Математические модели в экономике

Перспективное и текущее планирование в модели децентрализованной экономики*

А. П. Абрамов

Аннотация. В работе рассматривается двухуровневая схема планирования в динамической модели децентрализованной экономики с леонтьевскими технологиями. Показано, что использование такой схемы планирования ускоряет сходимость траектории выпусков к неймановскому лучу в угловой квазиметрике.
Ключевые слова: *децентрализованная экономика, леонтьевские технологии, сбалансированный рост.*

В реальной экономике крупные и средние предприятия, наряду с планированием текущей деятельности, занимаются также составлением планов работ на среднесрочную и долгосрочную перспективу. Как правило, эти планы связаны с развитием и модернизацией основных производственных фондов, расширением рынка сбыта, а также освоением выпуска новых видов продукции. Совокупность планов крупной фирмы образует иерархическую структуру, обеспечивающую согласованность планов разного временного масштаба. Эта структура и ее элементы являются динамическими объектами, так как постоянно возникают новые планы, выполненные планы покидают структуру, и все планы могут корректироваться вплоть до отмены.

Рассмотрим модель функционирования многоотраслевой децентрализованной экономики с леонтьевскими технологиями [1], в которой присутствуют элементы иерархии планов производства. Ограничимся простейшим случаем двухуровневой структуры планирования.

Введем следующие обозначения:

t – индекс временнго шага модели, $t = 0,1,2,\ldots$;

i – индекс отрасли, $i = 1,\ldots,n$;

A – квадратная неотрицательная матрица порядка n, элементы которой a_{ij} равны удельным затратам продукта i при производстве продукта j (эти коэффициентами называются технологическими);

$x(t)$ – вектор выпуска продукции экономической системой на шаге t, компоненты которого равны объемам производства соответствующих отраслей на данном шаге: $x(t) = \{x_1(t),\ldots,x_n(t)\}^T$;

$x^s(t)$ – вектор объемов реализации продукции, произведенной на шаге t;

$x^d(t)$ – вектор объемов спроса на продукты, произведенные на шаге t;

$\breve{x}^p(t)$ – вектор перспективных планов выпуска продукции на шаге t;

$\hat{x}^p(t)$ – вектор текущих планов выпуска продукции на шаге t.

Вектор реализации удовлетворяет очевидному неравенству

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 13–07–00730, № 11–07–00201).

$$x^s(t) \leqslant x(t), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots.$$

Поскольку рассматриваемая модель является децентрализованной, то все отрасли самостоятельно планируют свою работу. Будем предполагать, что в момент окончания шага $t-1$ отрасль i определяет перспективный план выпуска на шаге $t+1$, исходя из последних известных данных по объему реализации продукции:

$$\breve{x}_i^p(t+1) = kx_i^s(t-2), \quad t \geqslant 2, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где коэффициент k одинаков для всех отраслей и постоянен на всех шагах.

Полученный перспективный план порождает вектор величин спроса $\breve{x}^d(t)$ на ресурсы, необходимые для его выполнения:

$$\breve{x}^d(t) = A\breve{x}^p(t+1).$$

В свою очередь, полученный вектор величин спроса порождает текущий план производства:

$$\hat{x}^p(t) = \breve{x}^d(t).$$

Заметим, что информационное взаимодействие между отраслями при составлении текущего плана сводится к отправке заявок соответствующим производителям на поставку необходимого объема продукта для выполнения перспективного плана.

Будем предполагать, что произведенная продукция распределяется согласно следующей процедуре. Отрасль i, $i = 1, \ldots, n$, получив заявки от потребителей и подсчитав показатель $x_i^d(t-1)$, вычисляет коэффициент

$$\eta_i(t-1) = x_i^d(t-1) / x_i(t-1),$$

характеризующий обеспеченность текущих планов ресурсом, который она произвела. Далее эти коэффициенты сообщаются всем отраслям системы. На основе полученных данных каждая из отраслей (или некий информационный центр) вычисляет максимальное значение этих показателей:

$$\eta_{\max}(t-1) = \max_i \ \eta_i(t-1). \tag{1}$$

Если окажется, что $\eta_{\max}(t-1) \leqslant 1$, то спрос каждой из отраслей на ресурсы, произведенные на шаге $t-1$, удовлетворяется полностью, и объемы поставок обеспечивают выполнение намеченных планов. В этом случае объем производства каждой отрасли будет равен ее текущему плану выпуска: $x_i(t) = \hat{x}_i^p(t)$, $i = 1, \ldots, n$. Если же $\eta_{\max}(t-1) > 1$, то полное выполнение планов становится невозможным. В этом случае все отрасли, используя данный параметр, уменьшают текущие планы выпусков:

$$\hat{x}_i^p(t) := \hat{x}_i^p(t) / \eta_{\max}(t-1), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Соответственно, величина спроса на все виды ресурсов также уменьшается в $\eta_{\max}(t-1)$ раз. В этом случае скорректированные текущие планы полностью обеспечены ресурсами, при этом вновь вычисленный показатель $\eta_{\max}(t-1)$ равен единице.

