Экспертно-статистическое прогнозирование спроса*

И. В. Гасников, В. В. Токарев

Введение

В предшествующей статье [2], посвященной проблеме оптимизации точности прогнозирования возмущений, полагалось, что точность можно увеличить, затрачивая дополнительные ресурсы на прогнозирование. Из этой предпосылки была сформирована задача поиска оптимальной точности прогнозирования, которая далее была решена в абстрактном виде и рассмотрена на иллюстративном примере планирования поставки для мелкооптовой базы. Изложение идей и результатов шло в рамках гарантирующего подхода к выбору управления, что удобно для изучения качественной, концептуальной, стороны вопроса.

В гарантирующем подходе предполагаются выполненными две гипотезы. Первая – ни одно возмущение, выходящее за пределы прогнозируемого множества, никогда не реализуется. Вторая – любое возмущение из прогнозируемого множества может реализоваться. Если бы эти гипотезы строго выполнялись, то сужение множества ожидаемых возмущений было бы невозможно. Когда первоначально множество ожидаемых возмущений задано с «запасом», то вторая гипотеза не выполняется и тогда из первоначального множества можно удалить нереализуемые подмножества, если удастся получить информацию об их нереализуемости.

В прикладных неуникальных задачах с повторяющимися актами управления часто отказываются от строгого соблюдения двух упомянутых гипотез гарантирующего подхода. Возмущения полагаются случайными, как правило, нормально распределенными, и допускается маловероятный выход возмущений из прогнозируемого множества.

Техника уточнения прогноза, которая приводила бы к сужению множества ожидаемых возмущений, в [2] не рассматривалась, описывалась лишь общая схема. В предложенной сейчас работе формируется конкретный механизм уточнения прогноза возмущений. При этом используется немного измененный иллюстративный пример из [2] о мелкооптовой базе.

Механизм уточнения прогнозов возмущений базируется на идее сочетания экспертного и статистического способов прогнозирования в циклически повторяющихся процедурах принятия управленческих решений. Эксперты используют для прогнозирования свой опыт, интуицию и неформальные приемы, а формализованная статистическая обработка прошлых реализаций и сравнение их с предыдущими экспертными прогнозами позволяют скорректировать последующие экспертные прогнозы.

Идея сочетания неформальных и формализованных методов прогнозирования довольно часто встречается в литературе [4, 6, 8–11] и др. Эта общая идея в приложении к разнообразным задачам реализуется по-разному. Опуская подробный обзор литературы, перейдем сразу к изложению предлагаемого способа сочетания экспертного и статистического прогнозирования, заверив читателя в его оригинальности.

1. Основные предположения и обозначения для примера мелкооптовой базы

Мелкооптовая база обеспечивает своих многочисленных клиентов товаром повседневного спроса одного вида по неизменной цене. Периодически база заказывает поставку товара его производителю тоже по неизменной цене. Заказ исполняется точно по объему и в заранее оговоренный срок. Однако при составлении заявки будущий спрос клиентов известен неточно.

База фиксирует объемы всех прошлых покупок и проводит выборочные опросы клиентов, оценивающих свой будущий спрос. Так что в роли экспертов используются сами клиенты. Далее производится статистическая обработка временны́х рядов прошлых покупок в сравнении с предыдущими оценками опрошенных клиентов своего спроса. На основании такой обработки выявляются поправочные коэффициенты к оценкам клиентами их будущего спроса.

Поправленные оценки выборочного прогноза распространяются на генеральную совокупность клиентов. По этому прогнозу суммарного спроса база планирует объем поставки от производителя товара, после чего цикл повторяется.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12–07–00156).

Остальные предположения сообщаются в нижеследующем списке обозначений:

$[t, t+1)$ – один t-й цикл, или этап, функционирования базы между двумя моментами времени t и $(t+1)$ соседних поставок товара от его производителя; $t<0$ – прошедшие, завершившиеся этапы, $t \geq 0$ – предстоящие;

$u(t)$ – запланированный ($t<0$) или планируемый ($t=0$) объем поставки товара, распродаваемого на t-м этапе (фактическая поставка осуществляется в точно оговоренный момент времени t и в запланированном объеме u);

$x(t)$, $x_i(t)$ – фактические объемы покупок, совершенных на t-м этапе всеми клиентами и персонифицируемыми клиентами i (измеряется точно);

$N(t)$ – общее число клиентов, совершивших покупки на t-м этапе (регистрируется к концу t-го этапа);

$n(t)$ – число клиентов, опрошенных на t-м этапе о желаемом размере их будущих покупок на $(t+1)$-м этапе ($n(t) \leq N(t)$);

$I(t)=\{i\}$ – множество номеров-имен клиентов i, опрошенных на t-м этапе об их будущем спросе ($|I(t)|=n(t)$ – число элементов множества I);

$Y_i(t+1)=\{y_i(t+1)\}$, $i \in I(t)$ – диапазон оценки будущего спроса y_i на $(t+1)$-м этапе, сообщенный клиентом i, опрошенным на t-м этапе (предполагается, что фактический объем будущих покупок клиента не выйдет за пределы сообщенного им оценочного диапазона, т. е. $x_i(t+1) \in Y_i(t+1)$);

$m(t)$ – число клиентов с неполностью удовлетворенным спросом, заявивших свои претензии (регистрируются к концу t-го этапа, причем не обязательно все неудовлетворенные клиенты предъявляют претензии);

$J(t)=\{j\}$ – множество номеров-имен клиентов j, сообщивших о неполном удовлетворении своего спроса на t-м этапе ($|J(t)|=m(t)$, все такие клиенты также опрашиваются на предмет желаемого размера их будущих покупок);

$z_j(t)$ – истинный объем неудовлетворенного спроса, сообщаемый клиентом $j \in J(t)$ (регистрируется у всех клиентов из $J(t)$);

$Y_j(t+1)=\{y_j(t+1)\}$, $j \in J(t)$ – оценочный диапазон будущего спроса y_j на $(t+1)$-м этапе, сообщенный клиентом j, опрошенным на t-м этапе (также, как и для удовлетворенных опрошенных клиентов предполагается, что $x_j(t+1) \in Y_j(t+1)$, т. е. что объем будущих покупок x_j не выйдет за пределы оценочного диапазона Y_j, который регистрируется у всех неудовлетворенных клиентов, заявивших о факте неполного удовлетворения своего спроса);

$K(t)=\{k\}$ – множество неопрошенных, прочих, клиентов, в том числе и, возможно, не полностью удовлетворивших свой спрос, но не заявивших об этом (такие клиенты не персонифицированы, но для единообразия обозначений и последующих записей им присваиваются индивидуальные номера k, например в порядке совершения покупок).

Введенные выше группы клиентов: I – опрошенные, J – пожаловавшиеся, K – все прочие не пересекаются: $I(t) \cap J(t)=\varnothing$, $I(t) \cap K(t)=\varnothing$, $J(t) \cap K(t)=\varnothing$. Объединение этих групп представляет собой совокупность всех клиентов, посетивших на t-м этапе базу: $B(t)=I(t) \cap J(t) \cap K(t)$.

Клиенты, единожды попавшие в опрашиваемую группу I, в ней и остаются. Клиентам эта группа привлекательна тем, что база им гарантирует удовлетворение их будущего спроса в пределах оценочного диапазона, сформированного самими же клиентами. Фирма тоже заинтересована в стабильности опрашиваемой группы, поскольку постоянные клиенты накапливают там опыт все более точного оценивания своего будущего спроса.

Со временем, опрашиваемая группа I пополняется за счет перевода в нее на шаге $(t+1)$ всех клиентов из группы $J(t)$, ранее заявивших о неполном удовлетворении своего спроса. В дальнейшем, чтобы не потерять таких клиентов, база также заботится о поставках необходимого им количества товара, как и для других клиентов из группы $I(t+1)$.

Кроме того, для увеличения точности прогнозирования база может еще больше расширять опрашиваемую группу $I(t+1)$, охватывая опросами часть «прочих» клиентов из группы $K(t)$. Но следует учитывать, что любое расширение опрашиваемой группы I сопряжено с дополнительными затратами.

В свою очередь группа K пополняется новыми клиентами базы. Покидают группу (помимо переведенных в группу I) клиенты, недовольные снабжением и не пожелавшие предъявить претензии фирме. При этом считается, что недовольство клиентов вызывается только нехваткой количества продаваемого товара, а его качество стабильно высоко.

