Восстановление распределений вероятностей на основе наблюдаемых обобщенных моментов в приложении к ценообразованию опционов

Е. Ю. Шкловский

Аннотация: В работе рассматриваются вопросы оценки производных финансовых инструментов и проблемы восстановления вероятностных распределений случайных процессов на основе опционов. Цены на производные финансовые инструменты выдают ожидания участников рынка о будущем поведении базового актива. Другими словами, в них заложена информация о подразумеваемой плотности распределения базового актива. Приводится обзор параметрических и непараметрических методов восстановления плотности и дается их качественный анализ.

Ключевые слова: *восстановление распределения вероятностей, энтропия, непараметрические методы оценивания, опционы.*

Введение

Теория оценки производных финансовых инструментов представляет собой интересную математическую теорию, которая возникла на стыке теории краевых задач для уравнений с частными производными, вычислительной математики и теории случайных процессов. Главным объектом ее исследования является производный финансовый инструмент (дериватив), представляющий собой контракт права и обязанности сторон по которому некоторым образом зависят от базового актива. В качестве такого актива могут выступать ценные бумаги, курсы иностранных валют, процентные ставки, биржевые индексы и т. п. Так как стоимость производных финансовых инструментов определяется поведением базового актива, то они не имеют своей фундаментальной стоимости, а оценивание их справедливой стоимости тесно связано с изучением базового актива.

Одним из примеров производного финансового инструмента является опцион. Опцион это контракт, по которому его покупателю предоставляется право приобрести (или продать) базовый актив в определенный срок по заранее оговоренной цене при реализации в будущем оговоренных условий на цену базового актива. Так как многие вопросы оценки справедливой стоимости производных финансовых инструментов сводятся к вопросу оценки стоимости опционов, то опционы в этой теории играют особую роль.

В зависимости от условий исполнения среди опционов выделяют бермудские, американские и европейские опционы. Обладатель американского опциона может его исполнить в любой момент до истечения срока контракта, бермудский опцион также может исполняться до истечения срока контракта, но только в заранее оговоренные моменты времени. Наиболее простым и самым распространенным является европейский опцион, который может быть исполнен только в момент истечения срока контракта. В данной статье мы остановимся на анализе европейских опционов.

Рассмотрим европейский опцион на покупку (опцион колл). Приобретая данный опцион по цене c, его обладатель имеет право в будущем купить определенное количество базового актива у продавца опциона по заранее оговоренной цене, называемой ценой исполнения или ценой страйк, которую будем обозначать K. Пусть в момент покупки опциона t рыночная цена базового актива была x_t, а в момент исполнения T она стала x_T. Тогда, если $x_T > K$, то владельцу опциона выгодно реализовать свое право и купить у продавца опциона базовый актив по цене ниже рыночной. Прибыль обладателя опциона будет равняться разнице между рыночной ценой базового актива и ценой исполнения за вычетом стоимости опциона, то есть $x_T - K - c$. Если же $x_T \leq K$, то покупателю не выгодно реализовывать опцион, и его убыток равен размеру уплаченной за

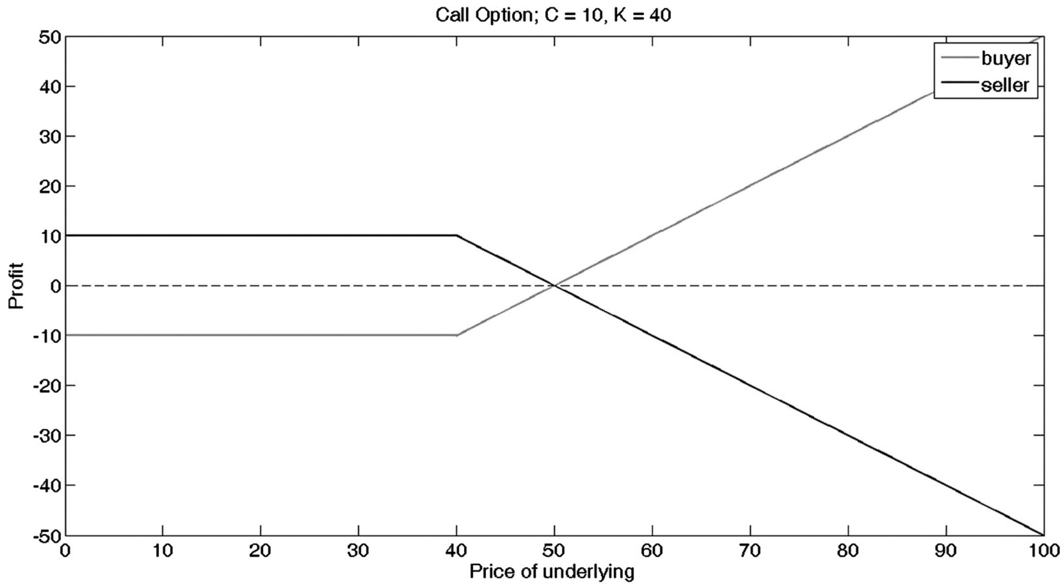

Рис. 1. Доход продавца и покупателя колл опциона в зависимости от цены базового актива в момент исполнения

опцион премии c. Величина прибыли продавца опциона противоположна прибыли покупателя опциона. На рисунке показана зависимость прибыли покупателя и продавца колл опциона в зависимости от цены базового актива в момент исполнения.

Таким образом, выплата покупателю колл опциона в момент T равена:

$$p_i(x) = max(x_T - K, 0),$$

где x_T — цена базового актива в момент T, K — константа, называемая ценой исполнения.

Предположим, что в каждый момент времени t стоимость базового актива является случайной величиной X_t и задается функцией плотности распределения $f(x)$, тогда стоимость производного финансового инструмента зависит от этого распределения. Обычно цены на деривативы являются наблюдаемыми величинами, так как они свободно обращаются на финансовых рынках, как внебиржевых, так и на биржах. Тогда рассмотрим проблему нахождения плотности распределения $f(x)$ базового актива на основе цен на производные финансовые инструменты, которые будут выступать в роли ограничений. Далее такие ограничения будем называть обобщенными моментными ограничениями. Стоимость производного финансового инструмента будет выражаться как математическое ожидание функции выплат. Если положить, что стоимость денег не меняется или незначительно меняется во времени, то есть эффектом дисконтирования можно пренебречь, тогда эту зависимость запишем в следующем виде:

$$E[p_i(x)] = \int p_i(x)f(x)dx = c_i.$$

Здесь $p_i(x)$ – функции, задающие обобщенные моментные ограничения, $1 < \mathrm{i} < \mathrm{n}$. В приложении ценообразования опционов $p_i(x)$ представляют собой функции выплат, зависящие от будущей цены базового актива x. Как показано выше для опционов на покупку, $p_i(x) = \max(x_T - K, 0)$.

