых игровых (конфликтных) задач и гарантировать в них существование и, почти всегда, — единственность решения. Теория [1–6], по существу, решила все нерешенные проблемы классической теории игр [7–11], главные из которых — существование, единственность и устойчивость решения к любым возможным попыткам отклониться от него любого участника или любой группы участников.

Теория [1–9] доказала, что решение любых конфликтных (игровых) задач всегда существует, а единственность этого решения зависит от того, насколько много понятий конфликтного равновесия, не содержащих в своем определении каких-либо искусственных норм поведения участников, используется при его поиске. Причем именно вследствие недостатка числа уже известных понятий равновесия не всегда удается выявить среди них наисильнейшее, играющее основную роль в определении справедливого и устраивающего всех участников разрешения конфликта. В этой теории не имеет никакого смысла доказывать теоремы существования всех уже известных и предлагаемых новых равновесий, поскольку существенным является только то, что наислабейшее из всей этой системы равновесий — A-равновесие — существует в любых задачах. Существование же наисильнейшего равновесия в любой задаче гарантируется существованием A-равновесия и специфической итерационной процедурой последовательной редукции исходной задачи к предельной задаче, всегда содержащей в себе все наисильнейшие равновесия исходной задачи.

В данной работе известное множество конфликтных равновесий ($A \supseteq B' \supseteq B \supseteq C \supseteq, \ldots,$ [1–6]) дополняется новыми понятиями $B^{'P}$- и $D^{'P}$-равновесности и оптимальности, представляющими собой комбинации понятий оптимальности по Парето и конфликтной устойчивости, которые менее трудоемко ищутся (и оказываются более слабыми), чем

---

* Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований ОНИТС РАН и РФФИ (проект № 12–01–00961а).

предложенные в [5, 6] понятия B^P- и D^P-равновесности. Причем эта их относительная простота особенно ярко проявляется в отношении игр с тремя и более участниками, в которых нередко оказывается, что равновесия B' и B, являющиеся первыми усилениями наиболее слабого, но зато всегда существующего, A-равновесия, оказываются пустыми, что усложняло процедуру поиска более сильных равновесий и наисильнейшего из них. Предлагаемые новые понятия позволяют найти первое усиление всегда существующего A-равновесия и уточнить иерерхию равновесий в решаемой задаче.

1. Новые понятия оптимальности и равновесности

Чтобы упростить формулировки и облегчить понимание методики поиска предлагаемых равновесий, сначала рассматриваются статические конфликтные задачи с двумя и тремя участниками и на конкретных примерах подобных задач демонстрируется роль и возможности применения этих равновесий в статических и дифференциальных играх.

Ради упрощения изложения сформулируем только базовые понятия равновесия, которые получаются, если использовать не все возможные коалиционные объединения участников, а только объединения из $N-1$ участников, причем без потери общности примем следующее допущение.

Допущение 1. Пусть Q_i, $i=\overline{1,N}$, — метрические пространства, а G — компактное множество в их произведении $Q_1 \times \ldots \times Q_N$, и пусть на множестве G определены непрерывные функции (функционалы) $J_i(q)$, $i=\overline{1,N}$, $q=q_1 \ldots q_N \in G$.

Пусть $Pr_{Q_i}G$ — проекция множества G на пространство Q_i, а $G(q_i)$ и $G(q^i)$ — сечения (срезы) множества G.

Предполагается, что i-й игрок, выбирая стратегию (состояние) q_i из проекции $Pr_{Q_i}G$ множества G на пространство Q_i или из доступного ему сечения $G(q^i)$, где $q^i = q_1 \ldots q_{i-1} q_{i+1} \ldots q_N$, стремится обеспечить максимум своей платежной функции $J_i(q)$, $i=\overline{1,N}$. Положим $J^i = \sum\limits_{k \neq i} J_k$.

Чтобы стало понятным место которое, занимают предлагаемые новые равновесия в уже сложившейся иерархической структуре равновесий [1–6], приведем также некоторые из известных.