Графически перетоки клиентов между группами показаны на рис. 1. Аналитически перетоки представляются следующими конечно-разностными уравнениями динамики для численности групп, подсчитываемой к началу t-го и $(t+1)$-го этапов:

численность опрошенных клиентов $n(t) = |I|$ –

$$n(t+1) = n(t) + m(t) + q_{KI}(t), \qquad (1а)$$

численность клиентов заявивших претензии

$$m = |J| \; –$$

$$m(t+1) = q_{KJ}(t), \qquad (1б)$$

численность «прочих» клиентов $p = |K(t)|$ –

$$p(t+1) = p(t) - q_{KI}(t) - q_{KJ}(t) + q^{+}(t) - q^{-}(t) \qquad (1в)$$

численность всех клиентов базы $N = |B(t)|$ –

$$N(t+1) = n(t+1) + m(t+1) + p(t+1) = N(t) + q^{+}(t) - q^{-}(t), \qquad (1г)$$

где потоки $q(t)$ обозначают число клиентов, перешедших из одной группы в другую за время от t до $(t+1)$: q_{KI} – из K в I, q_{KJ} – из K в J, q^{+} – извне в K, q^{-} – из K вовне.

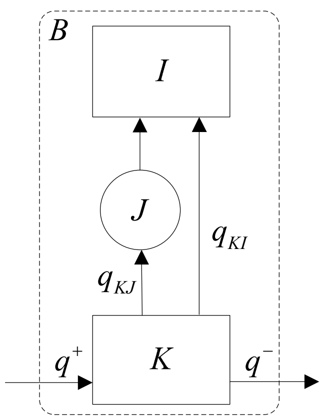


Рис. 1. Схема перетоков между группами клиентов

Таким образом, полагается, что благодаря регистрации совершенных покупок и выборочных опросов клиентов на t-м этапе становятся известными значения следующих показателей, которые запоминаются и за предыдущие этапы:

$x(t)$ – объем всех совершенных покупок,

$x_i(t)$, $i \in I(t) \cup J(t)$ – объемы покупок персонифицированных клиентов,

$z_j(t)$, $j \in J(t)$ – объемы неудовлетворенного спроса у пожаловавшихся клиентов,

$Y_i(t+1)$, $i \in I(t) \cup J(t)$ – диапазонные оценки своего спроса на один шаг вперед клиентами, включенными в опрашиваемую группу I, и клиентами, заявившими о неудовлетворенном спросе J,

$N(t)$ – общее число покупок,

$n(t)$ – число опросов по инициативе базы,

$m(t)$ – число претензий, заявленных клиентами на неудовлетворенный спрос.

2. Сочетание статистического и экспертного методов прогнозирования

Статистической обработкой временных рядов фактических и оценочных показателей за прошлое выявляется связь между фактическими данными и экспертными оценками. Выявленная связь переносится на будущее, где есть только экспертные оценки, с целью уточнения прогноза фактических показателей.

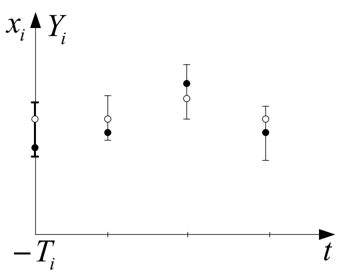


Рис. 2. Исходные временны́е ряды фактического и прогнозируемого спроса и точечная аппроксимация прогнозов: • – факт x_i, I – отрезок прогноза Y_i, ∘ – аппроксимация y_i

В рассматриваемой задаче роль экспертов играют сами клиенты базы из опрашиваемой группы, оценивающие свой спрос на один шаг вперед.

2.1. Идентификация коэффициентов осреднения диапазонных оценок спроса. Клиент i из опрашиваемой группы I с момента $t = -T_i < 0$ включения его в эту группу регулярно оценивает на шаг вперед свой спрос в виде диапазона $Y_i(t)$. У таких клиентов фиксируются также объемы $x_i(t)$ их фактических покупок, которые по взаимным обязательствам опрашиваемого клиента и базы никогда не выходят за пределы прогнозируемого им диапазона (рис. 2):

$$x_i(t) \in Y_i(t) \doteq [\underline{y}_i(t); \overline{y}_i(t)],$$

$$-T_i \le t \le 0, \; i \in I(-T_i). \qquad (2).$$

Аппроксимируем теперь диапазонный прогноз $[\underline{y}_i;\overline{y}_i]$ точечным y_i так, чтобы учесть склонность клиента к преувеличению или к преуменьшению своего истинного спроса. Для этого примем линейное правило вычисления точечных оценок спроса по границам диапазонов (2):

$$y_i(t,\lambda_i) \doteq \lambda_i \underline{y}_i(t) + (1-\lambda_i)\overline{y}_i(t)\,,\ \lambda_i \equiv \mathrm{const} \in [0;1]\,. \quad (3)$$

Коэффициент осреднения λ_i характеризует психологический склад i -го опрашиваемого клиента: $\lambda_i = 0,5$ – уравновешенность, $\lambda_i < 0,5$ – тяготение к верхней границе прогнозируемого спроса, $\lambda_i > 0,5$ – к нижней.

Если бы клиент опрашивался однократно, то единственную осредненную точку (3) его диапазонного прогноза $[\underline{y}_i;\overline{y}_i]$ можно было бы совместить с точкой его фактического спроса: $y_i = x_i$, и тогда параметр λ_i нашелся бы однозначно:

$$y_i \doteq \lambda_i \underline{y}_i + (1-\lambda_i)\overline{y}_i = x_i \Rightarrow \lambda_i = \frac{\overline{y}_i - x_i}{\overline{y}_i - \underline{y}_i}\,.$$

В другом, предельном, варианте многократных, но исходно точечных прогнозов, т. е. при $\underline{y}_i = \overline{y}_i$, по условию (2) все прогнозы обязательно совпадут с фактическим спросом, а параметр λ_i может быть произвольным:

$$\underline{y}_i = \overline{y}_i = x_i \Rightarrow y_i = \lambda_i x_i + (1-\lambda_i)x_i = x_i \quad \forall \lambda_i\,.$$

В общем случае с неизменным во времени параметром λ_i все многочисленные осредненные точки $y_i(t,\lambda_i)$ не удается совместить с точками фактического спроса $x_i(t)$, поэтому приходится прибегать к приближенной аппроксимации, например, по методу наименьших квадратов, т. е. минимума среднеквадратичной ошибки прогноза:

$$\frac{1}{T_i}\sum_{t=-T_i}^{-1}[y_i(t,\lambda_i) - x_i(t)]^2 \Rightarrow \min \text{ по } \lambda_i \in [0;1] \quad (4)$$

2.2. Распространение выборочных опросов на генеральную совокупность. Чем больше клиентов удастся опросить, тем с большей точностью можно предсказать будущий спрос. Однако опрос всех клиентов требует существенных затрат, поэтому, как правило, приходится ограничиваться выборочными опросами, конечно, в ущерб точности прогнозирования.

Чтобы пересчитывать результаты выборочных опросов на генеральную совокупность, хотелось бы заранее знать распределение числа клиентов по объему совершаемых покупок. На время предположим известной нормированную функцию распределения $F(x)$, по которой находится число покупателей с объемом покупок, превосходящим x, в виде:

$$NF(x)\,,\ F(0) = 1\,,\ F(b) = 0\,, \quad (5а)$$

где N – общее число покупателей, b – максимальный размер покупки.

Функция $F(x)$ невозрастающая, непрерывная справа. Например, для равномерного распределения, не учитывающего целочисленность количества клиентов, она линейна (рис. 3):

$$F(x) = 1 - (x/b) \quad (5б)$$

Для увеличения точности прогнозирования будущего спроса следует опрашивать клиентов с большими объемами покупок x, превышающих некоторый уровень a, устанавливаемый базой: $x \ge a \in (0;b)$.