Таким образом, наблюдаемые цены на опционы выдают ожидания о будущем поведении базового актива, то есть задают подразумеваемую плотность $f(x)$. Слово «подразумеваемая» означает то, что плотность распределения отражает ожидания участников рынка, которые заложены в ценах опционов, а не объективное распределение случайной величины, описывающей базовый актив. Объективность распределения цены базового актива связана с реализовавшимися (наблюдаемыми) ценами актива, другими словами плотность может оцениваться исходя из временных рядов базового актива, либо через подразумеваемое распределение, которое извлекается из обобщенных моментных ограничений, например цен на торгуемые опционы.

1. Модель BSM

Основополагающей работой в области ценообразования опционов являются работы Блэка, Шоулза [(F. Black, M. Scholes, 1973)] и Мертона [(R. Merton, 1973)]. В 1997 году за методы оценки производных финансовых инструментов Мертон и Шоулз были удостоены Нобелевской премии по экономике. Для построения стохастического процесса, моделирующего динамику цены бездивидендного актива, авторы знаменитой модели основываются на гипотезе о постоянной ожидаемой доходности. Эта доходность не зависит от цены актива, что означает, что если X – случайная величина, задающая цену актива, то ожидаемая скорость дрейфа случайного процесса, описывающего динамику цены, равна μX, где μ – константа. Предположения о том, что изменчивость доходности за короткий интервал времени не зависит от цены и, о том, что стандартное отклонение цены актива за короткий период времени пропорционально самой цене, приводит к следующему стохастическому дифференциальному уравнению, описывающему динамику актива:

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma dW_t. \quad (\mathbf{1})$$

Здесь σ – константа, называемая волатильностью, W_t – винеровский случайный процесс, обладающий независимыми приращениями и описывающий эволюцию нормально распределенной случайной величины.

Важным результатом в области стохастических дифференциальных уравнений является лемма Ито. На ее основе показывается, что процесс, описывающий поведение случайной величины $F_t = log\, X_t$, подчиняется уравнению:

$$dF_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_t. \quad (\mathbf{2})$$

Процесс $log\, X_t$ является обобщенным винеровским процессом – процессом Ито с постоянными коэффициентами сноса μ и диффузии σ: $dX_t = \mu dt + \sigma dW_t$. Обобщенный винеровский процесс является марковским процессом, описывающим эволюцию нормально распределенной случайной величины. Это означает, что если в начальный момент времени переменная имела значение X_0, то в момент T она будет иметь нормальное распределение с математическим ожиданием $X_0 + \mu T$ и дисперсией $\sigma^2 T$. Из (2) следует, что

$$log \frac{X_T}{S_0} \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T, \sigma^2 T\right). \quad (\mathbf{3})$$

А решение уравнения (1) записывается в виде:

$$X_t = X_0\, exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right).$$

Таким образом, переменная X_t, описывающая поведение цены актива, имеет логнормальное распределение, а доходность актива $\frac{X_{t+1}}{X_t}$ имеет нормальное распределение.

С помощью леммы Ито выводится дифференциальное уравнение Блэка–Шоулза–Мертона [(J. C. Hull, 2012)]. Если g – цена некоторой производного финансового инструмента, основанного на базовом активе X_t, динамика которого описывается уравнением (1) : $\frac{\mathrm{dX_t}}{\mathrm{X_t}} = \mathrm{\mu dt + \sigma dW_t}$ и функция g удовлетворяет ограничениям из леммы Ито, тогда:

$$dg = \left[\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial X}\mu X + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}\sigma^2 X^2\right] dt + \frac{\partial g}{\partial X}\sigma X dW. (\mathbf{4})$$

Винеровские процессы, стоящие в правых частях (1) и (4), одни и те же, поэтому их можно «исключить», составив портфель из $\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{X}}$ базового актива и -1-го деривативa, то есть купить базовый актива в количестве $\frac{\partial g}{\partial X}$ и продать 1 дериватив. Предполагается, что актив является бесконечно делимым, другими словами, есть возможность купить любое количество базового актива, например $\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{X}}$. Стоимость такого портфеля:

$$\mathrm{R} = \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{X}}\mathrm{X} - \mathrm{g}.$$

Приращение стоимости портфеля на малом временном интервале dt таком, что на этом интервале $\frac{\partial g}{\partial X} = const$ равно

$$dR = \frac{\partial g}{\partial X} dX - dg.$$

Подставляя выражения (4) для dg и (1) для dX после преобразований получим:

$$dR = \left(-\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}\sigma^2 X^2\right) dt. \quad (\mathbf{5})$$

Так как полученное выражение не содержит случайной составляющей dW, то в течение короткого временного интервала dt данный портфель является безрисковым. Из условия безарбитражности, смысл которого состоит в том, что невозможно получить гарантированной доходности выше безрисковой процентной ставки, такой портфель должен обеспечивать доходность в точности равную безрисковой процентной ставке r, то есть должно выполняться равенство:

$$dR = rRdt. \quad (\mathbf{6})$$

Сравнивая (5) и (6) и подставляя стоимость портфеля, получаем:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + rX\frac{\partial g}{\partial X} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}\sigma^2 X^2 = rg. \quad (\mathbf{7})$$

Это уравнение называется дифференциальным уравнением Блэка – Шоулза – Мертона. Для определения цены конкретного производного инструмента g необходимого задать краевые условия. Например, для европейского колл опциона при t = T:

$$g = \max(S_T - K, 0),$$

для европейского опциона пут при t = T:

$$g = \max(K - S_T, 0).$$

Решение дифференциального уравнения для соответствующих граничных условий дает формулу оценки стоимости опциона.

Существует важный альтернативный способ получить формулу цены опциона, который предложили Росс и Кокс [(S. Ross, 1976)], [(J. Cox, S. Ross, 1976)]. В дифференциальное уравнение (7) входит текущая цена базового актива, время, волатильность цены, безрисковая процентная ставка, но не входят переменные, относящиеся к рисковым предпочтениям покупателей базового актива или деривативов. Поэтому, на решение этого уравнения рисковые предпочтения не влияют, и тогда можно предположить, что все инвесторы являются нейтральными к риску. Это означает, что доходность всех активов (включая и производные финансовые инструменты) должна быть равна безрисковой процентной ставке. Таким образом, «в мире» нейтральных к риску инвесторов, ожидаемая доходность базового актива μ должна совпадать с безрисковой процентной ставкой r. Справедливая цена деривατива (в отсутствии арбитража) равна дисконтированному по безрисковой процентной ставке ожидаемому доходу. В частности, стоимость колл опциона в момент t равна:

$$C_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^*[max(X_T - K, 0)] \quad (\mathbf{8})$$

где $\mathbb{E}^*$ – математическое ожидание в риск-нейтральных условиях. Первая фундаментальная теорема финансовой математики говорит о том, что существование эквивалентной мартингальной меры (риск-нейтральной плотности $f^*(X_T)$), в которой случайный процесс дисконтированной доходности базового актива является мартингалом эквивалентно условию отсутствия арбитража на рынке.

