Численные методы

Метод интервальной идентификации распределений вероятностей

А. С. Подружко, В. Г. Никитаев, А. Н. Проничев, К. С. Чистов

Аннотация. Рассматриваются интервальные модели распределений вероятностей, полученные на основе неточных данных и предназначенные для оценки рисков классификации состояний. Предложена вычислительная схема для идентификации интервальных образов распределений, определены также основные показатели качества приближения. Приводится описание вычислительных схем для типовых распределений: равномерного, экспоненциального, Рэлея, квазинормального и полиномиального. Получены оценки их показателей точности, определены необходимые условия корректности этих распределений, построены интервальные образы их функций плотности. Определены признаки стационарности и изменчивости интервальных распределений. Приводятся примеры решения задач идентификации распределений, оценки их параметров и показателей.

Ключевые слова: *распределения вероятностей, интервальная идентификация, интервальный образ.*

1. Введение

Интервальное представление распределений вероятностей обычно связывают с экспертными процедурами принятия решений в условиях неточные исходных данных. В данном случае это оценки вероятностей на шкале интересующего показателя, которые могут быть определены с точностью до интервала, набора значений (при совмещении нескольких экспертных оценок) или иным способом. В настоящее время уже сформировалась вполне определенная концепция описания интервальных моделей распределений, основанных на понятии вероятностной трубки (p-box), и разработаны методы их вычисления [1–4]. Результаты находят применение при подготовке технико-экономических обоснований крупных проектов и управлении рисками их реализации [5], оценке перспективности месторождений [6], в задачах медицинской диагностики [7,8] и др. В то же время процедуры восстановления интервального распределения довольно сложны, используют эвристические приемы и не предполагают получения результатов в явном виде.

В данной работе предлагается качественно иной подход к решению этой задачи, основанный на использовании интервальных регрессионных моделей и методов их интервальной идентификации [9]. При этом удается естественным образом формализовать процедуру определения распределения, позволяющую вычислить его параметры и необходимые оценки качества интервального приближения. Применительно к стандартным распределениям это дает возможность наглядно, без привлечения вероятностных критериев [10,11] и на содержательном уровне определить степень соответствия выбранного распределения представленной статистике применительно к условиям конкретной задачи. Особенно это характерно для задач риск-менеджмента при оценке уровней толерантности и планировании надежных решений в условиях неопределенности.

2. Общая схема интервальной идентификации распределений

В основе процедур интервальной идентификации используется понятие интервального образа функции [9], в данном случае распределения вероятностей.

Определение. Интервальным образом функции F(x) будем называть интервал следующего вида $[F(x)] = F(x) + \omega_F(x)\,[e]$, образующая функция которого совпадает с исходной F(x), а отклонение от образующей определяется показателем ширины образа $\omega_F \geq 0$, где $[e] = [0,1]$ – базисный интервал. Если $\omega_F = const$, то образ будем называть простым, в противном случае – образ общего вида или переменной ширины.

Такая форма представления интервала оказалась весьма удобной при решении задач интервальной идентификации регрессий [9]. Сам же показатель ширины ω_F представляется естественной и наглядной мерой неопределенности, характеризующей интервальную функцию.

Однако, в случае переменной ширины образа предпочтительней традиционная интервальная форма записи и иное более общее определение понятия интервального образа. При этом образующую функцию будем рассматривать в параметризованном виде F(x, Θ), где $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots)$ набор параметров, подлежащих идентификации

Определение. Интервальным образом функции F(x, Θ) будем называть интервал вида $[F(x)] = [F_1(x), F_2(x)]$, где F_1 и F_2 нижняя и верхняя границы множества образующих функций

$$F_1(x) = \inf_{\Theta\in\Omega_F} F(x,\Theta), \qquad F_2(x) = \sup_{\Theta\in\Omega_F} F(x,\Theta)$$

на заданном диапазоне параметров

$$[\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}] = ([\theta_1^{(1)}, \theta_1^{(2)}], [\theta_2^{(1)}, \theta_2^{(2)}], \ldots).$$

Первое из определений проще, но охватывает только отдельный класс интервальных образов. Однако, второе, как более общее, в приложениях требует дополнительного уточнения характера параметрических связей, что может существенно усложнить идентификацию образа.