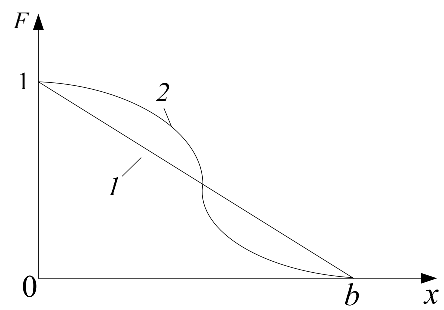


Рис. 3. $F(x)$ – нормированная функция распределения числа клиентов по объему совершаемых ими покупок: *1* – равномерное распределение, *2* – нормальное распределение

Суммарный объем покупок X_I для такой выборки $i \in I$ оценивается априори по функции распределения (5а):

$$\frac{1}{N}X_I = \int_b^a x dF(x)\,, \quad (6)$$

где $dF(x)$ – доля числа клиентов с объемом покупки от x до $x + dx$.

Объем покупок генеральной совокупности находится аналогично:

$$\frac{1}{N}X = \int_b^0 x dF(x)\,. \quad (7)$$

Относительная численность ν выборки n клиентов из N, объемы покупок у которых превышают a, составит:

$$\nu \doteq \frac{n}{N} = \int_b^a dF(x)\,, \tag{8}$$

при этом доля γ объема покупок для выборки X_I от объема покупок X генеральной совокупности равна:

$$\gamma \doteq \frac{X_I}{X} = \left[\int_b^a x dF(x)\right]\left[\int_b^0 x dF(x)\right]^{-1}. \tag{9}$$

Например, для равномерного распределения вида (5б) общие формулы (6)–(9) дают:

$$X_I = \frac{1}{2} bN(1-\frac{a^2}{b^2}),\ X = \frac{1}{2}bN,\ \nu = 1-\frac{a}{b},$$

$$\gamma = 1-\frac{a^2}{b^2} = 1-(1-\nu)^2 = \nu(2-\nu). \tag{10}$$

Рассмотрим теперь вместо равномерного симметричное квазинормальное степенное распределение, сосредоточенное на отрезке $[0;b]$ (рис. 4). Плотность вероятностей для семейства таких распределений задается в виде:

$$\rho(x) = \begin{cases} kx^{\beta} & \text{при } 0 \le x \le b/2, \\ k(b-x)^{\beta} & \text{при } b/2 \le x \le 1, \end{cases} \tag{11а}$$

где параметр β отвечает за остроту пика плотности. Коэффициент k находится из условия нормировки

$$\int_0^{b/2} \rho(x)dx = \frac{1}{2},$$

применив которое, получим:

$$\rho(x) = \begin{cases} 2^{\beta}\dfrac{\beta+1}{b}\left(\dfrac{x}{b}\right)^{\beta} & \text{при } 0 \le x \le b/2, \\ 2^{\beta}\dfrac{\beta+1}{b}\left(1-\dfrac{x}{b}\right)^{\beta} & \text{при } b/2 \le x \le 1. \end{cases} \tag{11б}$$

При $\beta = 0$ в (11а,б) получается равномерное распределение, а при $\beta \to \infty$ плотность (11а,б) вырождается в δ-функцию, и вероятность того, что спрос всех клиентов окажется на уровне $b/2$, стремится к единице.

Квазинормальная плотность распределения (11а,б) технически удобна – для нее удается аналитически вычислять все необходимые интегралы в (6)–(9).

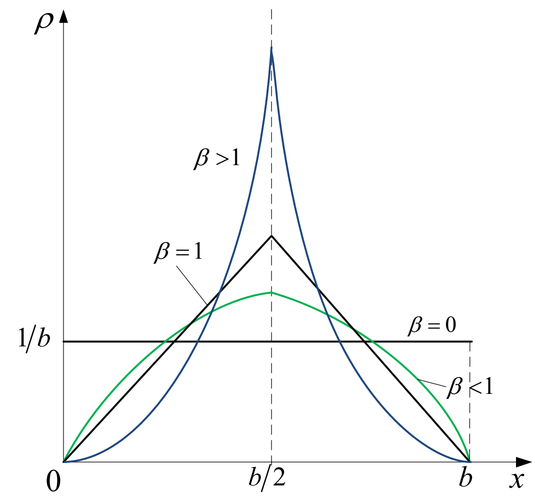


Рис. 4. Семейство степенных функций плотности вероятности (11б)

Следуя (7), найдем спрос X генеральной совокупности для семейства распределений (11б). Разобьем интеграл (7) на два: $X/N = A_1 + A_2$, где

$$A_1 \doteq \int_0^{b/2} x dF(x) = \int_0^{b/2} x\rho(x)dx \text{ и } A_2 \doteq \int_{b/2}^{b} x\rho(x)dx.$$

Не приводя подробного хода вычисления при подстановке функции (11б) в подынтегральные части, запишем сразу конечный результат для X:

$$X = \frac{1}{2}bN,\ \forall \beta. \tag{12}$$

Полный объем покупок X оказался не зависящим от параметра β распределения. Результат (12) справедлив для любого симметричного распределения на отрезке $[0;b]$.

Действительно, выражение (7) по смыслу является математическим ожиданием случайной величины x, которое в случае симметричного распределения ($\rho(x) = \rho(b-x)$) будет равно:

$$\frac{X}{N} = \int_0^b x\rho(x)dx = \int_0^{b/2} x\rho(x)dx + \int_{b/2}^{b} x\rho(x)dx =$$

$$= \int_0^{b/2} x\rho(x)dx + \int_0^{b/2} \overbrace{(b-h)}^{x}\rho(b-h)dh =$$

$$= \int_0^{b/2} x\rho(x)dx + \int_0^{b/2} b\,\overbrace{\rho(b-h)}^{=\rho(h)}dh -$$

$$- \int_0^{b/2} h\,\overbrace{\rho(b-h)}^{=\rho(h)}dh = b\int_0^{b/2}\rho(h)dh = \frac{b}{2},$$

что соответствует (12).