Определение 1, [1–4]. *Точка (ситуация) $q^* \in G$ называется A_i-экстремальной для i-го участника, если при заданной стратегии q^{i*} остальных $(N-1)$ участников допустимой для i-го игрока оказывается только одна стратегия $q_i^* = G(q^{i*})$ или если любой стратегии $q_i \in G(q^{i*}) \setminus q_i^*$ i-го участника можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию $\hat{q}^i \overset{\triangle}{=} \hat{q}^i < q_i > \in G(q^i)$ остальных $(N-1)$ участников так, чтобы имело место следующее отношение:*

$$J_i(\hat{q}^i, q_i) \leqslant J_i(q^*), \tag{1}$$

Ситуацию q^* назовем ситуацией A-равновесия, если неравенства вида (1) удовлетворяются в точке $q^* \in G$ для всех i=1,2,...,N, то есть если $q^* \in A_1 \cap \cap A_2, \ldots, \cap A_N \overset{\triangle}{=} A$.

Равновесие A, существующее (с любой заданной точностью ε) в любых задачах, является гарантом существования решения любой конфликтной задачи и выполняет роль наислабейшего из равновесий. Любые другие возможные равновесия ищутся именно на множестве A и позволяют выделить на этом множестве наисильнейшее равновесие, с которым вынуждены согласиться все участники.

Следующие предлагаемые новые равновесия являются первым усилением A-равновесия и некоторым ослаблением предложенных в [6] B^P и D^P-равновесий, причем эти новые равновесия находятся проще, чем два вышеуказанных.

Определение 2. *Ситуацию $q^* \in A$ назовем $B_i^{'P}$-экстремальной, если на множестве $J(G)$ она определяет точку $J(q^*)$, являющуюся «индивидуально паретовской» [1, с. 145], т. е. оптимальной по Парето по отношению лишь к точкам*

$$J(q_i^*, q^i), \quad q^i \in A(q_i^*). \tag{2}$$

Назовем ситуацию $q^* \in G$ $B^{'P}$-равновесием, если $q^* \in \in B_1^{'P} \cap \ldots \cap B_N^{'P} \overset{\triangle}{=} B^{'P}$, где $B_i^{'P}$ — множество всех $B_i^{'P}$-экстремальных ситуаций.

Определение 3. *Назовем ситуацию $q^* \in B_i^{'P}$ $D_i^{'P}$-экстремальной, если на множестве $B_i^{'P}$ она оказывается точкой Парето. Назовем ситуацию q^* $D^{'P}$-равновесием, если $q^* \in D_1^{'P} \cap \ldots \cap D_N^{'P} \overset{\triangle}{=} D^{'P}$, где $D_i^{'P}$ — множество всех $D_i^{'P}$-экстремальных ситуаций.*

Теорема 1. *Множество $B^{'P}$-равновесных ситуаций удовлетворяет включениям*

$$A \supseteq B^{'P} \supseteq B^P, \tag{3}$$

где B^P — предложенное в [6] понятие равновесия.

Поскольку множества $B^{'P}$, B^P, $D^{'P}$ и D^P ищутся все же весьма трудоемко, то использовать их на практике рекомендуется лишь тогда, когда нижеприведенные известные множества B' и B [1–4], являющиеся их усилением, оказываются пустыми. Однако следует отметить, что использование их в любых случаях полезно еще и с точки зрения уточнения иерархической структуры равновесий в решаемой задаче.

Определение 4, [1–4]. *Ситуацию $q^* \in A$ назовем B'_i-экстремальной, если она удовлетворяет условию*

$$\max_{q^i \in A(q_i^*)} J^i(q_i^*, q^i) = J^i(q^*). \tag{4}$$

Назовем ситуацию $q^* \in G$ B'-равновесием, если $q^* \in \bigcap_{i=1}^{N} B'_i \triangleq B'$, где B'_i — множество всех B'_i-экстремальных ситуаций.

