Решение дифференциальной игры, моделирующей экономические отношения между странами*

В. Э. Смольяков, Э. Р. Смольяков

Аннотация. Аналитически решена сложная существенно нелинейная по фазовым координатам и управляющим переменным дифференциальная игра, моделирующая экономические отношения между энергодобывающей и промышленно развитой странами.

Ключевые слова: *дифференциальные игры, экономические модели.*

Введение

Рассматривается довольно сложная нелинейная дифференциальная игра, вполне реалистично моделирующая экономические отношения на международных рынках, демонстрирующая, что даже в сложных динамических моделях, описываемых дифференциальными уравнениями, удается находить решение — равновесное управление участников и порождаемую им динамику. Рассматриваемая задача была сформулирована в [1], но для нее не было найдено решение.

1. Общая динамическая модель конфликтной задачи

Рассмотрим конфликтные программные динамические задачи в постановке, несколько более частной, чем в [2–4], принимая, что i-й участник ($i = \overline{1, N}$) дифференциальной игры, используя чистую стратегию $u_i(t)$, максимизирует свой функционал

$$J_i(u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0^i(u, x, t)\, dt, \quad i = \overline{1, N}, \tag{1}$$

при ограничениях

$$\dot{x} = f(u, x, t), \quad t \in T = [t_0, t_1] \subset E^1, \tag{2}$$

$$x_j(t_0) = x_j^0,\ j = \overline{1, n}, \quad x_k(t_1) = x_k^1,\ k \in K \subset \{\overline{1, N}\} \tag{3}$$

$$u \in W \subset E, \tag{4}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$; $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_N(t))$; $U = \prod_{i=1}^{N} U_i$, U_i — конечномерные пространства; W — компактное множество в U; $u_i \in W(u^i)$, $W(u^i)$ — сечение множества W; $W_i = Pr_{U_i} W$ — проекция множества W на U_i; $u^i = (u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_N)$.

Допущение. *Пусть $T = [t_0, t_1]$ — ограниченный фиксированный отрезок вещественной оси E^1; множество W — компакт в $E \times T$; отображение $\hat{f} = (f_0^1, \ldots, f_0^N, f_1, \ldots, f_n)\colon U \times E^n \times T \to E^{n+N}$ таково, что функция $\hat{f}(u, x, \cdot)$ измерима (по Лебегу) при всех $u \in U$, $x \in E^n$, а функция $\hat{f}(\cdot, \cdot, t)$ при каждом $t \in T$ непрерывна; функция $|\hat{f}|$ мажорируется на T функцией $s(t)(|x| + 1)$, где $s(t)$ — некоторая интегрируемая функция; $x(t)\colon T \to E^n$ — абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению (2); кроме того, функция $\hat{f}$ удовлетворяет с интегрируемой функцией $b(t)$ условию Липшица:*

$$|\hat{f}(u, \bar{x}, t) - \hat{f}(u, x, t)| \leqslant b(t)|\bar{x} - x|$$

для всех $u \in U$; $x, \bar{x} \in E^n$, $t \in T$.

Понятие наиболее слабого и всегда существующего A-равновесия, используемое в статических играх, в дифференциальных играх целесообразно заменить на следующее несколько более сильное понятие A^c-равновесия [2–4], возможности использования которого на практике до сих пор остаются неясными. Однако это не может служить препятствием для его применения, поскольку с его помощью и приведенной ниже теореы можно найти решение по существу любой дифференциальной игры. Найденное с его помощью решение, в принципе, при желании, всегда может быть проверено на предмет того, что оно действительно является таковым.

* Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований ОНИТС РАН и РФФИ (проект № 12–01–00961-а).

В то же время без использования понятия A^c-равновесия и нижеприведенной теоремы о необходимых условиях существования этого равновесия находить решения даже в простейших линейных дифференциальных играх оказывается почти невозможным.