Процедура интервальной идентификации строится на основе следующих положений. Во-первых, полагается, что статистика, используемая при идентификации, безошибочна. При этом допускается существование скрытых факторов, искажающих результаты наблюдений и порождающих неопределенность результатов идентификации относительно предполагаемой модели процесса или явления. В традиционной статистике скрытые факторы заменены гипотетической аддитивной ошибкой приближения. Ошибка оценивается, как правило, среднеквадратичной величиной, а ее свойства изначально не определены. Это приводит к необходимости привлечения дополнительных гипотез и допущений. Поэтому все последующие вычисления и результаты становятся заведомо условными, а в ряде случаев, например при прогнозировании, чрезмерно грубыми [12]. В этом смысле использование понятия скрытого фактора позволяет соблюсти объективность результатов идентификации, а также последующих решений, выводов и заключений.

Во-вторых, поскольку исходные данные признаются безошибочными, то все точки статистики должны находится в пределах интервального образа. Это необходимое условие полноты охвата статистики [9]. Исходные данные могут точечными либо представлены доверительными интервалами оценок вероятностей $[P] = [P^{(1)}, P^{(2)}]$, привязаны к конкретным точкам регистрации или, в более общем виде, интервалу значений $[x] = [x^{(1)}, x^{(2)}]$. Поскольку распределения вероятностей относятся к категории монотонно неубывающих функций, то в общем случае исходные данные можно представить набором интервальных оценок вероятностей $[P_i] = [P_i^{(1)}, P_i^{(2)}]$, привязанных к упорядоченному ряду точек регистрации $x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_N$.

В-третьих, идентификация должна осуществляться по критерию точности приближения, а ее результаты должны в полной мере определять вид образующей функции, показатель ширины интервального образа либо его границы в явном виде.

С учетом этих требований процедура интервальной идентификации сводится к решению задачи математического программирования определенного вида.

Не обсуждая заранее особенности интервальных распределений, определим набор критериев, позволяющих судить о качестве интервального распределения и соответствии статистики выбранному виду образующей функции (распределению). Наиболее подходящими в данном случае можно считать следующие три вида показателей:

- максимальное расхождение интервального распределения $\omega_F = \max\,(F_2(x) - F_1(x))$ по всей области определения образующей функции F(x). Этот показатель можно рассматривать как аналог дисперсионной характеристики применительно к интервальному распределению;
- разброс математического ожидания ω_m на множестве распределений в пределах интервального образа;
- интегральный показатель неопределенности в виде площади области интервального образа S_F.
- При необходимости список показателей может быть расширен в зависимости от особенностей конкретной задачи. Далее будут рассмотрены

схемы вычисления этих показателей применительно к распределениям, наиболее широко используемых в приложениях.

3. Равномерные интервальные распределения

Равномерное распределение относится к числу экстремальных для случайных величин, значения которых ограничены интервалом [a, b] конечной ширины. Его часто используют как первое приближение в ситуациях полной неопределенности. Границы этого интервала однозначно определяют вид распределения F(x) и его рабочие параметры α и β

$$F(x) = \frac{1}{b-a}(x-a) = \alpha x - \beta;$$
$$\alpha = \frac{1}{b\text{-}a}; \tag{3.1}$$
$$\beta = \frac{a}{b\text{-}a} = \alpha\, a;$$
$$x \in [a,b].$$

И наоборот, оценки параметров α и β позволяют восстановить границы области определения идентифицируемого распределения [a, b], используя очевидные условия F(a) = 0 и F(b) =1:

$$a = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad b = \frac{1+\beta}{\alpha} = a + \frac{1}{\alpha}. \tag{3.2}$$

Исходная форма записи распределения более наглядна, а другая – предпочтительней при решении задач интервальной идентификации.