Определение 5, [1–4]. *Ситуацию $q^* \in A$ назовем D'_i-экстремальной, если она удовлетворяет условию*

$$\max_{q_i \in Pr_{Q_i} A} J_i \left(Arg \max_{q^i \in A(q_i)} J^i(q) \right) = J_i(q^*), \tag{5}$$

и назовем ее D'-равновесием, если $q^* \in \bigcap_{i=1}^{N} D'_i \triangleq D'$.

Определение 6, [1–4]. *Ситуацию $q^* \in A_i$ назовем B_i-экстремальной, если она удовлетворяет условию*

$$\max_{q^i \in A_i(q_i^*)} J^i(q_i^*, q^i) = J^i(q^*). \tag{6}$$

Назовем ситуацию $q^* \in G$ B-равновесием, если $q^* \in \bigcap_{i=1}^{N} B_i \triangleq B$, где B_i — множество всех B_i-экстремальных ситуаций.

Определение 7 [1–4]. *Ситуацию $q^* \in B_i$ назовем $\overline{D}_i$-экстремальной, если она удовлетворяет условию*:

$$\max_{q \in B_i} J_i(q) = J_i(q^*), \tag{7}$$

или (что то же самое, но только в развернутом виде) — условию

$$\max_{q_i \in Pr_{Q_i} A_i} J_i(Arg \max_{q^i \in A_i(q_i)} J^i(q_i, q^i)) = J_i(q^*), \tag{7a}$$

и назовем ее $\overline{D}$-равновесием, если $q^* \in \bigcap_{i=1}^{N} \overline{D}_i \triangleq \overline{D}$.

Методика поиска $B^{'P}$ и $D^{'P}$-равновесий демонстрируется ниже на примерах игр с двумя и тремя участниками. При поиске наисильнейшего равновесия и справедливого дележа кооперативного дохода мы используем, помимо всех известных и новых равновесий, также и все возможные итерации (редукции) исходной игровой задачи, естественным образом следующие из того, что любая ситуация из множества $G \setminus A$ может быть улучшена хотя бы одним из участников, а следовательно, по существу она оказывается несущественной (не игровой) и может быть исключена из дальнейшего анализа [1–6]. Отсюда следует, что вполне корректным является рассмотрение вспомогательной игры на множестве A, на котором снова может быть найден аналог подобного множества, который естественно назвать A^1, на котором можно снова сформулировать следующую редукцию исходной игры и найти A^2, и т. д. Причем $A \supseteq A^1 \supseteq A^2 \supseteq \ldots$ и на каждой следующей итерации почти все более сильные типы равновесий (т. е. равновесия типов B, C, D, $\overline{D}\ldots$), как правило, ослабляются, т. е. если они были пустыми на предыдущей итерации, то могут оказаться непустыми на следующей, что позволяет в конце концов найти наисильнейшее равновесие. Поскольку на каждой следующей итерации множество A уменьшается, то поиск равновесий на каждой следующей итерации оказывается существенно более простым, чем на предыдущей итерации.

Продемонстрируем сначала на примере матричной игры методику поиска предлагаемых новых равновесий и возможность с их помощью уточнять иерархию равновесий в задаче.

Пример 1. Пусть определена игра, в которой каждый из участников максимизирует свою (матричную) платежную функцию

$$J_1(u_1, u_2) = \begin{bmatrix} \cdot & 9 & 8 & 2 \\ 4 & 5 & \cdot & 6 \\ 10 & 7 & 11 & 12 \\ 1 & \cdot & 5 & \cdot \end{bmatrix},$$

$$J_2(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} \cdot & 6 & 11 & 7 \\ 12 & 4 & \cdot & 8 \\ 5 & 10 & 9 & 3 \\ 2 & \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix}.$$

Первый игрок выбирает одну из четырех строк, а 2-й — один из четырех столбцов.

Найдем сначала множество наислабейших равновесий, определяемое матрицей $A = A_1 \cap A_2$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cdot & + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & + & + & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \cdot & + & + & + \\ + & + & \cdot & + \\ + & + & + & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} \cdot & + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Поскольку множество B в этой задаче пусто:

$$B_1 = (a_{13}, a_{32}), \quad B_2 = (a_{12}, a_{24}, a_{31}, a_{33}),$$
$$B = B_1 \cap B_2 = \varnothing,$$

то обратимся к поиску более сложных аналогов B-равновесия.