Определение 1. *Ситуацию* $u^* \in W$ *назовем согласованной* A_i^c*-экстремальной, если любой стратегии* $u_i \in W(u^{i*}) \setminus u_i^*$ i*-го игрока можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию* $\hat{u}^i \stackrel{\triangle}{=} \hat{u}^i < q_i > \in W(u_i)$ *остальных игроков так, чтобы имело место отношение*

$$J_i(\hat{u}^i < u_i >, q_i) \leqslant J_i(u^*), \tag{5}$$

при условии, что ненулевое (в смысле меры Лебега) множество в T*, на котором* $\hat{u}^i(t) \neq u^{i*}(t)$*, является подмножеством множества из* T*, на котором* $u_i(t) \neq \neq u_i^*(t)$*,* $i = 1, 2, \ldots$*. Ситуацию* u^* *назовем ситуацией согласованного* A^c*-равновесия, если неравенства (5) удовлетворяются для всех игроков, т. е. если* $u^* \in \in A_1^c \cap \ldots \cap A_N^c = A^c$.

Для поиска A^c-равновесия в дифференциальных играх весьма эффективна следующая теорема, являющаяся частным случаем теоремы 4.2.1 из [3, с. 189–190].

Теорема. *Пусть* u^* — A^c*-равновесие в задаче с* N *участниками. Тогда найдется* N *ненулевых абсолютно непрерывных вектор-функций* $p^i(t) = (p_0^i, p_1^i(t), \ldots, p_n^i(t))$, $p_0^i \geqslant 0$, $i = \overline{1, N}$ *удовлетворяющих почти всюду в* T *уравнениям*

$$\dot{p}_k^i = -p^i \frac{\partial f^i}{\partial x_k}, \quad k = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, N}, \tag{6}$$

где $f^i = (f_0^i, f_1, \ldots, f_n)$*, и краевым условиям*

$$p_k^i(t_1) = 0, \quad k \notin K; \tag{7}$$

гамильтонианы $H^i = p^i f^i$ *непрерывны в* T;

A^c*-равновесная ситуация* u^* *удовлетворяет отношениям*

$$\begin{gathered} \left[H^i\right](\hat{u}^i, u_i) \leqslant \left[H^i\right](u^*), \\ u_i \in W(q^{*i}), \quad \hat{u}^i \in W(u_i), \quad i = \overline{1, N}. \end{gathered} \tag{8}$$

Приведем еще определения A-, B- и $\overline{D}$-равновесий из [2–4], которые нам потребуются для поиска наисильнейшего равновесия в рассматриваемой дифференциальной игре.

Определение 1 является по существу некоторым усилением, а точнее, некоторым приспособлением, следующего определения к дифференциальным играм.

Определение 1а. *Точку (ситуацию)* $u^* \in W$ *назовем* A_i*-экстремальной для* i*-го участника, если при заданной стратегии* u^{i*} *остальных* $(N-1)$ *участников допустимой для* i*-го игрока оказывается только одна стратегия* $u_i^* = W(u^{i*})$ *или если любой стратегии* $u_i \in W(u^{i*}) \setminus u_i^*$ i*-го участника можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию* $\hat{u}^i \stackrel{\triangle}{=} \hat{u}^i < u_i > \in W(q^i)$ *остальных* $(N-1)$ *участников так, чтобы имело место следующее отношение*:

$$J_i(\hat{u}^i, u_i) \leqslant J_i(u^*), \tag{9}$$

Ситуацию u^* *назовем ситуацией* A*-равновесия, если неравенства вида (9) удовлетворяются в точке* $u^* \in W$ *для всех* i=1,2,...,N*, то есть если* $u^* \in A_1 \cap \cap A_2, \ldots, \cap A_N \stackrel{\triangle}{=} A$.