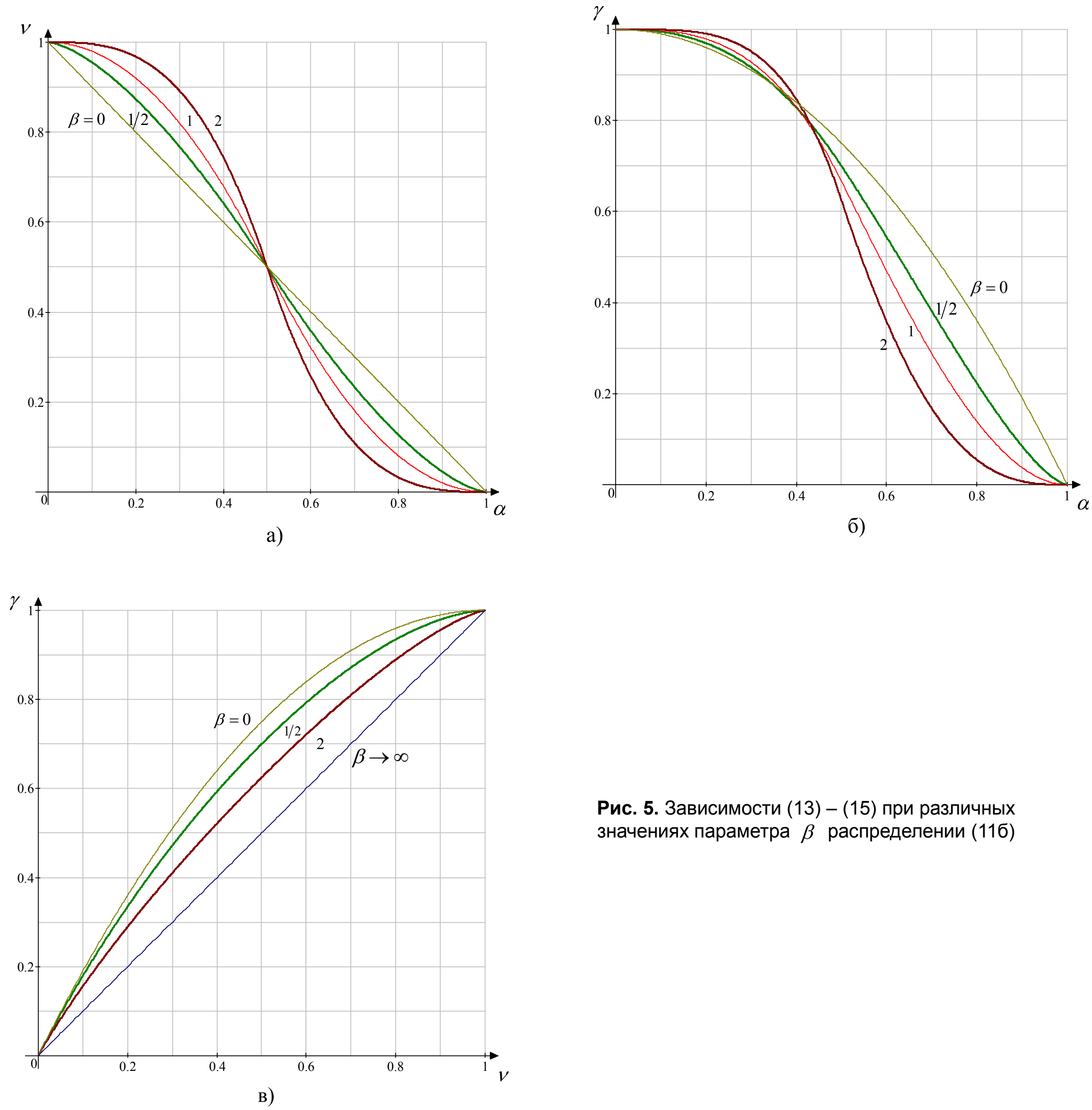


Рис. 5. Зависимости (13) – (15) при различных значениях параметра β распределении (11б)

Распределение (11а,б) является кусочно-гладким, поэтому численность n выборки клиентов, спрос которых превышает a, будет зависеть от параметра $\alpha \doteq \dfrac{a}{b}$ также «кусочным» образом (рис. 5а):

$$\nu(\alpha) \doteq \frac{n(\alpha)}{N} = \begin{cases} 1 - 2^{\beta}\alpha^{\beta+1} & \text{при } 0 \le \alpha \le 1/2, \\ 2^{\beta}(1-\alpha)^{\beta+1} & \text{при } 1/2 \le \alpha \le 1. \end{cases} \qquad (13)$$

Зависимость (13) непрерывна всюду (в том числе и в точке стыка $\alpha = 1/2$), удовлетворяет краевым условиям $\nu(0) = 1$ и $\nu(1) = 0$, а при $\beta = 0$ совпадает с формулой для ν из (10).

Доля γ объема X_I покупок выборки I от объема X покупок генеральной совокупности после проведения расчетов согласно формулам (9), (11б) принимает вид (рис. 5б):

$$\gamma(\alpha) \doteq \frac{X_I(\alpha)}{X} = \begin{cases} 1-2^{\beta+1}\dfrac{\beta+1}{\beta+2}\alpha^{\beta+2} \\ \quad \text{при } 0 \le \alpha \le 1/2, \\ 2^{\beta+1}(1-\alpha)^{\beta+1}\left(1-\dfrac{\beta+1}{\beta+2}(1-\alpha)\right) \\ \quad \text{при } 1/2 \le \alpha \le 1. \end{cases} \quad (14)$$

Функция (14), как и (13), всюду непрерывна и удовлетворяет краевым условиям $\gamma(0)=1$, $\gamma(1)=0$.

Получим еще зависимость величины коэффициента γ пересчета от относительного размера ν выборки. Для этого выразим параметр α в (13) через ν и β и подставим результат в (14):

$$\gamma(\nu) = \begin{cases} 1-2^{\frac{1}{\beta+1}}\dfrac{\beta+1}{\beta+2}(1-\nu)^{\frac{\beta+2}{\beta+1}} \\ \text{при } 1/2 \le \nu \le 1 \ (0 \le \alpha \le 1/2), \\ 2\nu\left(1-\dfrac{\beta+1}{\beta+2}2^{-\frac{\beta}{\beta+1}}\nu^{\frac{1}{\beta+1}}\right) \\ \text{при } 0 \le \nu \le 1/2 \ (1/2 \le \alpha \le 1). \end{cases} \quad (15)$$

Зависимости (13) – (15) показаны на рис. 5, а – в. Функции (13), (14) имеют вид логистических кривых, а функции (15) – степенных.

Таким образом, если *точно* известен вид распределения клиентов по объему совершаемых покупок, т. е. коэффициент β, то *точно* зная будущий спрос X_I крупнейших клиентов на один шаг вперед и предполагая, что общее количество клиентов останется неизменным, можно *точно* спрогнозировать суммарный будущий спрос X.

Предположим, что коэффициент β, определяющий вид распределения известен точно, но опрашиваемые клиенты дают неточную, диапазонную оценку своего спроса. Тогда оценка совокупного спроса, будет определяться также диапазонно [1]:

$$[\underline{y};\overline{y}] \doteq Y = \frac{1}{\gamma}Y_I = \frac{1}{\gamma}\sum_{i\in I(-1)} Y_i = \frac{1}{\gamma}\sum_{i\in I(-1)}[\underline{y}_i;\overline{y}_i] = \sum_{i\in I(-1)}\left[\frac{\underline{y}_i}{\gamma};\frac{\overline{y}_i}{\gamma}\right] = \left[\sum_{i\in I(-1)}\frac{\underline{y}_i}{\gamma};\ \sum_{i\in I(-1)}\frac{\overline{y}_i}{\gamma}\right]. \quad (16)$$

В соответствии с принятым правилом осреднения (3), можно дать точечную оценку y совокупного спроса (16):

$$y = \frac{1}{\gamma}y_I = \frac{1}{\gamma}\sum_{i\in I} y_i,$$

которая, впрочем, тоже не точна.

Найдем далее для нее доверительный интервал $[y_1; y_2]$. Согласно подходу к оценке доверительных интервалов, принятому в практике анализа временных рядов [5], среднеквадратичная ошибка

$$\sigma_i(t) = \left[\frac{1}{T_i}\sum_{t<0}\left[x_i(t)-y_i(t)\right]^2\right]^{1/2}, \quad (17)$$

упомянутая в (4), является хорошей мерой для определения границ интервалов с высокой надежностью. Если случайная величина, например, объем покупок каждого клиента, подчиняется нормальному распределению, то известно, что ширина доверительного интервала, равная четырем среднеквадратичным ошибкам дает 95 %-ную уверенность, что будущий спрос клиента не выйдет за пределы этого интервала.

Покажем, что и для квазинормального распределения (11б), с любым параметром β вероятность непопадания в 4σ-интервал также оказывается низкой – не выше 6 %. (рис. 6).

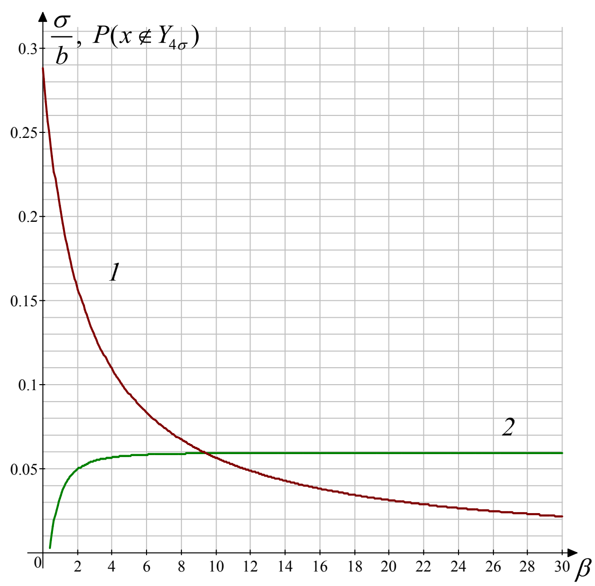


Рис. 6. Зависимость от параметра β распределения (11б): относительной ширины σ/b доверительного полуинтервала (кривая *1*); вероятности непопадания случайной величины в 4σ-интервал (кривая *2*)

Среднеквадратичное отклонение при большом количестве наблюдений оказывается равным корню квадратному из дисперсии случайной величины, которая в случае распределения (11б) вычисляется следующим образом:

$$D(x) = M(x^2) - \left(M(x)\right)^2 = \\ = \int_0^b x^2 \rho(x)dx - \left[\int_0^b x\rho(x)dx\right]^2 = \\ = \frac{b^2}{2(\beta+2)(\beta+3)}.$$

Не теряя общности рассуждений, будем полагать, что среднеквадратичное отклонение и среднеквадратичная ошибка совпадают и тогда 4σ-интервал равен четырем корням квадратным из дисперсии.