Существенное усложнение новых предлагаемых $B^{'P}$-равновесных ситуаций по сравнению с B'- и B-равновесными состоит в том, что необходимо использовать предварительно найденные и изображенные на рис. 1 отображения $J(a_{ij})$ аргументов a_{ij} платежных матриц J_1 и J_2 на плоскость (J_1, J_2). Без помощи этого рисунка искать $B^{'P}$- и $D^{'P}$-равновесия крайне затруднительно.

Используя определения 2 и 3, получаем следующие усиления A-равновесия:

$$B_1^{'P} = (a_{12}, a_{13}, a_{32}, a_{33}),$$

$$B_2^{'P} = (a_{12}, a_{13}, a_{31}, a_{32}, a_{33}),$$

$$B^{'P} = B_1^P \cap B_2^P = (a_{12}, a_{13}, a_{32}, a_{33});$$

$$D_1^{'P} = (a_{13}, a_{33}), \quad D_2^{'P} = (a_{13}, a_{33}), \quad D^{'P} = (a_{13}, a_{33}).$$

В отличие от множества B множество $B^{'P}$ не только не пусто, но даже весьма обширно и состоит из четырех ситуаций, причем две из них, оказавшиеся $D^{'P}$-равновесными, наиболее предпочтительны. Отметим, что поиск $B^{'P}$- и $D^{'P}$-равновесий оказывается более простым, чем поиск B^P- и D^P-равновесий.

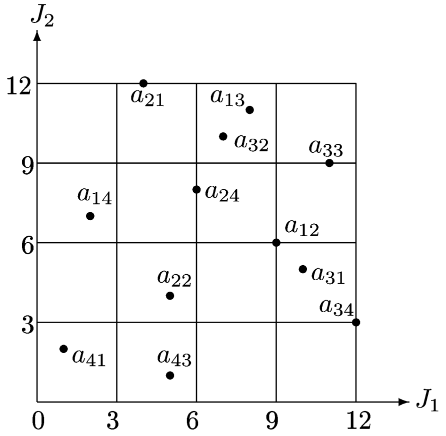

Рис. 1

Для поиска наисильнейшего равновесия в этой игре обратимся к первой итерации игры. В результате получаем вспомогательную игру со следующими платежными функциями:

$$J_1^1 = \begin{bmatrix} \cdot & 9 & 8 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 10 & 7 & 11 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \qquad J_2^1 = \begin{bmatrix} \cdot & 6 & 11 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 5 & 10 & 9 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

в которой аналогичным образом находим все существующие (слабые и сильные) равновесия:

$$A_1^1 = \begin{bmatrix} \cdot & + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad A_2^1 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

$$A^1 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

$$B_1^1 = (a_{13}, a_{33}), \quad B_2^1 = (a_{32}, a_{33}), \quad B^1 = a_{33},$$

$$\overline{D}_1^1 = a_{33}, \quad \overline{D}_2^1 = a_{32}, \quad \overline{D}^1 = \varnothing;$$

$$D_1^{'1} = a_{33}, \quad D_2^{'1} = a_{33}, \quad D^{'1} = a_{33};$$

$$B_1^{'P1} = (a_{13}, a_{33}), \quad B_2^{'P1} = (a_{13}, a_{33}),$$

$$B^{'P1} = (a_{13}, a_{33});$$

$$D_1^{'P1} = D_2^{'P1} = (a_{13}, a_{33}) = D^{'P1}.$$

Заметим еще, что вторая итерация приводит к следующему единственному решению:

$$A_1^2 = a_{33}, \quad A_2^2 = (a_{13}, a_{33}), \quad A^2 = a_{33}.$$

Таким образом, $B^{'P1}$- и $D^{'P1}$-равновесия позволили уточнить иерархию равновесий в этой игре: оказалось, что существенно более слабым равновесием (чем a_{33}) является ситуация a_{13}, а все остальные ситуации еще более слабые.