Интервальной образ равномерного распределения [F(x)] будем определять по положению его нижней и верхней границ F_1 и F_2 ($F_1 \le F_2$) в следующем виде:

$$F_1(x) = \alpha_1 x - \beta_1, \quad x \in \Omega_1;\ F_1(x) = 0, \quad x \in D_1;$$
$$F_2(x) = \alpha_2 x - \beta_2, \quad x \in \Omega_2;\ F_2(x) = 1, \quad x \in D_2; \tag{3.3}$$

$$\Omega_1 = [a_1, b_1] = [\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{1+\beta_1}{\alpha_1}];$$
$$\Omega_2 = [a_2, b_2] = [\frac{\beta_2}{\alpha_2}, \frac{1+\beta_2}{\alpha_2}];$$
$$D_1 = [a_2, a_1] = [\frac{\beta_2}{\alpha_2}, \frac{\beta_1}{\alpha_1}];$$
$$D_2 = [b_2, b_1] = [\frac{1+\beta_2}{\alpha_2}, \frac{1+\beta_1}{\alpha_1}];$$
$$\Omega_F = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup D_1 \cup D_2.$$

где Ω_1 и Ω_2 – области определения границ F_1 и F_2, D_1 и D_2 – дополнения к ним, а Ω_F – область определения интервального распределения в целом.

Схема и результаты интервальной идентификации во многом будут зависеть от выбора модели интервального распределения. При этом можно выделить три их основных типа: полоса, конус и трапеция. Каждой соответствует свой набор варьируемых параметров, критерий точности приближения и форма представления результата.

Как уже отмечалось, исходная статистика может быть представлена в виде набора интервальных оценок вероятностей $[P_i] = [P_i^{(1)}, P_i^{(2)}]$ в соответствующих точках области их определения x_i, т. е. в виде набора $\{[P_i], x_i\}$, i = 1, 2, … N, где N – общее число упорядоченных точек регистрации. При этом существенное значение имеют только нижняя и верхняя границы оценок вероятностей $P_i^{(1)}$ и $P_i^{(2)}$. Сама процедура идентификации основана на трех группах общих ограничений:

– условия полноты охвата статистики:

$$F_1(x_i) = \alpha_1 x_i - \beta_1 \le P_i^{(1)};$$
$$F_2(x_i) = \alpha_2 x_i - \beta_2 \ge P_i^{(2)}; \tag{3.4}$$
$$i = 1, 2, \dots N$$

– положительности параметров наклона распределений:

$$\alpha_1 > 0;\ \alpha_2 > 0. \tag{3.5}$$

– и краевых условий на границах интервального распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ в точках x_1 и x_N:

$$F_1(x_N) = \alpha x_N - \beta_1 \le 1; \tag{3.6}$$
$$F_2(x_1) = \alpha x_1 - \beta_2 \ge 0.$$

Ограничения (3.4) – (3.6) могут быть также дополнены другими условиями, отражающими специфику выбранной модели интервального распределения.

Распределение [F(x)] в виде полосы, в частности, предполагает одинаковые значения коэффициентов наклона граничных распределений:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha. \tag{3.7}$$

Условия (3.4) – (3.6) совместно с (3.7) образуют общую систему ограничений для решения задачи идентификации интервального распределения в виде полосы. В качестве показателя точности приближения здесь имеет смысл рассматривать максимальное расхождение распределения на области определения [F(x)]. Величину этого максимума ω_F для данной модели удобно определить в крайней точке распределения F_1 при условии $F_1(x) = \alpha x - \beta_1 = 0$,

$$\omega_F = \max_{x \in \Omega_F} (F_2(x) - F_1(x)) = \\ = F_2\left(x = \frac{\beta_1}{\alpha}\right) = \beta_1 - \beta_2 > 0 \tag{3.8}$$