Через параметры логнормального распределения случайной величины X_T непосредственно вычисляется математическое ожидание случайной величины $max\,(X_T - K, 0)$, что и дает элегантный альтернативный вывод формулы Блэка–Шоулза. Показано, что если кроме того происходит непрерывная выплата дивидендов по базовому активу по ставке δ, то стоимость европейского колл опциона вычисляется по формуле:

$$C_t = X_t e^{-\delta_{t,\tau}\tau} N(d_1) - K e^{-r_{t,\tau}\tau} N(d_2), \quad (\mathbf{9})$$

$$d_1 = \frac{log\left(\frac{X_t}{K}\right) + \left(r_{t,\tau} - \delta_{t,\tau} + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau},$$

$$\tau = T - t.$$

N – интегральная функция распределения случайной величины со стандартным нормальным распределением:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy.$$

Процесс, моделирующий цену базового актива, содержит два параметра: μ и σ. Между этими двумя параметрами должна существовать связь, ведь базовый актив, приносящий большую доходность μ, должен характеризуются более высокими рисками, то есть волатильностью σ. Кроме того, величина доходности по базовому активу должна зависеть от процентных ставок в экономике. Однако стоимость производных ценных бумаг, как правило, не зависит от параметра μ, поэтому нет необходимости в его моделировании. А параметр σ, представляющий собой волатильность цены, наоборот, имеет большое значение для оценки многих деривативов. Формула (9) привлекательна своей простотой: цена опциона вычисляется на основе небольшого количества переменных. Модель Блэка–Шоулза–Мертона внесла неоценимый вклад в развитие теории оценки производных финансовых инструментов и явилась основой для развития более сложных моделей ценообразования опционов.

1.1. Недостатки модели BSM

Модель BSM, исходящая из описания динамики базового актива (1), предполагает, что для любого фиксированного значения t логарифмические доходности

$$\{log\,X\big((n+1)t\big) - log\,X(nt)\,, n = 0,1,2, \dots\}$$

являются независимыми одинаково распределенными гауссовыми случайными величинами. Однако статистические тесты, проводимые на реальных данных, особенно на временных промежутках t одного дня и менее, показывают значительные отрицательные величины коэффициента асимметрии. Как известно, коэффициент асимметрии характеризует ассиметрию распределения и вычисляется как отношение третьего центрального момента к стандартному отклонению в кубе:

$$\gamma_1 = \frac{E[X - EX]^3}{\sigma^3}.$$

Статистические тесты так же показывают, что коэффициент эксцесса, определяющий остроту пика или степень «тяжести» хвостов распределения, вычисляемый по формуле:

$$\gamma_2 = \frac{E[X - EX]^4}{\sigma^4} - 3,$$

значимо превышает коэффициент эксцесса нормального распределения. Таким образом, при построении моделей для того чтобы учесть эти особенности реальных данных, необходимо отказываться от гипотезы динамики базового актива, положенной в основу модели BSM. Это необходимо для того, чтобы ослабить свойство нормального распределения доходности базового актива.

Еще одним аргументом, указывающим на несостоятельность модели BSM, является то, что наблюдаемые приращения логарифмических доходностей не оказываются одинаково распределенными на реальных данных. Например, оценки дисперсии изменяются в зависимости от времени. В условиях модели BSM можно оценить дневной параметр σ на каждый день n [(P. J. Brockwell, 2009)]:

$$\widehat{\sigma_n^2} = \sum_{i=1}^{N} \left(log\, X_n \left(\frac{i}{N}\right) - log\, X_n \left(\frac{i-1}{N}\right) \right)^2,$$

где день n разбит на N временных интервалов длиной $\frac{1}{N}$. Последовательность $\{\widehat{\sigma_n^2}\}$ – реализованная дневная волатильность. В приложениях оказывается, что она сильно варьируется по времени.

Более того, хотя наблюдаемые приращения цен базового актива обычно не дают значимую корреляцию, однако квадраты приращений или их абсолютные величины имеют ненулевую автокорреляцию, что в свою очередь говорит о том, что необходимо строить модели, в которых не предполагается независимости приращений цены базового актива. Еще одним интересным свойством реальных данных является то, что последовательность реализованной волатильности имеет тенденцию к кластеризации. Это означает, что длинные периоды низких значений волатильности сменяются длинными периодами высоких, и наоборот. Другими словами ряд имеет положительную автокорреляцию, и отклонения от равновесия имеют тенденцию сохраняться от периода к периоду. Все это говорит о том, предположение модели BSM о постоянной волатильности является слишком ограничительным. Эти и другие наблюдения послужили толчком для развития моделей стохастической волатильности с дискретным временем, таких как модели ARCH и GARCH и их непрерывных аналогов, см. например [(P. Ritchken, R. Trevor, 1999)], [(P. Christoffersen, K. Jacob, 2004)].

Если допустить, что все предположения модели BSM верны, и принять широко распространенную точку зрения, что в реальных условиях условие безарбиртаржности выполняется, тогда цены опционов должны в точности соответствовать ценам, которые дает модель BSM. Эти допущения позволяют проверить состоятельность модели исходя из нескольких параметров: срока до истечения опционных контрактов $\tau = T - t$, цен исполнения K, котируемых цен на опционы c и безрисковой процентной ки r.

Одним из полезных свойств модели BSM является то, что цена опциона на продажу является непрерывной, монотонной функцией волатильности (при фиксированных других параметрах модели). Из этого следует, что цена опциона единственным образом определяет «подразумеваемую» волатильность, то есть волатильность σ, при которой вычисленная теоретическая цена опциона равна наблюдаемой цене опциона. Согласно модели BSM волатильность не зависит ни от цены исполнения K, ни от срока до истечения контракта $\tau = T - t$. Однако, исходя из рыночных данных, подразумеваемая волатильность оказывается зависимой от обоих параметров. Эта зависимость $\sigma(K, \tau)$ получила название поверхности волатильности, а при каждом фиксированном времени τ график сечения этой поверхности $\sigma_\tau(K)$ – улыбкой волатильности (вследствие характерной параболической формы, напоминающей улыбку). См. рис. 2 [(M. Haugh, 2009)].

Наконец, если мы сравним дневные цены на базовый актив с модельными ценами, полученными исходя из предположения броуновского движения с соответствующими коэффициентами сноса и дисперсии, то мы обнаружим, что реальные цены на активы подвержены случайным скачкам, которые намного больше приращений траекторий броуновского движения. Из этого следует, что хорошая модель динамики базового актива должна допускать возможность скачков, см. например [(K. Matsuda, 2004)].