Поскольку a_{33} — наисильнейшее равновесие, то кооперативный доход, достигаемый именно в этой ситуации, согласно теореме 4.1 из [3, с. 174–175] задается непосредственно выигрышами участников в этой ситуации.

Рассмотрим более сложный пример игры с тремя участниками.

Пример 2. Пусть каждый из игроков располагает всего двумя стратегиями (т. е. по существу выбирает одну из двух противоположных плоскостей параллелепипеда на рис. 2), а $J = (J_1, J_2, J_3)$ — платежная вектор-функция в этой игре, Все 8 значений каждой из трех платежных функций указаны на рис. 2 тройкой чисел в скобках около каждой из 8 допустимых ситуаций E, F H, K, L M, N, P (например, в ситуации E значения платежных функций игроков $(J_1, J_2, J_3) = (9{,}2{,}1)$), причем эти значения в точке E получаются, когда 1-й игрок из двух возможных своих стратегий q_1 — плоскости HNPK и плоскости ELMF — выбирает свою

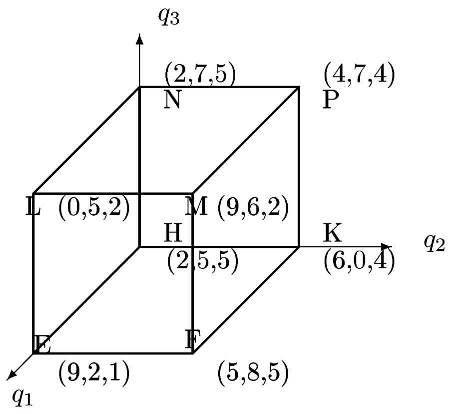

Рис. 2

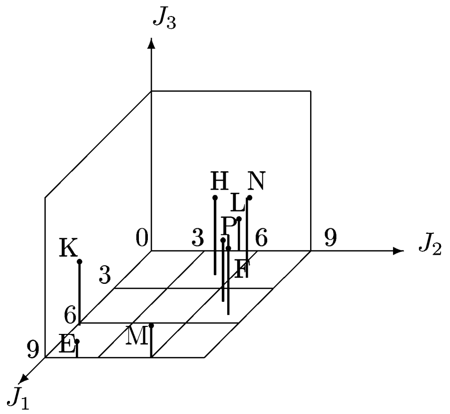

Рис. 3

вторую стратегию ELMF, 2-й игрок ваыбирает свою первую стратегию — плоскость ELNH, а третий — свою первую стратегию EHKF. Найдем наисильнейшее равновесие в этой игре и справедливый дележ кооперативного дохода, достигаемого в ситуации F и равного 18.

Базовая система равновесий (с учетом не приведенных выше равновесий из [2–4]) и использование рис. 3 позволяют найти следующие равновесия:

$$A_1 = (E, F, H, K, M, N, P),$$

$$A_2 = (E, F, H, L, M, N, P),$$

$$A_3 = (F, H, K, L, M, N < P),$$

$$A = (F, H, M, N < P),$$

$$C^N = N, \ \overline{C}^0 = (H, F, N),$$

$$B_1' = (F, N), \ B_2' = (H, M, N),$$

$$B_3' = (F, M), B' = \varnothing$$

$$B_1 = (F, N), \ B_2 = (E, M), \ B_3 = (F, M), B = \varnothing,$$

$$B_1^{'P} = B_2^{'P} = B_3^{'P} = (F, M, N)$$

$$D_1^{'P} = D_2^{'P} = D_3^{'P} =$$

$$= (F, M), \ A_{12} = (F, M), \ A_{13} = (F, M, E, K),$$

$$A_{23} = (F, M, H, N.P), A_{P_2} =$$

$$= A_{12} \cap A_{13} \cap A_{23} = (F, M),$$

$$A' = A \cap A_{P_2} = (F, M).$$

Таким образом, в этой игре классическое равновесие по Нэшу $C^N = N$ хотя и существует, но не обладает необходимой устойчивостью, так как неустойчиво к коалиционным объединениям, поскольку не входит во множество A_{P_2}, состоящее из ситуаций, одновременно устойчивых по отношению к трем возможным коалиционным объединениям участников: (1.2), (1,3). (2,3). Напомним также, что равновесие по Нэшу может оказываться, к тому же, еще и совершенно невыгодным одновременно для всех участников игры и определять даже наихудшую одновременно для всех ситуацию (см., например, [2, с. 9; 5, с. 146]). На этом основании не стоит серьезно доверять также и равновесиям C^0, представляющим собой равновесия по Нэшу на множестве A.