Таким образом, идентификация интервального распределения [F(x)] сводится к решению задачи линейного программирования с критерием

$$\min_{\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}} \omega_F = \min (\beta_1 - \beta_2) \tag{3.9}$$

при ограничениях (3.4) – (3.7). Полученное решение позволяет не только определить оптимальный вид интервального распределения, но и оценить на основе его характеристик степень взаимного соответствия выбранной модели и статистики (Рис. 3.1).

Одной из таких характеристик служит полученное значение расхождения ω_F. Очевидно, чем меньше значение ω_F, тем более адекватна модель распределения статистике. Если же расхождение становится равным своему максимальному значению $\omega_F = 1$, то полученное распределение [F(x)] становится заведомо не корректным по точности, поскольку погрешность определения вероятности (по этому распределению) превышает ее значение. Такая ситуация возникает, когда области определения распределений $F_1(x)$ и $F_2(x)$ не пересекаются, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$. Интервалы Ω_1 и Ω_2 пересекаются, если параметры распределение [F(x)] удовлетворяют следующему условию:

$$a_1 = \frac{\beta_1}{\alpha} < b_2 = \frac{1+\beta_2}{\alpha} \tag{3.10}$$

или, с учетом того, что $\alpha > 0$

$$0 < \beta_1 - \beta_2 < 1. \tag{3.11}$$

Таким образом, по результатам идентификации удается сразу же отобрать заведомо непригодные распределения, а само ограничение (3.11) можно считать необходимым условием корректности интервального распределения данного вида.

Утверждение. Интервальный образ равномерного распределения в виде полосы будет корректным, если разность параметров этого распределения β_1 и β_2 не превышает единицы.

Математическое ожидание интервального распределения определяется ожиданиями на границах F_1 и F_2 и представляет собой также интервал [m] = [m_1, m_2], границы которого вычисляются по очевидным правилам

$$m_{1,2} = \frac{a_{1,2} + b_{1,2}}{2} = \frac{1 + 2\beta_{1,2}}{2\alpha}, \tag{3.12}$$

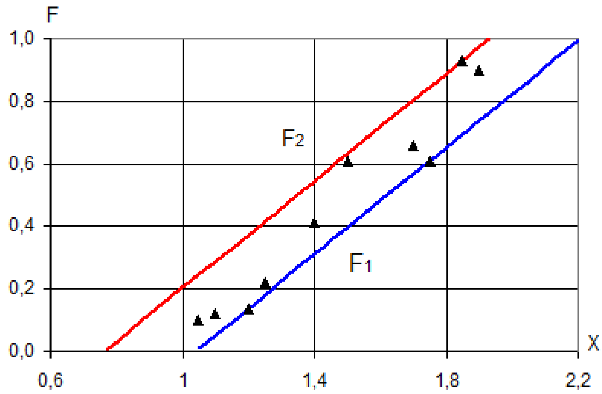

Рис. 3.1

а ширина этого интервала – расхождение ожидания ω_m – непосредственно связана с оценкой расхождения распределения:

$$\omega_m = m_1 - m_2 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha} = \frac{\omega_F}{\alpha}. \tag{3.13}$$

Этот результат вполне ожидаем для модели распределения в виде полосы, а сам показатель ω_m в данном случае можно рассматривать как оценку точности вычисления квантилей для полученного распределения.

Третий интегральный показатель – площадь области неопределенности S_F интервального распределения – может быть вычислен по формулам трапеций. Если области определения границ F_1 и F_2 представить интервалами [a_1, b_1] и [a_2, b_2], где $a_1 \geq a_2$ и $b_1 \geq b_2$, то

$$S_F = \frac{(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)}{2} = \\ = \frac{a_1 + b_1}{2} - \frac{a_2 + b_2}{2} = m_1 - m_2 = \omega_m. \tag{3.14}$$

Иными словами, величина площади S_F численно совпадает с расхождением ожидания ω_m независимо от формы интервального образа равномерного распределения. Поэтому в дальнейшем достаточно ограничиться оценкой только одного из этих показателей в зависимости от условий решаемой задачи.