Равновесие A, существующее (с любой заданной точностью ε) в любых статических задачах [2–4], причем даже в отсутствие компактности W и отсутствия непрерывности функций J_i, является гарантом существования решения любой конфликтной задачи и выполняет роль наислабейшего из равновесий, причем любые другие возможные (симметричные) равновесия ищутся именно на множестве A и позволяют выделить на этом множестве наисильнейшее равновесие, с которым вынуждены согласиться все участники.

Определение 2. *Ситуацию* $u^* \in A_i$ *назовем* B_i*-экстремальной, если она удовлетворяет условию*

$$\max_{u^i \in A_i(u_i^*)} J^i(u_i^*, u^i) = J^i(u^*). \tag{10}$$

Назовем ситуацию $u^* \in W$ B*-равновесием, если* $u^* \in \in \bigcap_{i=1}^{N} B_i \stackrel{\triangle}{=} B$*, где* B_i — *множество всех* B_i*-экстремальных ситуаций.*

Определение 3. *Ситуацию* $u^* \in B_i$ *назовем* $\overline{D}_i$*-экстремальной, если она удовлетворяет условию*:

$$\max_{u \in B_i} J_i(u) = J_i(u^*), \tag{11}$$

или (что то же самое, но только в развернутом виде) — условию

$$\max_{u_i \in Pr_{U_i} A_i} J_i(Arg \max_{u^i \in A_i(u_i)} J^i(u_i, u^i)) = J_i(u^*), \tag{11a}$$

и назовем ее $\overline{D}$*-равновесием, если* $u^* \in \bigcap_{i=1}^{N} \overline{D}_i \stackrel{\triangle}{=} \overline{D}$.

Если рассматривать гамильтонианы в необходимых условиях (6)–(8) в качестве платежных функций в «локальной» статической игре, определенной в момент t, то можно в каждый момент t решить «локальную» статическую конфликтную задачу о наисильнейшем равновесии, причем число подлежащих решению таких «локальных» задач оказывается не только не бесконечным (хотя время t и принимает бесконечное множество значений), но, как правило, сводится всего к одной или нескольким «локальным» задачам, причем эти несколько статических «локальных» задач позволяют найти решение исходной дифференциальной игры.

Покажем на примере весьма сложной нелинейной дифференциальной игры, довольно хорошо аппроксимирующей реальные экономические отношения на международных рынках, как можно даже в сложных динамических моделях находить решение — равновесное управление участников и порождаемую им динамику. Рассматриваемая ниже задача была сформулирована в [1], но для нее так и не было найдено решение.

2. Агрегированная игровая динамическая модель двух экономик

Пусть на некотором интервале времени $T = (t_0, t_1)$ на мировом рынке взаимодействуют между собой два региона, один из которых является экономически высокоразвитым, но собственных энергоресурсов у него недостаточно, а второй — сырьевой, поставляющий в экономически развитый регион энергопродукты, необходимые для экономики первого региона. И пусть суммарный выпуск первого региона моделируется производственной функцией $h = H(z, x_1, t)$, зависящий от основных фондов, $x_1(t)$, скорости использования в производстве некоторого существенного природного ресурса $z(t)$ и экзогенного технического прогресса. Доходы второй экономики зависят только от добычи и экспорта в первую экономику природного ресурса, замещающего природный ресурс первой экономики или же совпадающий с ним. Обе торгующие друг с другом экономики будем называть игроками.

Сначала сформулируем задачу в относительно общем виде, в котором получить аналитическое решение весьма трудно, а затем несколько упростим постановку задачи, что позволит нам найти аналитическое решение. Все переменные в общей постановке задачи берутся такими, чтобы переход от общей постановки к упрощенной требовал как можно меньшего числа переименований переменных.

Если $x_1(t)$ — основные фонды 1-го игрока в стоимостном выражении, δ — коэффициент амортизации фондов, а u_1 — инвестиции — суммарная скорость расходов на основные фонды, включая амортизационные расходы, то динамику фондов 1-го игрока можно определить уравнением

$$\dot{x}_1 = u_1 - \delta \cdot x_1, \quad x_1(0) = x_1^0, \tag{12}$$

где x_1^0 – стоимость фондов в начальный момент $t=0$.