Из рис. 6 видно, что при малых значениях β ширина 4σ-интервала может не сильно отличаться от длины всего отрезка $[0;b]$, и тогда применение доверительных интервалов в управлении не приведет к увеличению итоговой гарантирующей оценки прибыли. Если же распределение случайной величины оказалось таким, что, например, $\beta > 2$, то используемая здесь техника прогнозирования позволяет существенно сузить область принимаемой реализации случайной величины – возмущения, пойдя на незначительный (до 6 %) риск, что в итоге улучшит оценку прибыли базы.

Таким образом, планируя будущую поставку, база может ориентироваться на следующую интервальную оценку совокупного предстоящего спроса:

$$[y_1; y_2] = \frac{1}{\gamma}\sum_{i\in I(-1)}[y_i - 2\sigma_i; y_i + 2\sigma_i] = \\ = \left[\frac{1}{\gamma}\sum_{i\in I(-1)} y_i - 2\sigma_i; \frac{1}{\gamma}\sum_{i\in I(-1)} y_i + 2\sigma_i\right], \tag{18}$$

где, согласно (3) и (17),

$$\sigma_i(t) = \left(\frac{1}{T_i}\sum_{t<0}\left(x_i(t) - \lambda_i \underline{y}_i(t) - (1-\lambda_i)\overline{y}_i(t)\right)^2\right)^{1/2}.$$

2.3. Идентификация коэффициента пересчета спроса опрашиваемой группы на спрос генеральной совокупности. В действительности распределение клиентов по объему совершаемых покупок может быть известно лишь примерно и тогда вид зависимости $\gamma(\nu)$ необходимо аппроксимировать некоторой функцией. Если распределение близко к равномерному, то можно принять квадратичную аппроксимацию зависимости $\gamma(\nu)$:

$$\gamma(\nu) = \gamma_0 + c(\nu - \nu_0) - e(\nu - \nu_0)^2, \\ \gamma_0, \nu_0, c, e = \text{const} > 0. \tag{19}$$

Для определения параметров этого приближения используем естественные краевые условия:

$$\gamma(\nu_0) = \gamma_0,\ \gamma(1) = 1,\ \gamma'(1) = 0,$$

применив которые вместе к (19), получим:

$$c = \frac{2(1-\gamma_0)}{1-\nu_0},\ e = \frac{1-\gamma_0}{(1-\nu_0)^2},$$

$$\gamma(\nu) = \gamma_0 + \frac{1-\gamma_0}{(1-\nu_0)^2}\left[2(\nu-\nu_0)(1-\nu_0) - (\nu-\nu_0)^2\right]. \tag{19a}$$

Оставшийся параметр γ_0 находится на каждом этапе приближенно, с помощью, например, метода наименьших квадратов:

$$\frac{1}{T}\sum_{t=-T}^{-1}\left[\gamma\left(\nu(t),\gamma_0\right) - \left(\gamma(t)\right)\right]^2 \Rightarrow, \\ \Rightarrow \min \text{ по } \gamma_0 \in (0;1) \tag{20}$$

где $\gamma(t) \doteq X_I(t)/X(t)$.

Как видно из рис. 5,в, построенного для квазинормального распределения (11б), квадратичная аппроксимация (19) весьма хороша. Кривые $\gamma(\nu)$ при разных значениях β расположены достаточно близко к кривой с $\beta = 0$, отвечающей равномерному распределению. Даже сильно отстоящие от кривой с $\beta = 0$ зависимости ненамного изменяют уровень $\gamma(\nu)$ по сравнению с равномерным распределением, притом что на практике распределения, сосредоточенные в очень узкой области, которые отвечают большим значеним β, встречаются нечасто.

Можно определить максимально возможную ошибку в определении параметра пересчета $\gamma(\nu)$ в случае неточного задания параметра β в (11б). Для этого вычислим максимальную разность $\overline{\Delta}_\gamma$ двух значений γ, получающихся при разных значениях β:

$$\overline{\Delta}_\gamma = \max_{\nu\in(0;1)}\max_{\beta_1,\beta_2\in[0;\infty)}\left|\gamma(\nu,\beta_1) - \gamma(\nu,\beta_2)\right| = \\ = \max_{\nu\in(0;1)}\left|\gamma(\nu,\beta_1)_{\beta_1=0} - \gamma(\nu,\beta_2)_{\beta_2\to\infty}\right| = \\ = \max_{\nu\in(0;1)}\left|\nu(2-\nu) - \nu\right| = 1/4.$$

В то же время, если число опрашиваемых клиентов мало́ (а значит сравнительно мало́ и X_I), то даже незначительная вариация значения γ, приводит к существенному расхождению в прогнозируемом уровне X. В этой ситуации, когда оценка совокупного спроса оказывается существенно зависимой от небольшого изменения параметра β, квадратичная аппроксимация (19) даст заметную погрешность, и параметр β требует отдельной идентификации. Наиболее удобно попытаться установить «истинное» значение β опять с помощью статистической аппроксимации, минимизируя среднеквадратичное отклонение:

$$\frac{1}{T}\sum_{t=-T}^{-1}[\nu(\alpha(t),\beta)-\nu(t)]^2 \Rightarrow \min \text{ по } \beta \geq 0, \quad (21)$$

где $\nu(\alpha(t),\beta)$ рассчитывается по формуле (13), а $\nu(t) \doteq n(t)/N(t)$.

Для обоих способов аппроксимации, и для квадратичной (19а), (20), и для квазинормальной (14), (21) существуют также ошибки применения самих моделей. Поскольку коэффициент пересчета γ является функцией от числа опрошенных клиентов ν (или от параметра α), то и ошибка σ_γ величины γ должна зависеть от того же аргумента. В качестве такой ошибки σ_γ выберем опять среднеквадратичное отклонение, т. е. корень квадратный из выражения (20) для квадратичной аппроксимации, или из выражения

$$\frac{1}{T}\sum_{t=-T}^{-1}\left[\gamma\left(\nu(t),\beta\right)-\left(\gamma(t)\right)\right]^2, \ \gamma(t) \doteq X_I(t)/X(t)$$

для квазинормальной аппроксимации.

Ввиду вышесказанного, запись оценочного интервала (18) совокупного спроса следует заменить на

$$[y_1; y_2] =$$
$$= \left[\frac{1}{\gamma+2\sigma_\gamma}\sum_{i\in I(-1)} y_i - 2\sigma_i \ ; \ \frac{1}{\gamma-2\sigma_\gamma}\sum_{i\in I(-1)} y_i + 2\sigma_i\right]. \quad (18а)$$

3. Оптимизация затрат на прогнозирование возмущений в схеме сочетания опросного и статистического методов

Как и в предшествующей статье [2], база имеет целью увеличение гарантированной прибыли за счет дополнительных затрат на прогнозирование возмущений, которое осуществляется согласно рассмотренному выше подходу. В распоряжении есть только программные управления:

u – объем поставки товара, заказываемой в конце одного цикла функционирования базы и осуществляемой в начале следующего цикла,

a – устанавливаемый в начале нового цикла уровень опрашиваемости (представительности) клиентов, т. е. уровень покупок, начиная с которого клиента относят к группе I и затем опрашивают.

В качестве возмущений выступают объем фактических продаж ξ, а также, вообще говоря, относительное число ν клиентов, которых предстоит опросить.

Как и ранее, будем предполагать, что база обязуется полностью удовлетворить спрос, т. е. должно выполняться ограничение $u \geq \xi$. Также важно и ограничение сверху на устанавливаемый уровень a представительности клиентов: $0 \leq a \leq a_0 = \text{fix}$, что отражает ограниченные возможности проведения опросов персоналом базы.

Априорная информация о возмущениях зависит от результатов опросов и проведения статистической обработки и представляется в виде системы двойных неравенств:

$$\underline{x}(a) = \text{fix} \leq \xi \leq \overline{x}(a) = \text{fix},$$
$$\underline{\nu}(a) = \text{fix} \leq \nu \leq \overline{\nu}(a) = \text{fix}.$$

Границы диапазонов спроса ξ и относительной численности ν опрашиваемых клиентов прогнозируются по идентифицированному показателю β в плотности распределения числа клиентов по объему покупок, а случайные величины ξ и ν считаются независимыми.