С учетом условия (3.11) величина площади S_F корректного распределения ограничена сверху значением $(S_F)_{max} = 1/\alpha$, а отношение

$$\frac{S_F}{(S_F)_{max}} = \frac{\omega_m}{1/\alpha} = \omega_F \tag{3.15}$$

можно рассматривать как меру корректности интервального распределения. Численно этот показатель совпадает с оценкой расхождения ω_F, которая представляет собой основной критерий качества рассмотренной модели интервального распределения.

Другой удобной формой представления интервального образа для равномерного распределения является конус. В практических приложениях эту форму используют, когда точность оценок малых вероятностей P_i существенно выше, нежели больших близких к 1. Для идентификаций такой модели распределения при соблюдении общих ограничений (3.4) – (3.7) дополнительно вводится условие, определяющее коническую форму интервального распределения:

– левые границы распределения должны сходится в точку, $a_1 = a_2$ или

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2}. \tag{3.16}$$

В качестве показателя точности приближения здесь имеет смысл выбрать разность коэффициентов наклона границ α_2 и α_1 (расхождение по параметру ω_α). Теперь идентификация интервального распределения сводится к решению следующей оптимизационной задачи:

$$\min_{\{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\beta_1,\,\beta_2\}} \omega_\alpha = \min (\alpha_2 - \alpha_1) \tag{3.17}$$

при соблюдении ограничений (3.4) – (3.7) и (3.16). Данная задача уже относится к категории нелинейных, однако ее решение не вызывает затруднений (Рис. 3.2).

Определим теперь основные показатели точности приближения для полученного распределения. В первую очередь расхождение $\omega_F = \max (F_2(x) - F_1(x))$ на области определения. Его величина в данном случае определяется по верхней границе распределения F_2, т. е. $\omega_F = 1\text{-}F_1(b_2)$ или с учетом условия (3.16)

$$\omega_F = 1 - \alpha_1 \frac{1+\beta_2}{\alpha_2} + \beta_1 = \alpha_2 - \alpha_1 = \omega_\alpha . \tag{3.18}$$

Таким образом, величина расхождения распределения ω_F численно совпадает с расхождением оптимизируемого параметра.

Интервальная оценка ожидания [m] здесь вычисляется по правилам, аналогичным (3.12), а расхождение ожидания ω_m с учетом условия (3.16) определяется следующим образом

$$\begin{aligned}\omega_m &= |\, m_2 - m_1 | = \\ &= \frac{1+2\beta_1}{2\alpha_1} - \frac{1+2\beta_2}{2\alpha_2} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2}\right) = \frac{\omega_\alpha}{2\alpha_1\alpha_2} .\end{aligned} \tag{3.19}$$

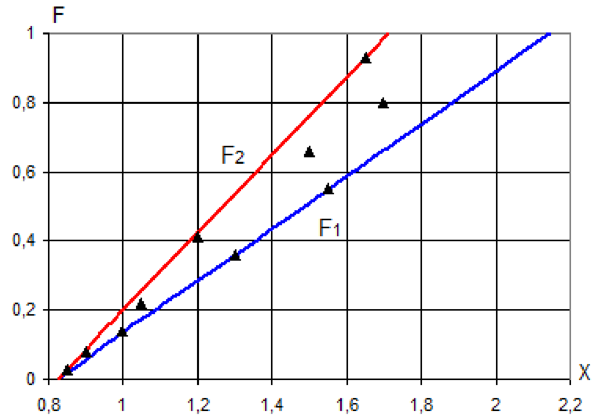

Рис. 3.2

Площадь области неопределенности S_F, как уже отмечалось, численно совпадает с этим же показателем ω_m.