1-й игрок использует некоторый существенный для функционирования его экономики природный ресурс, который он добывает и потребляет со скоростью $u_2(t)$, а 2-й игрок производит такой же или некоторый другой, замещающий его ресурс со скоростью $v_1(t)$. Если через $x_3(t)$ и $x_2(t)$ обозначить объемы природных ресурсов (в натуральной форме) соответственно 1-го и 2-го игроков в момент t, то динамику потребления этих ресурсов на производственные цели можно описать уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -u_2(t), \quad x_2(0) = x_2^0, \\ \dot{x}_3 &= -v_1(t), \quad x_3(0) = x_3^0, \end{aligned} \tag{13}$$

где x_2^0 и x_3^0 — разведанные (или предполагаемые) на момент t_0 природные ресурсы игроков. Чтобы учесть тот факт, что по мере истощения природных ресурсов затраты на их добычу возрастают, моделировать эти затраты в единицу времени представляется наиболее естественным следующими экспоненциальными зависимостями:

$$\frac{\beta_1 u_2}{e^{\alpha_1 x_2} - 1}, \quad \frac{\beta_2 v_1}{e^{\alpha_2 x_3} - 1}. \tag{14}$$

Если через $u_3(t)$ обозначить скорость импорта 1-м игроком ресурсов второго, то, очевидно, можно записать

$$0 \leqslant \int_{t_0}^{t} u_3(t)\,dt \leqslant \int_{t_0}^{t} v_1(t)\,dt, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{15}$$

Производственная функция $h(u_2 + ku_3, x_1, t)$ предполагается непрерывной по всем аргументам. Коэффициент k — это коэффициент замещения ресурсов. Чем он больше, тем для 1-го игрока импортируемый ресурс u_3 предпочтительнее собственного ресурса u_2. 2-й игрок продает свой природный энергоресурс 1-му игроку по некоторой цене $v_2(t) > 0$, так что скорость его выручки от продажи этого энергоресурса составляет $v_2 v_1$.

Управляющие переменные $u=(u_1, u_2, u_3)$ и $v = (v_1, v_2)$ в формулируемой игровой задаче, как следует из самого их смыслового определения, не могут быть отрицательными. Не могут они быть также и слишком большими, вследствие естественных технических ограничений, а следовательно, удовлетворяют ограничениям

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_1 \leqslant u_1^0, \quad 0 \leqslant u_2 \leqslant u_2^0, \\ 0 \leqslant u_3 \leqslant u_3^0, \quad 0 \leqslant v_1 \leqslant v_1^0. \end{aligned} \tag{16}$$

В качестве функций полезности в формулируемой игровой задаче наиболее естественно взять чистые доходы регионов на некотором планируемом интервале времени $T \stackrel{\triangle}{=} (t_0, t_1)$, определяемые следующими интегралами, существенно нелинейными по фазовым (x) и управляющим (u, v) переменным, что делает сформулированную дифференциальную игру весьма сложной:

$$J_1 = \int\limits_T e^{-\gamma_1 t}\big[h(u_2 + ku_3, x_1, t) - u_1 - \\ -\beta_1 u_2 (e^{\alpha_1 x_2} - 1)^{-1} - v_2 u_3\big]\, dt, \tag{17}$$

$$J_2 = \int\limits_T e^{-\gamma_2 t}[v_2 u_3 - \beta_2 v_1 (e^{\alpha_2 x_3} - 1)]\, dt. \tag{18}$$