2. Методы оценивания плотности распределения на основе опционов

В последние годы проведено множество исследований на тему оценки плотности распределений на основе стоимости опционов. Предложенные методы оценки можно условно разделить на две большие группы: параметрические и непараметрические методы. В параметрических методах делаются предположения либо о динамике цен базового актива либо о семействе распределений, среди которых будет происходить поиск. Инициализация параметров в таких моделях происходит путем решения задач оптимизации на множестве ограничений, которое формируется на основе наблюдаемых цен опционов. Альтернативой параметрическим методам оценивания является непараметрический подход. Основным

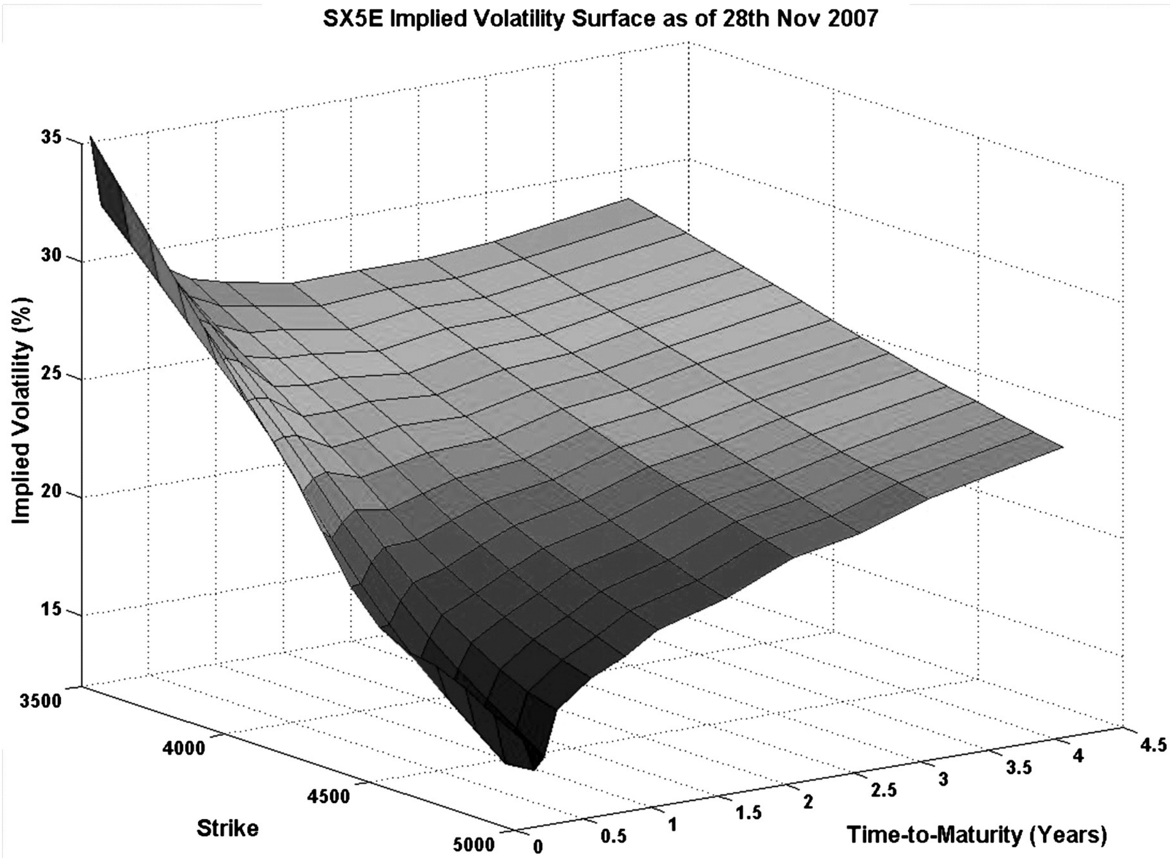

Рис. 2

его достоинством является то, что при оценивании не требуется задавать ограничений ни на динамику цен базового актива, ни на параметрический вид функции плотности или семейство априорных распределений.

Параметрические методы оценивания являются предпочтительными в случае, если известно, что цена базового актива подчиняются определенной динамике, например геометрическому броуновскому движению. Однако так как эмпирические исследования ставят под сомнение предположения модели Блэка–Шоулза, то непараметрический подход может быть хорошей альтернативой более традиционным параметрическим методам оценивания. Непараметрический метод может быть полезен по нескольким причинам [(B. Bahra, 2007)]. Во-первых, найденная плотность становится инструментом вычисления стоимости более сложных или менее ликвидных деривативов (например, европейских или бермудских опционов). То есть с помощью восстановленной плотности вычислять другие «обобщенные моменты».

Во-вторых, непараметрическая оценка улавливает те особенности данных, которые могут быть в дальнейшем использованы при построении параметрических моделей. К таким особенностям могут относиться зависимость подразумеваемой дисперсии цены базового актива от константы K – цены страйк (улыбка волатильности), асимметрия подразумеваемого распределения базового актива и тяжелые хвосты распределения. В статье проводится обзор методов параметрического и непараметрического восстановления плотностей на основе обобщенных моментных ограничений.

2.1. Параметрическое оценивание

В параметрических моделях делаются предположения либо о динамике цен базового актива, либо о семействе распределений, среди которых будет происходить поиск риск-нейтрального распределения. Инициализация параметров в таких моделях происходит путем решения задач оптимизации на некотором множестве ограничений, которое формируется на основе наблюдаемых цен опционов. Среди параметрических методов оценивания можно выделить следующие подходы:

1) Модели, в которых предполагается, что динамика базового актива подчиняется определенному стохастическому процессу. Котировки торгуемых

опционов используются для оценивания неизвестных параметров стохастического процесса. Затем, на основе многократного моделирования реализаций случайного процесса с оцененными параметрами, извлекается плотность распределения нейтрального к риску инвестора. В литературе наиболее популярным исходным параметрическим заданием случайного процесса, моделирующего цену базового актива, является геометрическое броуновское движение с постоянным коэффициентом сноса и дисперсии. Однако часто такая параметризация не улавливает всех особенностей данных, наблюдаемых на рынке. К таким особенностям могут относиться несимметричность функции плотности распределения доходности, более острый пик распределения по сравнению с логнормальным распределением, наличие «улыбок» волатильности. Предложено множество модификаций геометрического броуновского движения, нацеленных на более точное описание наблюдаемых на рынке эффектов. Для моделирования цены базового актива используют случайные процессы со стохастической волатильностью, процессы, представляющие собой геометрическое броуновское движение с возможными скачками в случайные моменты времени.