Таким образом, все характеристики конического образа оказались непосредственно связаны с расхождением параметра ω_α, которое можно считать основной оценкой качества интервального приближения распределения конического вида.

Общей формой представления интервального образа равномерного распределения является трапеция. Эту модель распределения имеет смысл использовать, когда образ распределения в виде полосы или конуса вызывает сомнения. Идентификация такого распределения строится на основе общих ограничений (3.4) – (3.6). Поскольку конфигурация трапеции в данном случае может быть произвольной, то в качестве критерия приближения имеет смысл использовать значение ее площади (области неопределенности) S_F, численно совпадающей с расхождением ожиданий $\omega_m = m_1 - m_2$:

$$\begin{aligned}2\omega_m &= (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) = \\ &= \frac{1+2\beta_1}{\alpha_1} - \frac{1+2\beta_2}{\alpha_2} .\end{aligned} \tag{3.20}$$

Соответственно, идентификации распределения сводится к минимизации этого показателя

$$\min_{\{\alpha_1,\,\beta_1,\,\alpha_2,\,\beta_2\}} \omega_m \tag{3.21}$$

при соблюдении условий (3.4) – (3.6). Поскольку условия оптимизационной задачи линейны, а варьируемые параметры границ F_1 и F_2 не связаны между собой, то исходная задача (3.21) может быть разделена на две части, позволяющие определить каждую из границ образа отдельно:

$$F_1:\ \min_{\{\alpha_1,\,\beta_1\}} \frac{1+2\beta_1}{\alpha_1} \quad F_2:\ \max_{\{\alpha_2,\,\beta_2\}} \frac{1+2\beta_2}{\alpha_2}$$

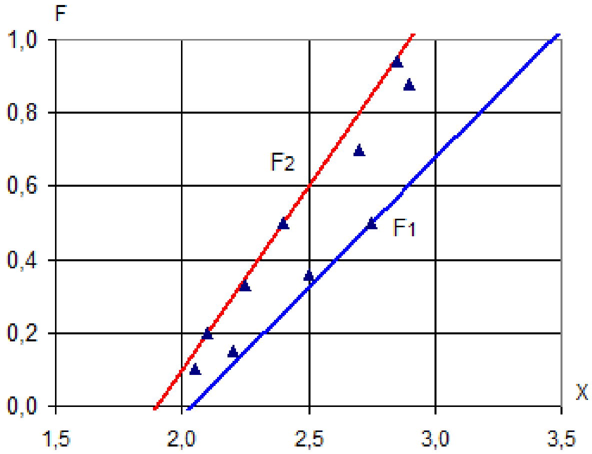

Рис. 3.3

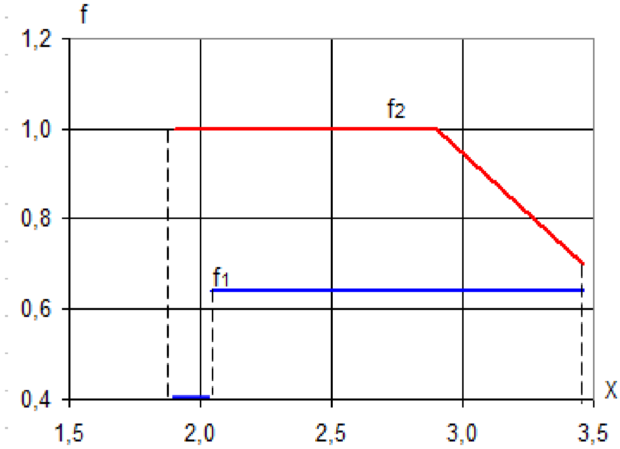

Рис. 3.4

$$F_1(x_i) = \alpha_1 x_i - \beta_1 \le P_i^{(1)};\; F_2(x_i) = \alpha_2 x_i - \beta_2 \ge P_i^{(2)}; \tag{3.22}$$

$$i = 1, 2, \ldots N;\; i = 1, 2, \ldots N;$$

$$\alpha_1 > 0;\; \alpha_2 > 0;$$

$$F_1(x_N) = \alpha x_N - \beta_1 \le 1.\; F_2(x_1) = \alpha x_1 - \beta_2 \ge 0.$$