Множители $e^{-\gamma_i t}$ являются коэффициентами дисконтирования полезностей (можно принять $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$). Игроки заинтересованы в максимизации функционалов (17) и (18), причем первый игрок распоряжается выбором вектора управления $u = (u_1, u_2, u_3)$, а второй — вектора $v = (v_1, v_2)$. Из самой постановки ясно, что условия $J_1 \leqslant 0$ и $J_2 \leqslant 0$ неприемлемы для игроков, а следовательно, должны удовлетворяться неравенства

$$J_1 > 0, \quad J_2 > 0. \tag{19}$$

В этой игровой модели не существует равновесия по Нэшу. В самом деле, если допустить его существование для пары (u^*, v^*), то 2-й игрок может беспрепятственно поднять цену $v_2 > v_2^*$, в результате чего он получит выигрыш $J_2 > J_2^*$, т. е. больший, чем в равновесной по Нэшу ситуации, что противоречит определению равновесия по Нэшу. Следовательно, для решения поставленной экономической игровой задачи не годятся классические подходы [5–7], тем более, опирающиеся на равновесие по Нэшу [5], а необходимы новые понятия равновесия, разработанные в [1–4].

Вследствие большого числа (пяти) управляющих переменных в этой задаче искать в ней аналитическое решение чрезвычайно сложно. Надеяться получить аналитические решения в нелинейных дифференциальных играх можно только в случае не более трех управляющих переменных. Поэтому мы несколько упростим эту дифференциальную игру без потери в ней существенных качественных результатов.

3. Упрощенная модель двух экономик

В постановке, допускающей относительно несложное аналитическое исследование, можно использовать в качестве производственной функции h функцию типа Кобба—Дугласа $h = A(t)x_1^q z^r$, где q, r — некоторые выбранные степени. Мы также ограничимся случаем, когда высокоразвитый регион (типа Японии) не имеет собственных энергоресурсов и вынужден покупать их у энергопроизводящего региона (например, у арабских стран), живущего в основном за счет продажи своих энергоресурсов. В этом случае вместо пяти управляющих переменных можно ограничиться всего двумя. При этом возможно отождествление управляющих переменных u_2, u_3 и v_1 и введение вместо них всего одной переменной $v = u_2 = u_3 = v_1$. Подобное упрощение означает, что 1-ый игрок (экономический регион) не производит своих собственных энергоресурсов и его экономика зависит от скорости получения (по импорту) энергоресурсов v, поставляемых 2-м игроком, и от скорости собственных инвестиций (u) в свои фонды (x_1).

Так что производственная функция h может быть взята в следующем, достаточно реалистичном виде $h = A(t)\sqrt{x_1 v}$, где коэффициент A(t) моделирует заданный автономный технический прогресс. Нормирующий параметр β можно положить равным единице и ввести переименование $\alpha \overset{\triangle}{=} \alpha_2$. В этом случае игровая задача (12)–(19) сводится к следующей: 1-ый игрок, выбирая управление $u(t)$, стремится максимизировать функционал J_1, а второй игрок, выбирая управление $v(t)$, заинтересован в максимизации своего функционала J_2, причем эти функционалы принимают вид:

$$J_1 = \int\limits_T [A(t)\sqrt{x_1(t)v(t)} - u(t) - v(t)]\, dt, \tag{20}$$

$$J_2 = \int\limits_T \left[1 - \frac{1}{e^{\alpha x_2} - 1}\right] v(t)\, dt \tag{21}$$

$$\dot{x}_1 = u - x_1 \cdot \delta, \quad x_1(t_0) = x_1^0, \\ \dot{x}_2 = -v, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \tag{22}$$

$$0 \leqslant u \leqslant u^0, \quad 0 \leqslant v \leqslant v^0. \tag{23}$$

Для решения этой задачи воспользуемся необходимыми условиями равновесности, даваемыми теоремой 2, согласно которой вводим в рассмотрение гамильтонианы

$$H^1 = p_0^1(A\sqrt{x_1 v} - u - v) + p_1^1(u - x_1\delta) - p_2^1 v, \\ H^2 = p_0^2(1 - \frac{1}{e^{\alpha x_2} - 1})v + p_1^2(u - x_1\delta) - p_2^2 v, \tag{24}$$