Найденные выше равновесия не позволили найти наисильнейшее равновесие. Следовательно, необходимо дополнительное исследование равновесий в этой задаче, особенно в связи с тем, что B'- и B-равновесия оказались пустыми (что автоматически предполагает, что и все усиливающие их равновесия тем более являются пустыми).

Чтобы найти единственное наиболее устраивающее всех наисильнейшее равновесие, необходимо воспользоваться, по крайней мере, еще и первой итерацией исходной игры, т. е. рассмотреть вспомогательную игру на множестве A, поскольку только ситуации из этого множества и представляют интерес, если учесть, что любая игровая ситуация, не вошедшая в это множество, совершенно неприемлима хотя бы для одного из участников, так как он имеет возможность перейти из нее в более выгодную для него ситуацию и никто из остальных не в состоянии помешать ему это сделать. Для игры (первой итерации) на множестве A получаем следующие базовые равновесия

$$A_1^1 = (F, H, M, N), \ \ A_2^1 = (F, H, M, N, P),$$

$$A_3^1 = (F, H, N, P), \ \ A^1 = (F, N, N),$$

$$\overline{C}^{01} = (F, H, N), \ \ B_1^{'1} = (F, N), \ \ B_2^{'1} = (F, H, N),$$

$$B_3^{'1} = (F, N), \ \ B^{'1} = (F, N),$$

$$B_1^1 = (F, N), \ \ B_2^1 = (H, M, N),$$

$$B_3^1 = (F, P), \ \ B^1 = \varnothing,$$

$$D_1^{'1} = F, \ \ D_2^{'1} = F, \ \ D_3^{'1} = (F, N), \ \ D^{'1} = F.$$

Заметим, что искать на первой итерации $B^{'P1}$- и $D^{'P1}$-равновесия нет никакой необходимости, так как на нулевой итерации они оказались непустыми. Итак, первая итерации позволила выделить из пары (F, M) наиболее сильных в этой задаче равновесных ситуаций наисильнейшую ситуацию $F = A' \cap D^{'1} \cap D^{'P}$. Равновесная же по Нэшу ситуация N оказалась неустойчивой по отношению к коалиционным объединениям участников (1,2), (1,3) и (2,3).

Заметим также, что из всех используемых в этом примере равновесий наиболее трудоемко ищутся (даже с помощью рис. 3) $B^{'P}$- и $D^{'P}$-равновесия. Однако поиск B^P- и D^P-равновесий из [5, 6] оказывается еще более трудоемким, чем поиск предлагаемых новых равновесий $B^{'P}$ и $D^{'P}$.

В любых конфликтах наиболее выгодным для всех является кооперативный доход, справедливый дележ которого дается формулами [3, с. 174–175], зависящими от наисильнейшего равновесия (или от равноценных нескольких наисильнейших равновесий). Поскольку наисильнейшее равновесие в этой игре реализуется в единственной ситуации F (а все остальные ситуации из A являются существенно более слабыми равновесиями), то оптимальный (справедливый) дележ $(x_1 + x_2 + x_3 = 18)$ этого кооперативного дохода дается (согласно этим формулам) непосредственно выигрышами участников в этой ситуации (F), т. е.