Максимизируемым критерием качества является прибыль

$$F = c_1\xi - c_2 u - c_3\nu - c_4(u-\xi), \quad (22)$$

где $c_1\xi$ – выручка от фактических продаж в объеме ξ по цене c_1,

$c_2 u$ – плата за поставку товара в объеме u по цене $c_2 < c_1$,

$c_3\nu$ – расходы на проведение опроса ν-й доли всех клиентов (где c_3 – затраты на опрос всех N клиентов),

$c_4(u-\xi)$ – затраты на утилизацию по цене c_4 нераспроданного товара в объеме $(u-\xi) \geq 0$.

По аналогии с решенными примерами из п. 3 и п. 5 в [2], найдем гарантированную оценку прибыли:

$$\varphi(a) \doteq \max_{u\in U^0} \min_{\substack{\xi\in[\underline{x};\overline{x}] \\ \nu\in[\underline{\nu};\overline{\nu}]}} F(u,\xi,\nu) = \\ = (c_1+c_4)\underline{x}(a) - (c_2+c_4)\overline{x}(a) - c_3\overline{\nu}(a), \quad (23)$$

при

$$u_{\text{opt}} = \overline{x}(a),$$

где

$$U^0 = \{u \equiv \text{const} : \forall \xi \in [\underline{x}; \overline{x}] \;\; u \geq \xi\} = \\ = \{u : u \geq \max_{\xi \in [\underline{x}; \overline{x}]} \xi = \overline{x}\}$$

– множество гарантированно допустимых планов поставки.

Результат (23) требуется максимизировать по уровню опрашиваемости a:

$$\varphi^* = \max_{0 \leq a \leq a_0} \varphi(a). \tag{24}$$

Аналитически, оптимизация не дает однозначного ответа, поскольку при задании $\underline{x}(a)$ и $\overline{x}(a)$ согласно формуле (18), требуется задавать уровень ошибки прогноза спроса для каждого опрашиваемого клиента. Так, принятие ошибки пропорциональной уровню спроса клиента

$$\sigma(x_i) = \sigma_0 \frac{x}{b}, \;\; \sigma_0 = \sigma(b)$$

приводит к независящим от уровня опрашиваемости a оценкам возмущений:

$$\underline{x}(a) = \frac{\sum_{i=1}^{[N\nu(a)]} \left(y_i - 2\sigma_i\right)}{\gamma(a)} \approx \\ \approx \frac{\int_a^b \left(x - 2\sigma_0 \frac{x}{b}\right) \rho(x) dx}{\gamma(a)} = \frac{b}{2} - \sigma_0, \tag{25}$$

и оптимальное число опрашиваемых клиентов равно $\nu(a_0)$ (поскольку в (24) $a_{\text{opt}} = a_0$).

Результат (25) не зависит также и от параметра β, который может быть задан не точным, а принадлежащим идентифицированному интервалу $[\underline{\beta}; \overline{\beta}]$.

Попытка представления зависимости ошибки индивидуального прогноза от размера покупки в другом виде, приводят к громоздким формулам, из которых аналитически трудно однозначно сказать, имеет ли функция $\underline{x}(a)$ внутреннюю точку максимума, что было бы желаемым свидетельством возможности улучшения гарантированной оценки (23) за счет увеличения количества опрашиваемых клиентов.

Если учитывать в (25) поправку на ошибку σ_γ, которую положим постоянной для любого уровня опрашиваемости a, то можно сказать о следующей качественной особенности зависимости $\underline{x}(a)$: при малых уровнях a чувствительность оценки $\underline{x}(a)$ к вариации коэффициента γ, связанной с ошибкой его вычисления, оказывается выше, чем при высоких уровнях a.

Для получения конкретных оценок границ совокупного спроса, обратимся к имитационным экспериментам.

4. Имитационное моделирование задачи планирования поставки

Вычислительная составляющая настоящей работы состоит в компьютерном моделировании рассматриваемой в п. 3 схемы уточнения прогноза для описанного примера планирования поставки. Имитационный эксперимент предназначен для проверки пригодности методов идентификации параметров, а также для исследования особенностей примера и рассматриваемого подхода к уточнению прогноза возмущений.

Модель построена в программной среде MS Excel 2007. Для расчета использовались встроенные функции электронных таблиц и возможности статистического пакета Minitab. Все переменные в модели случайны или формируются и рассчитываются на основе случайных данных, что значительно уменьшает элемент субъективности при имитации.

Чтобы неоправданно не усложнять модель, некоторые несущественные детали из описания примера из п.1 опущены: общее число клиентов взято неизменным, группа опрашиваемых клиентов формируется на основании уровня опрашиваемости и прошлого фактического спроса, неудовлетворенные клиенты явно не отражены в модели.

4.1. Описание модели. Для более правдоподобной иллюстрации хотелось бы, чтобы клиенты были максимально дифференцированы по уровню спроса (крупные, средние, мелкие) и давали индивидуальные, неповторяющиеся во времени оценки своего спроса. В модели это достигается следующим образом. Каждый клиент характеризуется некоторым интервалом допустимых покупок, формируемым вокруг уровня условного среднего спроса $\tilde{x}_i$, распределенного между клиентами по заданному закону распределения $F_{\tilde{X}}$. Полуширина Δ_i этого интервала пропорциональна размеру средних покупок $\tilde{x}_i$ со случайным коэффициентом пропорциональности $1/h_i$, где величина h_i равномерно распределена на отрезке $[h_1; h_2]$.

Нижняя $\underline{y}_i(t)$ и верхняя $\overline{y}_i(t)$ собственные оценки спроса i-го клиента заданы для каждого этапа случайными величинами, равномерно распределенными на отрезках $[\tilde{x}_i - \Delta_i; \tilde{x}_i]$ и $[\tilde{x}_i; \tilde{x}_i + \Delta_i]$ соответственно:

$$\rho_1(\underline{y}_i) = 1/\Delta_i\,,\ \tilde{x}_i - \Delta_i \le \underline{y}_i \le \tilde{x}_i\,, \qquad (26)$$

$$\rho_1(\overline{y}_i) = 1/\Delta_i\,,\ \tilde{x}_i \le \overline{y}_i \le \tilde{x}_i + \Delta_i\,.$$

Внутри оценочного диапазона $[\underline{y}_i; \overline{y}_i]$ на каждом шаге формируется значение x_i фактического спроса, распределенное по степенному закону на отрезке $[\underline{y}_i; \overline{y}_i]$ с показателем степени $\theta > 0$:

$$\rho_2(x_i) = \begin{cases} \dfrac{\beta+1}{\overline{y}_i - \underline{y}_i}\left(\dfrac{x_i - \underline{y}_i}{\overline{y}_i - \underline{y}_i}\right)^{\theta}, \ \underline{y}_i \le x_i \le \overline{y}_i,\ i \in I^-, \\ \dfrac{\beta+1}{\overline{y}_i - \underline{y}_i}\left(\dfrac{\overline{y}_i - x_i}{\overline{y}_i - \underline{y}_i}\right)^{\theta}, \ \underline{y}_i \le x_i \le \overline{y}_i,\ i \in I^+, \end{cases} \qquad (27)$$

отражающему склонность данного клиента i к занижению (верхняя строка в (27)) или к завышению (нижняя строка в (27)) своих оценок при опросе.

Переменные для всех клиентов и всех этапов сгенерированы на основе массива случайных значений r, подчиняющихся равномерному распределению на отрезке $[0;1]$. Например, после подстановки случайного параметра r в функцию распределения, обратную функции распределения с плотностью (26):

$$\underline{y}_i = F_1^{-1}(r) = \tilde{x}_i - \Delta_i + r\Delta_i\,,$$

получается случайная величина, распределенная равномерно на отрезке $[\tilde{x}_i - \Delta_i; \tilde{x}_i]$, а при подстановке r в функцию распределения, обратную закону (27)

$$x_i = F_2^{-1}(r) = \begin{cases} \underline{y}_i + (\overline{y}_i - \underline{y}_i) r^{\frac{1}{\theta+1}},\ i \in I^-, \\ \overline{y}_i - (\overline{y}_i - \underline{y}_i)(1-r)^{\frac{1}{\theta+1}},\ i \in I^+, \end{cases}$$

получается случайная величина, распределенная по степенному закону (27) на отрезке $[\underline{y}_i; \overline{y}_i]$.