где $p_0^1 = p_0^2 = 1$, а множители Лагранжа $p_1^1, p_2^1, p_1^2, p_2^2$ удовлетворяют уравнениям (9), (10), принимающим вид

$$\dot{p}_1^1 = -\frac{\partial H^1}{\partial x_1} = -p_0^1 A \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{x_1}} + p_1^1\delta, \quad p_1^1(t_1) = 0; \tag{25}$$

$$\dot{p}_2^2 = -\frac{\partial H^2}{\partial x_2} = -p_0^2 \frac{\alpha v e^{\alpha x_2}}{(e^{\alpha x_2} - 1)^2}, \quad p_2^2(t_1) = 0; \tag{26}$$

$$\dot{p}_2^1 = -\frac{\partial H^1}{\partial x_2} = 0, \quad p_2^1(t_1) = 0; \tag{27}$$

$$\dot{p}_1^2 = -\frac{\partial H^2}{\partial x_1} = -p_1^2\delta, \quad p_1^2(t_1) = 0, \tag{28}$$

Система уравнений (25)–(28) имеет следующее решение

$$p_1^1(t) = \frac{1}{2}e^{\delta t}\int_t^{t_1} A(t)e^{-\delta\tau}\sqrt{\frac{v}{x_1}}d\tau \geqslant 0, \tag{29}$$

$$p_2^2(t) = \alpha\int_t^{t_1}\frac{v(\tau)e^{\alpha x_2}}{(e^{\alpha x_2}-1)^2}d\tau \geqslant 0. \tag{30}$$

$$p_2^1(t) \equiv 0, \tag{31}$$

$$p_1^2(t) \equiv 0. \tag{32}$$

С учетом решения (26) гамильтонианы H^1 и H^2 принимают вид

$$\begin{aligned} H^1 &= (A\sqrt{x_1 v} - v) + (p_1^1 - 1)u - p_1^1 x_1\delta \triangleq \\ &\triangleq K_1\sqrt{v} - v + K_2 u - K - 3, \end{aligned} \tag{33}$$

$$H^2 = \left[(1 - \frac{1}{e^{\alpha x_2}-1}) - p_2^2\right]v \triangleq Kv, \tag{34}$$

где в гамильтонианах введены новые обозначения с целью более удобной ссылки на них в дальнейшем.

Найдем наисильнейшие игровые равновесия в этой дифференциальной игре, воспользовавшись тем, что A^c-равновесие совместно с теоремой 2 позволяет сводить задачу поиска решения дифференциальной игры к одной или нескольким простым «локальным» статическим задачам, в которых платежными функциями являются (в каждый момент t на траектории дифференциальной игры) гамильтонианы H^1 и H^2. На тех участках траектории, на которых оба гамильтониана, рассматриваемые как функции только управляющих переменных, одновременно имеют неизменный вид, рассматривается «локальная» игровая задача, как если бы она была статической. Если же в некоторый момент t' один из гамильтонианов изменяет свой вид, то с этого момента до некоторого следующего момента t'' на траектории решается вторая «локальная» задача, и т. д. Найденное в результате управление вдоль всей траектории (слагающееся из последовательно состыкованных управлений на каждом из участков) определяет стратегии поведения участников в исходной дифференциальной игре. Например, момент t', когда коэффициент $(p_1^1 - 1)$ перед управляющей переменной u в гамильтониане H^1 изменяет знак, является коэффициентом стыковки двух примыкающих к этому моменту «локальных» игр. Другим моментом может явиться, например, момент t'' изменения знака коэффициента перед v в гамильтониане H^2. Момент t' определяется как момент прохождения коэффициента $p_1^1(t)$ (всегда неотрицательного и определяемого формулой (29)) через значение 1, а момент t'' определяется как момент изменения знака коэффициента $K(t)$ перед управлением v в гамильтониане H^2.

Покажем, что $p_1^1(t) > 1$ при $t < t'$ и $p_1^1(t) < 1$ при $t > t'$, причем интервал (t, t') значительно превосходит интервал (t', t_1).