Мертон предложил модель динамики случайного процесса базового актива, которая в отличие от первоначальной модели BSM допускает несимметричность распределения и позволяет распределению иметь «толстые» хвосты. Данная модель включает в себя процесс Пуассона, задающий случайные скачки, подробнее например в [(B. Mizrach, 2010)]:

$$dX_t = (\mu - \lambda k)X_t dt + \sigma X_t dW_t + dq_t.$$

dq_t – пуассоновский процесс, моделирующий скачки. Винеровский и пуассоновский процессы dW_t и dq_t предполагаются независимыми. Параметры λ и k задают интенсивность и размер скачков соответственно. В предположении, что логарифм k распределен нормально со стандартным отклонением δ, цена европейского колл опциона выражается по формуле:

$$c = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda'\tau)\,(\lambda'\tau)^i}{i!} f_n,$$

где $\lambda' = \lambda(1+k)$, а f_n – цена опциона по модели BSM, где безрисковая процентная ставка равна

$$r - \lambda k + \frac{n ln(1+k)}{T},$$

а дисперсия

$$\sigma^2 + \frac{\mathrm{n}\delta^2}{T}.$$

К недостаткам подхода моделирования динамики базового актива сложными стохастическими процессами является трудность в его реализации и оценивании параметров процесса. Из большого количества возможных параметризации случайного процесса сложно заранее выбрать наиболее подходящую модель для конкретных данных.

2) Модели параметрического оценивания плотности распределения в условиях нейтральности к риску инвесторов. В этих моделях делаются предположения о параметрическом виде искомой плотности и решаются оптимизационные задачи для поиска неизвестных параметров распределения. Вернемся к формуле (8):

$$C_t = e^{-r\tau}\mathbb{E}^*[\max(X_T - K, 0)].$$

Из нее следует, что цена колл опциона выражается через плотность $f^*(X_T|X_t,\tau,r,\delta)$ следующим образом:

$$C_t = e^{-r\tau}\int_K^{\infty}(X_T - K) f^*(X_T|X_t,\tau,r,\delta)dX_T. \quad (10)$$

Плотность, полученная на основе модели Блэка–Шоулза, записывается в виде:

$$f^*(X_T) = \frac{1}{X_T\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}}\exp\left\{-\frac{\left(\ln\left(\frac{X_T}{X_t}\right) - (r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})\tau\right)^2}{2\sigma^2\tau}\right\} \quad (11)$$

Поэтому часто в качестве априорного кандидата на искомую риск-нейтральную плотность берут плотность логнормального распределения с неизвестными параметрами α, β:

$$f^*(X_T) = \frac{1}{X_T\sqrt{2\pi\beta}}\exp\left\{-\frac{\left(\ln\frac{X_T}{X_t} - \alpha\right)^2}{2\beta}\right\}. \quad (12)$$

Подставляя эту плотность в формулу (10), получаем теоретическую цену опциона в зависимости от параметров α и β. Для нахождения параметров решается задача минимизации суммы квадратов отклонений теоретических цен опционов C_{theory}, посчитанных по (10) от наблюдаемых цен на рынке C_{observ}. Суммирование происходит по контрактам, имеющим различные значения страйков K, время до исполнения τ, текущее значение базового актива X_t:

$$\min_{\alpha,\beta}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(C_{observ} - C_{theory}\right)^2. \quad (13)$$

Для получения более обширного класса допустимых распределений вместо логнормального распределения можно взять смесь двух логнормальных распределений, то есть распределение, плотность которого записывается в виде:

$$f^*(X_T) = \omega f_1^*(X_T) + (1-\omega) f_2^*(X_T), \quad (14)$$

где $f_1^*(X_T), f_2^*(X_T)$ – плотности логнормального распределения с параметрами (α_1, β_1) и (α_2, β_2) соответственно, $0 < \omega < 1$. Если искомая плотность представлена в виде смеси, тогда оценивается 5 параметров: $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \omega)$, поэтому необходимо большее количество наблюдений, то есть опционных контрактов, торгующихся на рынке.

3) Еще одним классом параметрических моделей являются энтропийные модели. Метод максимизации энтропии ставит своей целью найти наиболее объективное распределение, которое использует информацию только о наблюдаемых ценах на опционы. Такое распределение является самым объективным с точки зрения имеющейся информации. Для построения искомого распределения принцип максимума энтропии не использует никаких дополнительных сведений за исключением тех, которые имеются в наличии исследователя.

Концепция энтропии первоначально развивалась в рамках классической термодинамики. Гиббс впервые сформулировал принцип максимума энтропии, заключающийся в том, что термодинамическая энтропия системы будет увеличиваться до тех пор, пока не достигнет максимального допустимого значения, при каких бы то ни было ограничениях на систему. Впоследствии Шеннон рассматривал энтропию в теории информатики как единицу измерения информации. С информационной точки зрения энтропия отражает степень неопределенности знания или количество потерянной информации.

Энтропия вероятностного распределения $f(x)$, заданного на положительной полуоси $0 < x < +\infty$, записывается в виде:

$$H(f) = -\int_0^{+\infty} f(x) ln f(x) dx.$$

Обобщением понятия энтропии является относительная энтропия. Относительная энтропия или энтропия распределения $f(x)$относительно $f_0(x)$ записывается следующим образом:

$$H(f|f_0) = \int f(x) ln \frac{f(x)}{f_0(x)} dx.$$

Для функций распределения, относительная энтропия является показателем степени удаленности одного распределения от другого. Относительную энтропию еще называют энтропией Кульбака–Лейбнера или расстоянием Кульбака–Лейбнера. Отметим, что обобщенная энтропия не является симметричной по отношению к плотностям: $H(f|f_0) \neq H(f_0|f)$. Если положить $f_0(x) \equiv const$, тогда обобщенная энтропия переходит в классическое определение энтропии с точностью до знака. Как уже говорилось, если у исследователя нет никакой дополнительной или априорной информации о распределении случайной величины (в нашем случае стоимости базового актива), то при его поиске априорно невозможно отдать предпочтение ни одному распределению $f(x)$, в этом случае $f_0(x) \equiv const$.

В случае если имеется частичная или неполная информация о наблюдаемых величинах (функций он неизвестной плотности распределения), принцип максимума энтропии дает наиболее объективную оценку плотности с точки зрения доступной информации. Проиллюстрируем это на некоторых примерах.

- Рассмотрим задачу поиска неизвестного распределения на отрезке. В условиях отсутствия какой-либо дополнительной информации равномерное распределение является распределением с максимальной энтропией. Этого и следовало ожидать, ведь нет причины полагать какой-либо исход вероятнее другого.
- Распределением, обладающим максимальной энтропией на луче $(0; +\infty)$ с известным математическим ожиданием является экспоненциальное распределение.
- Распределением, обладающим максимальной энтропией на действительной оси $(-\infty; +\infty)$ с известным математическим ожиданием и дисперсией является нормальное распределение.
- Плотностью совместного распределения двух случайных величин, обладающего максимальной энтропией при условии, что известны плотности распределений каждой случайной величины, является произведение их плотностей. Таким образом, в отсутствие какой-либо дополнительной информации, случайные величины являются независимыми.