Решения этих оптимизационных задач и вид трапеции (Рис. 3.3) будем оценивать по тем же показателям, что и ранее. Расхождение ожиданий ω_m и площадь трапеции S_F получаются непосредственно из решения задач (3.22). Расхождение распределения ω_F здесь можно определить путем сравнения разностей вероятностей на границах в точках, соответствующих $F_1 = 0$ и $F_2 = 1$, т. е. при $x = a_1$ и $x = b_2$.

$$\omega_F = \max\left\{ F_2\left(x = a_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right);\quad 1 - F_1\left(x = b_2 = \frac{1+\beta_2}{\alpha_2}\right) \right\};$$

$$0 < \omega_F \le 1. \tag{3.23}$$

Интервальное распределение при этом будет корректно, если $\omega_F < 1$, а области определения границ $\Omega_1 = [a_1, b_1]$ и $\Omega_2 = [a_2, b_2]$ пересекаются, т. е. при $a_1 < b_2$ или

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} < \frac{1+\beta_2}{\alpha_2}. \tag{3.24}$$

Последнее соотношение представляет собой обобщенное условие корректности интервальных образов для равномерного распределения.

Утверждение. Интервальный образ равномерного распределения общего вида будет корректным, если параметры его границ удовлетворяют условию (3.24).

В частности, если распределение имеет вид полосы, т. е. при $\alpha_1 = \alpha_2$, из соотношения (3.24) следует ранее оговоренное ограничение по корректности (3.11).

Полученные интервальные распределения [F] в принципе позволяют восстановить вид функций его плотности, также в интервалах [f] =[f_1, f_2]. Графический образ такой функции для модели распределения в виде трапеции представлен на Рис. 3.4. Положение нижней границы плотности f_1 в данном случае определяется диагональю трапеции как одного из элементов интервального множества распределений [F]. Построенная таким образом интервальная функция плотности [f] может представлять определенный интерес только с точки зрения качественного анализа характера интервального распределения.

Таким образом, для трех основных разновидностей интервальных моделей равномерного распределения здесь предложены схемы их идентификации в виде задач математического программирования, определены необходимые условия и критерии, основные показатели точности и качества полученных интервальных образов, необходимые условия корректности распределений, позволяющие судить о степени их практической пригодности. В качестве примера, иллюстрирующего возможности предложенной методики, проведем оценку качества стандартного генератора случайных чисел RND в среде Excel.

Этот генератор позволяет получить поток случайных чисел равномерно распределенных на интервале [0, 1]. Эксперимент проводился на выборках M = 20, 50, 100, 200, 500 и 1000 точек и на следующем наборе точек регистрации $\{x_i\} = \{0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9\}$, (N=9). Оценки вероятностей событий $\{P_i\}$, i = 1,2, … 9 определялись по обычной схеме, как относительный вес точек выборки, не превышающих порога регистрации x_i. Модель интервального распределения [F] = [F_1, F_2]

строилась при следующих допущениях, оговоренных в описании генератора:

– ноль распределения F_2 должно соответствовать левой границе интервала значений генератора, т. е. $F_2(0) = 0$,

– максимальное значение, единица распределения F_1 – правой границе, т. е. $F_1(1) = 1$.