Из формулы (29) видно, что $p_1^1(t) > 0$ и $p_1^1(t_1) = 0$, причем функция $p_1^1(t)$ быстро возрастает (назад во времени) от момента t_1 до момента t_0. Отсюда следует, что коэффициент $K_2(t)$ в гамильтониане H^1 положителен почти на всей траектории при $t \in (t_0, t')$ за исключением малого интервала (t', t_1) перед конечным моментом t_1. Существование момента t' порождает, по меньшей мере, две «локальных» игровых задачи на траектории.

В гамильтониане H^2 неравенство $e^{\alpha x_2} \gg 1$ может сохраняться на довольно большом интервале (соизмеримым со временем истощения природных ресурсов), а следовательно, на разумном интервале планирования $T = (t_0, t_1)$ величина $(1/(e^{\alpha x_2})$ тем более остается очень малой. Коэффициент $p_2^2(t)$ также остается малым ($p_2^2 < 1$) на этом интервале, что видно из формулы (30). Отсюда следует, что существует разумный горизонт планирования T, на котором коэффициент $K(t)$ в формуле (34) остается положительным. Если же период T достаточно велик, то помимо указанного выше момента t' возможен еще и второй критический момент t'', в который коэффициен $K(t)$ изменит знак на отрицательный, что приведет к тому, что появится еще и третья «локальная» задача.

Однако математически моделировать в прикладных задачах динамику экономики на большом интервале времени не имеет смысла, поскольку до сих пор не получено удовлетворительно точных математических формулировок законов экономического развития. Вследствие этого рассматривать случай больших горизонтов планирования T в случае использования в модели любых производственных функций лишено смысла, а следовательно, нет необходимости изучать и случай появления в модели критического момента t''.

Итак, принимаем, что только критический момент t' изменения знака коэффициента $K_2(t)$ возможен в рассматриваемой дифференциальной игре двух экономических объектов. Выясним поведение уровней функции $H_1 = \text{const}$ на плоскости (u, v). С этой целью продифференцируем равенство (33)

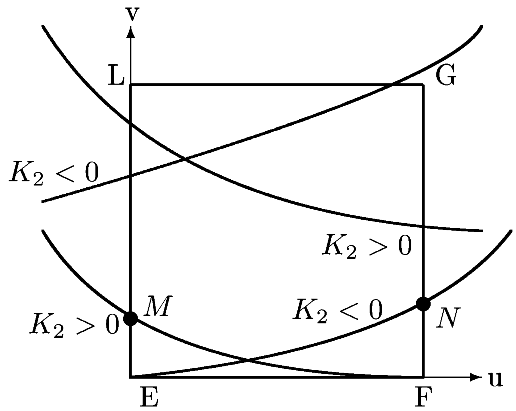

Рис. 1

по u, считая $v = v(u)$ функцией от u:

$$\frac{dv}{du} = -\frac{K_2}{\left(\frac{K_1}{2\sqrt{v}} - 1\right)}. \tag{35}$$

Поскольку в любой экономической системе $K_1 \gg 2\sqrt{v}$, то при $K_2 > 0$ получаем $dv/du < 0$. Следовательно, в квадрате $EFGL$ на рис. 4 при $K_2 > 0$ уровни функции H_1 имеют отрицательный наклон, а при $K_2 < 0$ — положительный, причем все эти уровни подходят к оси u по касательной. Чем выше на этом рисунке уровень $H_1 = \text{const}$, тем большее значение на нем принимает гамильтониан H_1 и тем он предпочтительнее для 1-го игрока.

Уровни же функции $H_2 = \text{const}$, очевидно, горизонтальны, причем для 2-го игрока более предпочтительны на этом рисунке более высокие уровни для рассматриваемого случая $K(t) > 0$.