Для эксперимента изначально установлены следующие предпосылки:

- количество шагов функционирования базы взято равным $T = 11$;
- суммарное число клиентов взято равным $N = 110$;
- средний спрос клиентов распределен нормально с параметрами $M_{\tilde{X}} = 50$ и $\sigma_{\tilde{X}} = 25$, что устанавливает максимальный уровень покупок $b \approx 100$;
- границы случайного коэффициента, влияющего на ширину области допустимых покупок, заданы на уровне: $h_1 = 3$, $h_2 = 7$, что позволяет каждому клиенту оперировать покупками и оценками в весьма широком диапазоне, но в то же время сохраняет прослеживаемую дифференциацию клиентов по объемам спроса;
- принято, что половина опрашиваемых клиентов систематически завышает свою оценку, а половина – занижает;
- параметр $\theta > 0$ степенного распределения для клиентов, недооценивающих и переоценивающих свой спрос задан гибким и может свободно варьироваться без перенастройки модели;
- минимальное количество опрашиваемых клиентов ν_0 как соответствующий параметр в аппроксимации (19) задан гибким;
- для каждого шага можно устанавливать уровень опрашиваемости a или относительное количество $\nu(t)$ опрашиваемых клиентов.

4.2. Расчеты по модели и выводы из имитационного эксперимента. После генерации оценок спроса и фактических объемов для каждого клиента на каждом шаге была проведена идентификация параметра λ_i согласно формуле (4). Среднеквадратичная ошибка (17) после небольших колебаний на начальных шагах, приобретает устойчивую тенденцию к уменьшению ближе к последним тактам, по мере накопления отчетных данных. Это естественно, поскольку индивидуальный спрос подчиняется определенному закону распределения, который стационарен.

По абсолютному уровню опрашиваемости a восстанавливается относительное число ν опрашиваемых клиентов и вычисляется относительная величина $\alpha = a/b$. Далее, для оценки совокупного спроса по опросным интервальным оценкам двумя способами идентифицируется коэффициент пересчета γ. Первый вариант расчета состоит в квадратичной аппроксимации (19) с предварительной идентификацией параметра γ_0 согласно (20). От свободно назначаемого параметра ν_0 итог не зависит: при изменении ν_0 соответствующим образом меняется идентифицируемый параметр γ_0, и результат расчета γ остается прежним.

Второй вариант расчета производится в предположении квазинормального распределения клиентов по объему покупок по формуле (14) или (15) с предварительной идентификацией параметра β распределения (11б). Параметр β находится методом наименьших квадратов из уравнения линейной регрессии, полученного из (13) преобразованием логарифмирования.

Верхние и нижние оценки совокупного спроса для обоих вариантов идентифицированного коэффициента пересчета γ находятся в соответствии с предположениями (19), (19а). Какая-нибудь из границ $y_i \pm 2\sigma_i$ индивидуальной оценки может выходить за пределы изначально заданного оценочного диапазона $[\underline{y}_i;\overline{y}_i]$, поэтому формула (18) применяется с поправкой:

$$[y_1;y_2]= \left[\frac{1}{\gamma}\sum_{i\in I}\max\{y_i-2\sigma_i;\underline{y}_i\};\ \frac{1}{\gamma}\sum_{i\in I}\min\{y_i+2\sigma_i;\overline{y}_i\}\right]. \quad (28)$$

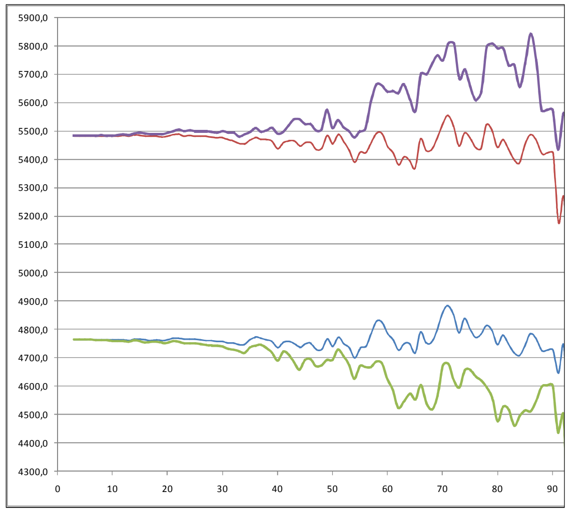
Для формулы (18а) поправки числителя аналогичны:

$$[y_1;y_2]=\left[\frac{1}{\gamma+2\sigma_\gamma}\sum_{i\in I}\max\{y_i-2\sigma_i;\underline{y}_i\};\ \frac{1}{\gamma-2\sigma_\gamma}\sum_{i\in I}\min\{y_i+2\sigma_i;\overline{y}_i\}\right]. \quad (29)$$

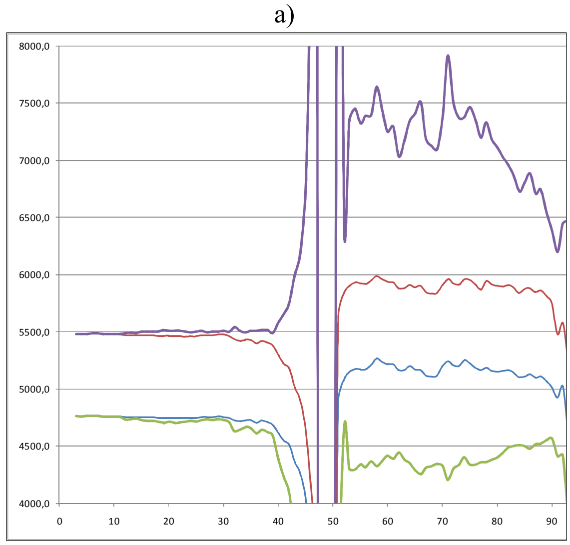
Изменялось с единичным шагом значение уровня опрашиваемости a, и для трех последних периодов в имитации вычислялся массив следующих величин: ν, α, γ по квадратичной и квазинормальной аппроксимации и соответствующие им значения σ_γ, y_1 и y_2. Было сделано несколько прогонок для различных начальных условий: для нормальных распределений клиентов по объему покупок с другими параметрами, для равномерного распределения, для разной точности оценочных интервалов, которая задается значением параметра h_i.

В итоге были рассчитаны оценки верхней и нижней границ совокупного спроса для последнего периода согласно формулам (28) и (29) с разным уровнем опрашиваемости (рис. 7). По оси абсцисс на графиках отложен абсолютный уровень опрашиваемости a, по оси ординат – размер совокупного спроса. Тонкие внутренние линии соответствуют оценке по формуле (28), толстые внешние – по формуле (29). Рис. 7,а соответствует оценке границ при квадратичной аппроксимации коэффициента γ, рис. 7,б – при квазинормальной.

Из графиков, построенных по формуле (29), видно, что с уменьшением уровня опрашиваемости a верхняя граница оценки совокупного спроса $y_2=\overline{x}(a)$ имеет тенденцию к уменьшению, а нижняя $y_1=\underline{x}(a)$ – к увеличению, что позволяет улучшить гарантированную оценку прибыли (23). На каком именно уровне a следует остановиться, зависит от соотношения цен $c_1,\ldots,c_4$ в (23), однако из эксперимента видно, что существует весьма отчетливая граница уровня $a\approx 30$, т. е. $\alpha\approx 0{,}3$, начиная с которой оценки границ выходят на «плато», и дальнейшее расширение опрашиваемой группы клиентов невыгодно даже при относительно низких расходах на опросы c_3.