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 8, \quad x_3 = 5.$$

2. Поиск решений в дифференциальных играх

В наиболее общей постановке конфликтных задач [6], включающей в себя по существу любые динамические и статические задачи, ищется конфликтно устойчивое поведение участников, моделируемое дифференциальными уравнениями, причем каждый i-й участник $(i = \overline{1, N})$, в распоряжении которого имеются любые чистые u_i или смешанные стратегии $q_i(u_i, t)$, заинтересован в максимизации своего функционала

$$J_i(q) = \int\limits_T dt \int\limits_{W(t)} f_0^i(u, x, t)\, dq, \quad i = \overline{1, N} \tag{8}$$

при ограничениях

$$(u, t) \in W \subset E \times T, \tag{9}$$

$$\dot{x} = \int\limits_{W(t)} f(u, x, t)\, dq, \quad t \in T = [t_0, t_1] \subset E^1, \tag{10}$$

$$x_j(t_0) = x_j^0, j = \overline{1, n}, \;\; x_k(t_1) = x_k^1, k \in K \subset \{\overline{1, N}\} \tag{11}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$; $u = (u_1, \ldots, u_N)$; $q = q(u, t) = q_1(u_1, t) \ldots q_N(u_N, t)$; $E = \prod\limits_{i=1}^{N} E_i$, E_i — конечномерные пространства; W — компактное множество в $E \times T$; $W(t)$ — сечение множества W в момент $t \in T = [t_0, t_1]$; $U_i \overset{\triangle}{=} Pr_{E_i} W$ — проекция множества W на E_i; Q_i — множество смешанных стратегий $q_i(u_i, t)$ i-го участника в задаче (8)–(11) с начальным условием $x(t_0) = x^0$ и с заменой множества W на некоторое компактное множество $U = U_1 \times \ldots \times U_N$ (множество Q_i согласно теоремам 4.2.1 и 4.2.6 из [12] представляет собой выпуклый компакт в $*$-слабой топологии пространства $L_1^*(T, C(U_i)))$, $P_{q_i}(t)$ — носитель меры $q_i(\cdot, t)$ в момент $t \in T$. И пусть G — подмножество компактного множества $Q = \prod\limits_{i=1}^{N} Q_i$, образованное только такими стратегиями q_i, которые позволяют обеспечить удовлетворение всех ограничений задачи.

Допущение 2. *Пусть* $T = [t_0, t_1]$ *— ограниченный фиксированный отрезок вещественной оси* E^1; *множество* W *— компакт в* $E \times T$; *отображение* $\hat{f} = (f_0^1, \ldots, f_0^N, f_1, \ldots, f_n)\colon U \times E^n \times T \to E^{n+N}$ *таково, что функция* $\hat{f}(u, x, \cdot)$ *измерима (по Лебегу) при всех* $u \in U$, $x \in E^n$, *а функция* $\hat{f}(\cdot, \cdot, t)$ *при каждом* $t \in T$ *непрерывна; функция* $|\hat{f}|$ *мажорируется на* T *функцией* $s(t)(|x| + 1)$, *где* $s(t)$ *— некоторая интегрируемая функция;* $x(t)\colon T \to E^n$ *— абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению* (10); *кроме того, функция* $\hat{f}$ *удовлетворяет с интегрируемой функцией* $b(t)$ *условию Липшица:*

$$|\hat{f}(u, \overline{x}, t) - \hat{f}(u, x, t)| \leqslant b(t)|\overline{x} - x|$$

для всех $u \in U$; $x, \overline{x} \in E^n$, $t \in T$.

Более детальную формулировку задачи можно найти в [5, 6].

Понятие A-равновесия в дифференциальных играх целесообразно заменить несколько более сильным понятием A^c-равновесия [2, 4].

Определение 8. *Ситуацию* $q^* \in G$ *назовем согласованной* A_i^c*-экстремальной, если любой стратегии* $q_i \in G(q^{i*}) \setminus q_i^*$ i*-го игрока можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию* $\hat{q}^i \overset{\triangle}{=} \hat{q}^i < q_i > \in G(q_i)$ *остальных игроков так, чтобы имело место отношение*

$$J_i(\hat{q}^i < q_i >, q_i) \leqslant J_i(q^*), \tag{12}$$

при условии, что ненулевое (в смысле меры Лебега) множество в T, *на котором* $\hat{q}^i(t) \neq q^{i*}(t)$, *является подмножеством множества из* T, *на котором* $q_i(t) \neq$

$\neq q_i^*(t)$, $i = 1, 2, \ldots$. *Ситуацию* q^* *назовем ситуацией согласованного* A^c*-равновесия, если неравенства* (12) *удовлетворяются для всех игроков, т. е. если* $q^* \in \in A_1^c \cap \ldots \cap A_N^c = A^c$.