Найдем все игровые равновесия для первой статической «локальной» игры на квадрате $EFGL$ на рис. 1, отвечающей случаю $K_2 > 0$ (т. е. на интервале времени (t_0, t')). Прежде всего для этой первой «локальной» игры с платежными функциями $H_1(u, v)$ и $H_2(u, v)$ найдем наиболее слабые A-равновесия на прямоугольнике $EFGL$ (на рис. 1), под которыми на самом деле в этой игре понимаются A^c-равновесия. A_i-экстремальные ситуации и A-равновесие задаются, как легко видеть, следующими фигурами и отрезками:

$A_1 = [FGLMF]$ – это замкнутая фигура,

$A_2 = [GL], \quad A = [GL].$

Более сильные B- и $\overline{D}$-равновесия на множестве A имеют вид:

$$B_1 = [GL], \quad B_2 = G, \quad B = G;$$
$$\overline{D}_1 = \overline{D}_2 = \overline{D} = G.$$

Таким образом, мы нашли, что на первом подынтервале (t_0, t') исходной дифференциальной игры равновесная пара управлений $(u(t), v(t))$ задается точкой G на рис. 1, определяющей независимое от времени постоянное управление обоих игроков на интервале (t_0, t'): $u(t) = u^0$, $v(t) = v^0$.

Аналогичным образом ищется конфликтное равновесие в исходной дифференциальной игре на оставшемся участке траектории при (t', t_1), которому теперь уже соответствует вторая «локальная» игра с теми же платежными функциями H_1 и H_2, но теперь уже при $K_2 < 0$. Для этой второй «локальной» игры получаем следующие равновесия:

$$A_1 = [GLENG], \quad A_2 = [GL], \quad A = [GL];$$
$$B_1 = [GL], \quad B_2 = B = L, \quad \overline{D}_1 = \overline{D}_2 = \overline{D} = L.$$

Следовательно, на заключительном участке траектории (t', t_1) конфликтное равновесное управление игроков (отвечающее равновесию во второй «локальной» игровой задаче) имеет вид: $u(t) = 0$, $v(t) = v^0$. Смысл этого управления на заключительном участке траектории в том, что поскольку (согласно постановке задачи) интервал (t_0, t_1) зафиксирован, то 1-му игроку невыгодно после некоторого момента t' инвестировать средства (u) в развитие своего производства и для амортизации фондов, так как постановка задачи предполагает, что экономика после момента t_1 перестает существовать, в то же время второму игроку выгодно добывать и продавать ресурсы по максимуму до последнего момента t_1.

Литература

1. *Смольяков В. Э., Смольяков Э. Р.* Оптимальный дележ в кооперативных играх и динамическая игровая модель мировой энергетики // Труды ИСА РАН. 2008. Т. 33. Вып. 12. С. 35–48.
2. *Смольяков Э. Р.* Теория конфликтных равновесий. М.: URSS, 2005.
3. *Смольяков Э. Р.* Обобщенное оптимальное управление и динамические конфликтные задачи. М.: МГУ, 2010.
4. *Смольяков Э. Р.* Методы решения конфликтных задач. М.: МГУ, 2010.
5. *Nash J.* Non-Cooperative Games // Annals of Mathematics. 1951. V. 54. № 2. P. 286–295.
6. *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
7. *Вайсборд Э. М., Жуковский В. И.* Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. М.: Советское радио, 1980.

Смольяков Владимир Эдуардович. Главный специалист подразделения ИСА РАН. Окончил в 2005 г. Международную академию оценки и консалтинга. Количество печатных работ: 16. Область научных интересов: моделирование систем. E-mail: ser-math@rambler.ru

Смольяков Эдуард Римович. Д. ф.-м. н., профессор МГУ им. М. В. Ломоносова. Окончил МФТИ в 1962 г. Количество печатных работ: 237, монографий 14. Область научных интересов: теория конфликтов и игр, оптимальное управление, теоретическая физика, философия эзотеризма. E-mail: ser-math@rambler.ru