В работе [(M. Avellaneda, 1998)] рассматривается задача минимизации относительной энтропии при ограничениях на функцию плотности. Частным случаем этой задачи при $f_0(x) \equiv -1$ является задача максимизации классической энтропии. Поиск распределения с минимальной относительной энтропией:

$$\sup -H(f|f_0) = sup - \int f(x) ln \frac{f(x)}{f_0(x)} dx$$

происходит на множестве ограничений. Во-первых, это обобщенные моментные ограничения, задающие цены производных финансовых инструментов:

$$E[p_i(x)] = \int p_i(x) f(x) dx = \mathrm{c_i}$$

где $p_i(x)$ – известные функции, а $\mathrm{c_i}$ – действительные значения $1 < \mathrm{i} < \mathrm{n}$. А во-вторых, так как $f(x)$ –

функция плотности распределения, то она должна удовлетворять условию нормировки:

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Однако отметим, что это условие является частным случаем обобщенного моментного ограничения при $p_0(x) \equiv 1, c_0 = 1$. Таким образом, можно не выделять условие нормировки отдельно.

Модель состоит в поиске распределения, наименее удаленного от априорного распределения вероятностей f_0, при соблюдении ограничений на моменты. Хорошо известно, что задача поиска распределения вероятностей по заданным моментам является некорректно поставленной. Она может не иметь решений или иметь множество решений. В приложении к задаче восстановления плотности распределения базового актива на основе опционов это означает, что наблюдаемые цены на опционы не согласуются или согласуются сразу с несколькими риск-нейтральными распределениями. Это может быть следствием неэффективности рынка. Таким образом, во многих случаях выбор калибровки модели является субъективным и опирается на особенности исследуемого объекта и предположения исследователя.

Однако если искомая плотность распределений, удовлетворяющая моментным ограничениям, такая что энтропия на ней существует (конечна), то она должна удовлетворять условиям Лагранжа. Таким образом, рассмотрим задачу оптимизации:

$$\inf_{\lambda_i} sup_f \ -H(f|f_0) + \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \left(\int p_i f dx - c_i \right),$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – множители Лагранжа. Максимум функции Лагранжа будет достигаться при условии равенства нулю производной Фреше, то есть первой вариации функционала по отношению к допустимой вариации $f(x)$.

$$\delta H = \int_0^{+\infty} \left(-ln \frac{f}{f_0} + \sum_{i=0}^{n} \lambda_i p_i(x) \right) \delta f dx = 0.$$

Пусть $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, обозначим $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \, p_i(x) = \lambda p$, что влечет за собой следующий результат:

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{\mu(\lambda)} f_0(x) \exp(\lambda p),$$

где $\mu(\lambda)$ множитель нормировки:

$$\mu(\lambda) = \int_0^{+\infty} f_0 \exp(\lambda p) \, dx.$$

Подставляя выражение плотности в функцию Лагранжа, получаем, что оптимизация по множителям Лагранжа λ эквивалентна поиску минимума функции:

$$\ln \mu(\lambda) \ - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \, c_i.$$

Условия первого порядка дают

$$\frac{1}{\mu(\lambda)} \frac{\partial \mu(\lambda)}{\partial \lambda_i} = c_i.$$

Важным свойством модели является то, что целевая функция является выпуклой по λ.

$$\frac{\partial^2 \ln \mu(\lambda)}{\partial \lambda_j \partial \lambda_i} = \frac{\mu_{\lambda_j \lambda_i} \mu - \mu_{\lambda_i} \mu_{\lambda_j}}{\mu^2}$$
$$= Cov^{f_\lambda}\{p_i(x), p_j(x)\} \equiv H_{ij}.$$

Так как ковариационная матрица является неотрицательно определенной, то функция $\ln \mu(\lambda) - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \, c_i$ является выпуклой, а $\ln \mu(\lambda)$ является строго выпуклой, если функции выплат линейно независимы.

Рассмотрим вопрос устойчивости решения, то есть зависимости решения $f_\lambda(x)$ от входных цен. Пусть λ^* – значение множителя Лагранжа, которое доставляет максимум функции $\ln \mu(\lambda) \ - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \, c_i$. Рассмотрим стоимость некоторого нового производного финансового инструмента с функцией выплат $P_{new}(x)$. Его стоимость, как и прежде, записывается в виде

$$p(\lambda) = E[p_{new}(x)],$$

$$\frac{\partial P_{new}(\lambda^*)}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \frac{\int_0^{+\infty} P_{new} f_0 \exp(\lambda p) \, dx}{\int_0^{+\infty} f_0 \exp(\lambda p) \, dx}$$
$$= E\big(P_{new}(x) p_i(x)\big) - E\big(p_i(x)\big) E\big(P_{new}(x)\big),$$

$$\frac{\partial P_{new}(\lambda^*)}{\partial \lambda_i} = Cov\big(P_{new}(x), p_i(x)\big),$$

$$\frac{\partial P_{new}(\lambda^*)}{\partial c_j} = \sum_i \left(\frac{\partial P_{new}(\lambda^*)}{\partial \lambda_i} \right) \frac{\partial \lambda_i^*}{\partial c_j}$$
$$= \sum_i Cov\big(P_{new}(x), p_i(x)\big) \, H_{ji}^{-1}.$$

При выводе использовались соотношения двойственности:

$$\frac{\partial \lambda_i^*}{\partial c_j} = H_{ji}^{-1}; \ \frac{\partial C_i}{\partial \lambda_j^*} = H_{ji}^{-1}.$$

Таким образом, $P_{new}(c_1, c_2, \dots, c_n)$ бесконечно дифференцируемая функция цен, а чувствительность $\frac{\partial P_{new}}{\partial c_j}$ непрерывно зависит от цен.

Полученная выше формула допускает простую интерпретацию. Рассмотрим модель линейной регрессии:

$$P_{new}(x) = \alpha + \sum_i \beta_i p_i(x) + \varepsilon,$$

где ε – случайная величина с нулевым математическим ожиданием, некоррелированная с $p_i(x)$, тогда коэффициент, минимизирующий вариацию остатков $P_{new}(x) - \alpha - \sum_i \beta_i p_i(x)$ равен

$$\beta_j = \sum_i Cov\big(P_{new}(x), p_i(x)\big)\, H_{ji}^{-1} = \frac{\partial P_{new}}{\partial c_j},$$

то есть производной функции выплат по цене опциона.

Достоинством параметрических моделей является то, что в них необходимо оценивать небольшое количество параметров. Некоторые из моделей позволяют явно найти формулы для справедливой цены опционов, коэффициенты хеджирования (коэффициенты необходимые для управления рисками). Например, в модели Блэка–Шоулза в предположении о том, что цена базового актива следует геометрическому броуновскому движению с постоянным коэффициентом сноса и дисперсией, удается получить явную формулу цены опциона, а на ее основе показать, что риск-нейтральная плотность представляет собой функцию плотности логнормального распределения. Конечно, если цены базового актива подчиняются более сложному стохастическому процессу, то получить явную формулу для риск-нейтральной плотности не всегда удается. К недостаткам параметрического оценивания следует отнести то, что модель должна быть заведомо правильно специфицирована, то есть успех модели полностью зависит от ее параметризации. К тому же, обычно в параметрических моделях делаются ограничительные предположения либо на динамику цен базового актива, либо на искомый вид функции плотности.