Для поиска A^c-равновесия в дифференциальных играх весьма эффективна следующая теорема [4, с. 189–190].

Теорема 2. *Пусть* q^* — A^c*-равновесие в задаче с* N *участниками. Тогда найдется* N *ненулевых абсолютно непрерывных вектор-функций* $p^i(t) = (p_0^i,\ p_1^i(t), \ldots, p_n^i(t))$, $p_0^i \geqslant 0$, $i = \overline{1, N}$ *удовлетворяющих почти всюду на интервале* T *уравнениям*

$$\dot{p}_k^i = -\int\int\limits_{W(t)} p^i \frac{\partial f^i}{\partial x_k} d\tilde{q}, \quad k = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (13)$$

где $f^i = (f_0^i, f_1, \ldots, f_n)$, *и краевым условиям*

$$p_k^i(t_1) = 0, \quad k \notin K; \quad (14)$$

гамильтонианы $H^i = \int\limits_{W(t)} p^i f^i dq^*$ *непрерывны в* T;

A^c*-равновесная ситуация* q^* *удовлетворяет отношениям*

$$\left[H^i\right](\hat{q}^i, q_i) \leqslant \left[H^i\right](q^*), \quad q_i \in G(q^{*i}),$$
$$\hat{q}^i \in G(q_i), \quad i = \overline{1, N}. \quad (15)$$

В [6] приведем пример дифференциальной игры, решение которого было найдено с использованием B^P- и D^P-равновесий. Однако использование предлагаемых новых $B^{'P}$- и $D^{'P}$-равновесий позволяет найти то же решение менее трудоемким путем.

Литература

1. *Смольяков Э. Р.* Теория антагонизмов и диффеферциальные игры. М.: URSS. 2000.
2. *Смольяков Э. Р.* Теория конфликтных равновесий. М.: URSS, 2005.
3. *Смольяков Э. Р.* Методы решения конфликтных задач. М.: МГУ, 2010.
4. *Смольяков Э. Р.* Обобщенное оптимальное управление и динамические конфликтные задачи. М.: МГУ, 2010.
5. *Смольяков Э. Р.* Полезные равновесия для теории игр // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 11. С. 1540–1548.
6. *Смольяков В. Э.*, *Смольяков Э. Р.* Вспомогательные равновесия для статических и динамических конфликтных задач // Труды ИСА РАН. 2012. Т. 62. Вып. 2 С. 4–11.
7. *Nash J.* Non-Cooperative Games // Annals of Mathematics. 1951. V. 54. № 2. P. 286–295.
8. *Neumann J.* Zur Theorie der Gesellschaftsspiele // Math. Annalen. 1928. V. 100. P. 295–320.
9. *Нейман Дж. и Моргенштерн О.* Теория игр и экономические поведениме. М.: Наука, 1970.
10. *Воробьев Н. Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, 1984.
11. *Вайсборд Э. М.*, *Жуковский В. И.* Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. М.: Советское радио, 1980.
12. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука. 1977.

Смольяков Владимир Эдуардович. Главный специалист подразделения ИСА РАН. Окончил в 2005 г. Международную академию оценки и консалтинга. Количество печатных работ: 16. Область научных интересов: моделирование систем. E-mail: ser-math@rambler.ru

Смольяков Эдуард Римович. Д. ф.-м. н., профессор МГУ им. М. В. Ломоносова. Окончил МФТИ в 1962 г. Количество печатных работ: 237, монографий 14. Область научных интересов: теория конфликтов и игр, оптимальное управление, теоретическая физика, философия эзотеризма. E-mail: ser-math@rambler.ru