а)



б)

Рис. 7. Зависимость оценок границ совокупного спроса от уровня опрашиваемости (*a*, *b*))

Заметим, что, совершая случайные колебания, при высоких уровнях a верхняя (нижняя) граница может достигнуть своего минимально (максимально) возможного уровня уже при небольшом количестве опрашиваемых клиентов. Однако эта особенность зависит от конкретной реализации эксперимента. Выход же оценок границ на «плато», при

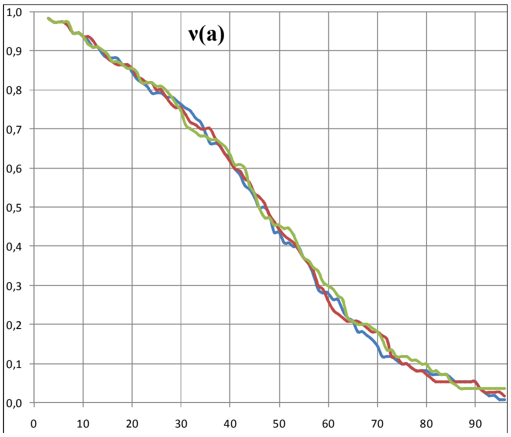
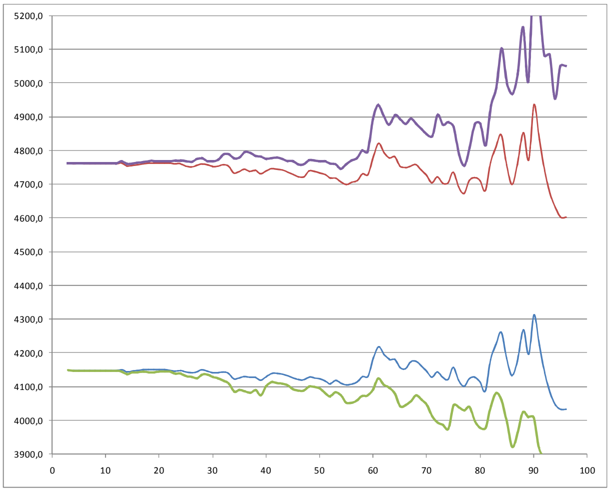
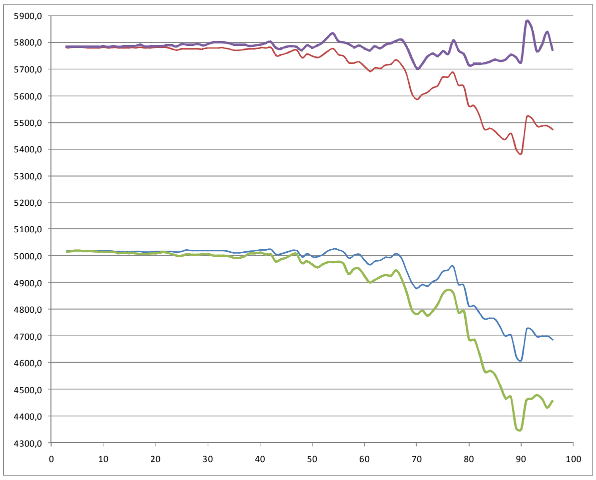


Рис. 8. Зависимость относительного числа опрашиваемых клиентов ν от уровня опрашиваемости a для трех последних тактов имитации



а)



б)

Рис. 9. Зависимость оценок границ совокупного спроса от уровня опрашиваемости a

некотором значении $a \le 40$ характерен для всех проведенных имитаций.

Квазинормальная аппроксимация (рис. 7,б) коэффициента пересчета γ дает при больших уровнях $a > 50$ намного более широкие границы интервала $[y_1; y_2]$, чем квадратичная аппроксимация. При $a < 40$ поведение линий на обоих графиках совпадает. Разрывы графиков на рис. 7,б примерно на середине всего отрезка возможных уровней a связаны с кусочным заданием распределения (11б) и наличием логарифмов в уравнении регрессии при идентификации параметра β.

Относительная численность опрашиваемой группы $\nu(a)$, как видно из рис. 8, носит вполне определенный характер, похожий на рис. 5,а. Относительный разброс значений $\nu(a)$ для трех последних периодов небольшой, поэтому разница между верхней $\overline{\nu}(a)$, нижней $\underline{\nu}(a)$ границами и самим расчетным значением $\nu(a)$ несущественна и детально не рассматривается.

Все вышесказанное оказалось справедливым и для других начальных установок в имитационном эксперименте. График на рис. 9,а сделан для клиентов, средний спрос которых распределен нормально с параметрами $M_{\tilde{X}} = 70$ и $\sigma_{\tilde{X}} = 50$, а график на рис. 9,б – для клиентов с равномерным на отрезке $[0;100]$ распределением среднего спроса. Во втором случае уменьшение уровня опрашиваемости позволило заметно улучшить лишь одну из границ возмущения – нижнюю, что, однако, также дает возможность для увеличения оценки гарантированной прибыли (23).

Таким образом, результаты имитационных экспериментов показывают, что для описанного примера планирования поставки экспертно-статистическая схема прогнозирования позволяет уменьшить размеры априорного множества возмущений, и тем самым увеличить оценку гарантированной прибыли. В отличие от абстрактной схемы из [2], в данном примере нельзя получить сколь угодно точный прогноз, просто увеличивая затраты на прогнозирование (на проведение опросов) – точность прогнозирования здесь оказывается асимптотически стабилизируемой на конечном уровне.

Заключение

На примере планирования поставки мелкооптовой базы для множества клиентов сформирована комбинированная, экспертно-статистическая, схема, позволяющая уточнять априорный прогноз возмущений. Изложение примера и его последующее решение оперирует как с переменными, характеризующими отдельно взятого клиента (эксперта), так и с генеральными переменными, относящимися к функционированию базы в целом. Статистическая часть схемы производит идентификацию отдельных параметров распределений и зависимостей за прошлое, а также расчет ошибок для этих идентификаций. Опросная часть схемы позволяет экстраполировать генеральные переменные на будущее.

В поставленной итоговой задаче максимизации оценки гарантированной прибыли выдвинуто предположение о том, что предложенная схема позволит сузить прогнозируемое множество возмущений. Для проверки этого предположения, а также для исследования работоспособности приближений в схеме уточнения, была сконструирована детальная компьютерная имитационная модель.

Серия проведенных экспериментов явно показала, что, несмотря на случайность индивидуальных уровней спроса, увеличение количества опрашиваемых клиентов приводит к желаемому сближению прогнозируемых границ множества возмущений. Этот результат позволяет надеяться на возможность увеличения априорной оценки итоговой прибыли. Оптимальный уровень опрашиваемости и соответствующая ему оценка итоговой прибыли могут быть рассчитаны при задаваемых покупной и продажной ценах и известной функции затрат на опросы из дальнейших имитационных экспериментов, которые могут стать предметом будущих исследований.

Литература

1. *Алефельд Г., Херцбергер Ю*. Введение в интервальные вычисления. Пер. с англ. М.: Мир, 1987.
2. *Гасников И. В., Токарев В. В.* Оптимизация точности априорного прогнозирования возмущений в задачах гарантирующего управления // Автоматика и телемеханика. 2013.
3. *Гермейер Ю. Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
4. *Давыденко А. В.* Модели и методы комбинированного прогнозирования спроса на продукцию фирмы/ Автореферат: СПб, 2008.
5. *Лукашин Ю. П.* Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. М.: Финансы и статистика, 2003.
6. *Прасолов А. В., Хованов Н. В.* О прогнозировании с использованием статистических и экспертных методов // Автоматика и телемеханика. 2008. № 6 С. 129–142.
7. *Токарев В. В.* Методы оптимальных решений. Т.2. Многокритериальность, динамика, неопределенность. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
8. *Bates J. M., Granger C. W. J.* (1969). The combination of forecasts // Operational Research Quarterly. 1969. 20 (№ 4). P. 451–467.
9. *Clemen Robert T.* (1989). Combining forecasts: a review and annotated bibliography // International Journal of Forecasting. Vol. 5, P. 559–583.
10. *Kenneth F. Wallis*. (2005). Combining density and interval forecasts: a modest proposal // Oxford bulletin of economics and statistics. 67. P. 983–994.
11. *Timmermann Allan G.* (2005). Forecast Combinations // CEPR Discussion Paper No 5361.
12. CEPR Discussion Paper No 5361.

Гасников Игорь Вячеславович. Консультант департамента производственно-экономического консалтинга ЗАО «Ай-Эс-Джи Консалтинг». Окончил МФТИ в 2011 г. Количество печатных работ: 2. Область научных интересов: математическое моделирование социальных и экономических процессов, методы прогнозирования. E-mail: igasnikov@gmail.com

Токарев Владислав Васильевич. Гл. н. с. Окончил МФТИ в 1960г. Д. ф.-м. н., профессор. Количество печатных работ: 125. Область научных интересов: системный анализ, математическое моделирование социальных и экономических процессов. E-mail: igasnikov@gmail.com