2.2. Непараметрическое оценивание

Альтернативой параметрическим методам оценивания является непараметрический подход. Основным его достоинством является то, что при оценивании не требуется задавать ограничений ни на динамику цен базового актива, ни на параметрический вид функции плотности или семейство априорных распределений. Так как эмпирические исследования ставят под сомнение стандартные модельные предположения, то непараметрический подход может быть хорошей альтернативой традиционным методам оценивания.

Снова обратимся к формуле (10):

$$C_t = e^{-r\tau} \int_K^\infty (X_T - K) f^*(X_T) dX_T.$$

Дифференцируя равенство по K, получаем:

$$\frac{\partial C}{\partial K} = -e^{-r\tau} \int_K^\infty f_t^*(X_T) dX_T. \quad (15)$$

Отсюда видно, что производная цены колл опциона по цене исполнения должна удовлетворять ограничениям:

$$-e^{-r\tau} \le \frac{\partial C}{\partial K} \le 0. \quad (16)$$

Дифференцируя повторно, получаем:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}|(K = X_T) = e^{-r\tau} f_t^*(X_T) \text{ или}$$

$$f_t^*(X_T) = e^{r\tau} \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}|(K = X_T). \quad (17)$$

Значит

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} \ge 0 \quad (18).$$

Таким образом, плотность состояния с точностью до множителя представляет собой вторую производную цены опциона на покупку по цене исполнения. Этот результат впервые получили [(D. Breeden, R. Litzenberger, 1978)].

Формула (17) позволяет оценить распределение вероятностей. Чтобы извлечь функцию плотности, можно провести непараметрическое оценивание зависимости цены опциона $\hat{C}(\cdot)$ от нескольких факторов. Далее дважды продифференцировать полученную оценку по страйку K. При выполнении соответствующих условий регулярности сходимость оценки $\hat{C}(\cdot)$ к истинной формуле $C(\cdot)$ влечет сходимость производной $\frac{\partial^2 \hat{C}(\cdot)}{\partial K^2}$ к $\frac{\partial^2 C(\cdot)}{\partial K^2}$.

Как уже говорилось, привлекательность непараметрических методов заключается в том, что они значительно ослабляют предположения, которые накладываются на процесс, описывающий динамику цены базового актива или на саму функцию распределения. Таким образом, имеющиеся данные сами определяют подходящую модель. Непараметрическое оценивание особенно актуально в приложениях к финансовым рынкам, где имеется большой объем наблюдений, а число оцениваемых переменных относительно невелико.

Наиболее известной непараметрической оценкой является гистограмма. Гистограмма является негладким непараметрическим методом оценивания функции плотности распределения случайной величины. Строится разбиение области определения на интервалы $[x_0 + mh; x_0 + (m+1)h]$, где x_0 – минимальное значение из области определения, h – ширина интервалов, $m = 0, 1, 2 \dots$. В случае непрерывной случайной величины оценка гистограммы выглядит следующим образом:

$$\hat{f} = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}\{X_i \text{ в одном интервале с } x_i\}$$

$\mathbb{I}$ – индикаторная функция. Однако данная оценка чувствительна к выбору разбиения, то есть к выбору x_0 и ширины окна h.

Недостаток гистограммы состоит в том, что получаемая оценка не является непрерывной, поэтому недоступен ни один метод, основанный на ее дифференцировании. Для преодоления ограничений, связанных с отсутствием гладкости был предложен новый метод оценивания плотности, основанный на той же идее, что и гистограмма, который называется ядерным оцениванием. Идея, лежащая в основе ядерного оценивания, проста: происходит замена индикаторной функции на ядро – симметричную взвешивающую функцию $K(\cdot)$, обладающую рядом полезных свойств:

$$K(z) \geq 0, \int K(z)dz = 1, \int zK(z)dz = 0, \int z^2K(z)dz = k_2 < \infty. \quad (19)$$

Ядерная оценка записывается в виде:

$$\hat{f} = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{X_i - x}{h}\right). \quad (20)$$

Чтобы оценивать качество построенной оценки, можно вычислять множество количественных показателей. Одним из наиболее широко применяемых показателей качества является значение среднеквадратичной ошибки. В [(A. Pagan, A. Ullah, 1999)] показано, что асимптотическое смещение падает, а дисперсия возрастает при уменьшении ширины окна h . Смещение возрастающим образом зависит от $f''(x)$, тем самым смещение достигает наибольшего значения в пиках распределений. Однако если выполнено условие состоятельности: $h \to 0$ и $nh \to \infty$ при $n \to \infty$, тогда дисперсия и смещение, связанное с $f''(x)$, стремятся к нулю при $n \to \infty$. Величину nh часто называют «эффективным размером выборки», а условие $nh \to \infty$ означает, что по мере получения большего количества информации ($n \to \infty$) усреднение происходит по более узкой области ($h \to 0$), но в то же время количество «локальной информации» (nh) увеличивается.

Главная задача при выборе ядра – это обеспечение нужной степени гладкости результирующей оценки. Оптимальная с точки зрения интегральной среднеквадратичной ошибки взвешивающая функция имеет следующий вид:

$$K(z) = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{5}}\left(1 - \frac{1}{5}z^2\right), -\sqrt{5} \leq z \leq \sqrt{5} \\ 0, \text{иначе} \end{cases} \quad (21)$$

Данное ядро называют ядром Епанечникова.

Главная роль ядра заключается в обеспечении дифференцируемости получаемой оценки, поэтому при проведении ядерной регрессии важным вопросом является вопрос выбора подходящей ширины окна. Ширина окна определяет поведение оценки в конечных выборках. Существует несколько подходов к выбору ширины окна: референтные эвристические правила, методы подстановки, методы кросс-валидации. Часто для выбора шага используются референтные эвристические правила, которые для оценивания h вместо неизвестной плотности используют некоторое стандартное семейство распределений, например семейство нормальных распределений.

Непараметрический метод оценивания регрессии тесно связан с методами оценивания плотности распределений. Рассмотрим $p = q + 1$ переменных (Y, X^T), где X – $q \times 1$ вектор регрессоров. Полное описание зависимости между переменными содержится в их совместной плотности распределения $f(y, x_1, x_2, \dots, x_q) = f(y, x)$. Необходимо оценить регрессию y на x, то есть функцию условного математического ожидания: $m(x) = E(Y|X = x)$. Условное среднее по определению записывается в виде:

$$m(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\frac{f(y,x)}{f(x)}dy \quad (22)$$

$f(x)$ – маргинальная плотность. Было предложено [(E. A. Nadaraya, 1964)], [(G. S. Watson, 1964)] оценить функцию $m(x)$ путем замены плотностей $f(y,x)$ и $f(x)$ на их оценки по формулам, аналогичным (20). Тогда

$$\widehat{m} = \int_{-\infty}^{+\infty} y\left[\frac{(nh^p)^{-1}}{(nh^q)^{-1}}\frac{\sum_{i=1}^{n} K_1\left(\frac{y_i - y}{h}, \frac{x_i - x}{h}\right)}{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x_i - x}{h}\right)}\right]dy.$$

При условии симметричности ядра показано, что оценка записывается в виде:

$$\widehat{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x_i - x}{h}\right)y_i}{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x_i - x}{h}\right)} \quad (23)$$

Интеграл исчезает из-за использования мультипликативной ядерной функции и замены переменной. По сути, оценка получается локальным усреднением тех значений зависимой переменной, которые «близки» между собой в смысле значений, принимаемых регрессорами.