Текущий план, допустимый по ресурсам, однозначно определяет объемы реализации продукции, произведенной на предыдущем шаге:

$$x_i^s(t-1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^p(t), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Далее начинается производственный цикл на шаге t, объемы выпусков которого формируют вектор $x(t)$. По окончанию цикла t определяется новая пара векторов планов $\breve{x}^p(t+2)$, $\hat{x}_i^p(t+1)$ и т. д.

Легко видеть, что в этом случае векторы выпуска на двух соседних шагах связаны равенством вида

$$x(t+1) = \beta(t+1) A \ \breve{x}^p(t+1) = \beta(t+1) \ k \ A^2 x(t),$$

где положительный скалярный множитель $\beta(t)$ соотносит текущий план с реальным выпуском и связан с параметром $\eta_{\max}(t-1)$, определенным по формуле (1), так: $\beta(t) = 1 / \eta_{\max}(t-1)$.

Применяя индукцию, выпишем зависимость вектора выпуска $x(t)$ от вектора первоначального перспективного плана $\breve{x}^p(2)$:

$$x(t) = \beta(t)\beta(t-1) \cdots \beta(1) \ k^{(t-1)} A^{2t-1} \ \breve{x}^p(2).$$

Используя фробениусово число λ_A матрицы A, полученную зависимость запишем в виде

$$x(t) = \beta(t)\beta(t-1) \cdots \beta(1) \lambda_Y^{2t-1} k^{(t-1)} \left(\frac{Y}{\lambda_Y} \right)^{2t-1} \breve{x}^p(2). \tag{2}$$

Теорема. Если технологическая матрица A системы примитивна, векторы $x(0)$ и $\breve{x}^p(2)$ строго положительны и выполняются неравенства

$$\sqrt{k} \geqslant (1 / \lambda_A),$$

то рассматриваемая схема функционирования системы либо асимптотически выводит систему на режим сбалансированного роста, либо сохраняет этот режим при соответствующих значениях исходных векторов $x(0)$ и $\breve{x}^p(2)$.

Исчерпывающее доказательство этого утверждения, которое следует из эргодических свойств последовательности матриц вида $(A/\lambda_A)^t$, $t = 1, 2, \ldots$ (см., например, [2]), приведено для динамического уравнения вида (2) в [1].

Таким образом, здесь имеет место сходимость последовательности нормированных векторов $\{x(t)/\|x(t)\|\}$ к некоторому фробениусову вектору x_A матрицы A.

Для рассматриваемого случая справедлива следующая оценка скорости сходимости последовательности нормированных выпусков к фробениусову вектору x_A матрицы A (см.[3]):

$$\left\|\left(A/\lambda_A\right)^{2t-1}\breve{x}^p(2) - x_A\right\|_\infty < Cr^{2t-1},$$

где C – некоторая положительная константа, а скалярный параметр r удовлетворяет двустороннему ограничению вида $1 > r > |\lambda_{n-1}|/\lambda_A$, где λ_{n-1} – второе по величине модуля собственное число технологической матрицы A.

Сопоставление этой оценки с аналогичной оценкой скорости сходимости в модели, где используется только текущее планирование [4], показывает, что использование двухэтапного планирования существенно увеличивает скорость сходимости к пределу последовательности нормированных выпусков, т. е. асимптотическое приближение траектории выпуска к лучу Неймана в угловой квазиметрике происходит более быстрыми темпами.

Литература

1. *Абрамов А. П.* О выходе на магистраль сбалансированного роста в модели замкнутой децентрализованной экономики // Математическое моделирование, 2008, т. 20, № 2, с. 3–12.
2. *Ашманов С. А.* Ведение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984, 294 с.
3. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир, 1989, 655 с.
4. *Абрамов А. П.* Сбалансированный рост в моделях децентрализованной экономики. М.: URSS, 2011, 128 с.

Абрамов Александр Петрович. Гл. н. с. ФГБУН ВЦ им. А. А. Дородницына. Д. ф.-м. н., профессор. Окончил МФТИ в 1973 г. Количество печатных работ: 96, в т. ч. 6 монографий. Область научных интересов: математическая экономика, исследование операций. E-mail: apabramov@list.ru