В статье [(Y. Ait-Sahalia, A. W. Lo, 1998)] авторы непосредственно применили данный метод оценивания риск нейтральной плотности, предварительно непараметрически оценив зависимость цен опционов от параметров $C(X_{t_i}, K_i, \tau_i, r_{t_i,\tau_i}, \delta_{t_i,\tau_i})$. Получение хорошей оценки для функции цены в зависимости от пяти параметров представляется практически невозможным даже для очень большого объема данных. Авторы модели предлагают несколько способов сокращения размерности данной задачи, переходя к трем неизвестным вместо пяти.

Так как наиболее важным параметром при оценивании стоимости опционов является ненаблюдаемая волатильность σ, то одним из удачных подходов в непараметрическом моделировании является идея построения непараметрической ядерной оценки волатильности:

$$\hat{\sigma}(F_{t,\tau}, K, \tau) = \\ = \frac{\sum_{i=1}^{n} K_F\left(\frac{F_{t,\tau} - F_{t,\tau_i}}{h_F}\right) K_K\left(\frac{K - K_i}{h_K}\right) K_\tau\left(\frac{\tau - \tau_i}{h_\tau}\right) \sigma_i}{\sum_{i=1}^{n} K_F\left(\frac{F_{t,\tau} - F_{t,\tau_i}}{h_F}\right) K_K\left(\frac{K - K_i}{h_K}\right) K_\tau\left(\frac{\tau - \tau_i}{h_\tau}\right)}, \quad (24)$$

где $F_{t,\tau} = X_t e^{(r_{t,\tau} - \delta_{t,\tau})\tau}$. Таким образом, ядерная функция представляет собой произведение трех отдельных ядерных функций, каждая из которых обладает своей шириной окна h для переменных F, K, τ, а σ_i – подразумеваемая волатильность для наблюдаемой цены опциона i по модели BSM. Тогда оценка формулы цены опциона может быть найдена путем подстановки волатильности (24) в формулу BSM (9):

$$\hat{C}(X_t, K, \tau, r_{t,\tau}, \delta_{t,\tau}) = C_{BSM}\left(F_t, K, \tau, r_{t,\tau}, \hat{\sigma}(F_{t,\tau}, K, \tau)\right).$$

Тогда оценка плотности получается при помощи дифференцирования:

$$f_t^*(X_T) = e^{r\tau} \frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial K^2} |(K = X_T).$$

Такой непараметрический способ оценивания волатильности, а затем получения плотности может быть хорошей альтернативой дифференцированию построенной непараметрической оценки цены опциона.

Заключение

Бурное развитие финансовой математики и рынка производных финансовых инструментов, а так же методов их оценивания началось с фундаментальных работ Блэка, Шоулза и Мертона. Авторы знаменитой модели основывались на ограничительных предположениях о динамике базового актива, однако за счет этого смогли построить содержательную модель ценообразования опционов, послужившую основой для развития множества других моделей. Так как опционы содержат в себе ожидания о поведении базового актива в будущем, то они, могут использоваться для построения вероятностных характеристик и вероятностных распределений базового актива. Среди подходов для восстановления плотностей распределения базового актива можно выделить параметрические и непараметрические. Каждый из них содержит в себе множество моделей и обладает как преимуществами так и недостатками, а выбор того или иного метода оценивания должен сопровождаться дополнительным исследованием задачи и быть обусловленным наличием и полнотой располагаемых данных.

Литература

1. Pagan, A. Ullah. (1999). Nonparametric Econometrics. Cambridge University Press.
2. Bahra. (2007). Implied risk-neutral probability density functions from option prices: a central bank perspective. Monetary Instruments and Markets Division, Bank of England, 201–226.
3. Mizrach. (2010). Estimating Implied Probabilities from Option Prices and the Underlying. Handbook of Quantitative Finance and Risk Management, 515–529.
4. Breeden, R. Litzenberger. (1978). Prices of state-contingent claims implicit in option prices // Journal of Business. 51, 621–651.
5. A. Nadaraya. (1964). On Estimating Regression // Theory of Probability and its Applications 9 (1): 141–2.
6. Black, M. Scholes. (1973). The pricing of options and corporate liabilities // Journal of Political Economy/ 81, 637–659.
7. S. Watson. (1964). Smooth Regression Analysis. Sankhya, Series A. Vol.26. 359–372.
8. J. C. Hull. (2012). Options, futures, and other derivatives, 8th edition. Pearson Education.
9. J. Cox, S. Ross. (1976). The valuation of options for alternative stochastic processes // Journal of Financial Economics. 3, 145–166.
10. K. Matsuda. (2004). Introduction to Merton Jump Diffusion Model. Department of Economics, The City University of New York, 1–26.
11. M. Avellaneda. (1998). Minimum-relative-entropy calibration of asset-pricing models. International journal of theoretical and applied finance.
12. M. Haugh. (2009). Black-Scholes and the Volatility Surface. Financial Engineering: Continuous-Time Models, 1–17.
13. P. Christoffersen, K. Jacob. (2004). Which GARCH Model for Option Valuation? Management Science, Vol. 50, No 9, 1204–1221.

14. P. J. Brockwell. (2009). An Overview of Asset–Price Models. Handbook of Financial Time Series, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 403–419.
15. P. Ritchken, R. Trevor. (1999). Pricing Options under Generalized GARCH and Stochastic Volatility Processes // The journal of finance. Vol. 54. No 1. 377–402.
16. R. Merton. (1973). Rational theory of option pricing // Bell Journal of Economics and Management Science. 4, 141–183.
17. S. Ross. (1976). Option and efficiency // Quarterly Journal of Economics. 90, 75–89.
18. Y. Ait-Sahalia, A. W. Lo. (1998). Nonparametric estimation of state-price densities implicit in financial asset prices // The journal of finance. 53. 499–547.

Шкловский Евгений Юрьевич. Аспирант ИСА РАН. Окончил МФТИ и ВШЭ в 2009 г. Количество печатных работ: 1. Область научных интересов: математическое моделирование стохастических систем, интеллектуальный анализ данных, финансовая математика, математическая экономика и эконометрика. E-mail: zenchay@mail.ru