Следствием этих допущений являются дополнительные ограничения на параметры распределения. В первом случае $a_2 = 0$ или, с учетом определения (3.2), $\beta_2 = 0$, а во втором $b_1 = 1$ или $\beta_1 = \alpha_1 - 1$. Оценке подлежат два параметра $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ на границах интервального распределения, которые принимают следующий вид

$$F_1(x) = \alpha_1 (x - 1) + 1; F_2(x) = \alpha_2 x. \quad (3.25)$$

В качестве критерия точности приближения здесь выберем площадь области неопределённости

$$S_F = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_1}\right). \quad (3.26)$$

В задаче идентификации распределения этот критерий можно заменить более простым эквивалентным выражением

$$\max_{\{\alpha_1, \alpha_2\}} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right)$$

$$\alpha_1 (x_i - 1) \le P_i - 1,\ \alpha_2 x_i \ge P_i,\ i = 1,2, \ldots 9; \quad (3.27)$$

$$\alpha_1 > 1,\ \alpha_2 > 1,$$

где в ограничениях предусмотрены условия полноты охвата статистики и корректности параметров. По результатам идентификации расхождение распределения ω_F оценивалось по аналогии с выражением (3.23)

$$\omega_F = \max \{ F_2(a_1) = \alpha_2 (1 - \frac{1}{\alpha_1}); \\ 1 - F_1(b_2) = \alpha_1 (1 - \frac{1}{\alpha_2}) \}. \quad (3.28)$$

Для каждой выборки проводилось по 10 экспериментов с различным составом исходных данных и оценок $\{P_i\}$. По результатам экспериментов определялось максимальное и среднее по выборке расхождения, $(\omega_F)_{\text{макс}}$ и $(\omega_F)_{\text{средн}}$. Полученные результаты представлены на Рис. 3.5 и могут служить основанием для оценки качества генератора RND. В частности, можно утверждать следующее:

- использование данного генератора на небольших выборках, не более 300–400 точек бессмысленно, поскольку отклонения от равномерности распределения при этом весьма велики;
- оценки расхождения по мере наращивания объема выборки ведут себя не монотонно. Это вызывает подозрения в существовании резонансов или цикличности при формировании потока случайных чисел, что крайне не желательно;
- предельная точность генератора гарантированно составляет не более 20 %, а в среднем – 6–7 %.

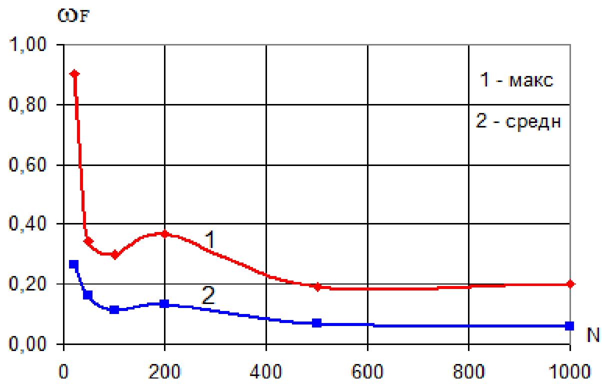

Рис. 3.5

Это реальная граница точности оценок вероятностей, других результатов вычислительных экспериментов или моделирования при использовании данного генератора.

4. Интервальные распределения экспоненциального вида

Экспоненциальные распределения относятся к числу наиболее широко используемых при описании редких явлений и событий в научных, инженерных и иных приложениях. В частности, при оценке надежности сложных устройств и оборудования [13], экологическом мониторинге, определении уровня загрязнений и дозиметрическом контроле [14], в разведке месторождений [6] и т. п. Перечисленные задачи часто решаются в условиях дефицита данных и существенной неопределенности измерений или оценок. В этой ситуации привлечение интервальной модели распределения представляется вполне оправданным и целесообразным.

Экспоненциальное распределение относится к категории однопараметрических и имеет следующий вид

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}; \quad x \ge 0, \quad (4.1)$$

где λ – параметр данного распределения. Будем строить интервальный образ этого распределения $[F(x)]$ на основе оговоренных ранее оценок вероят-

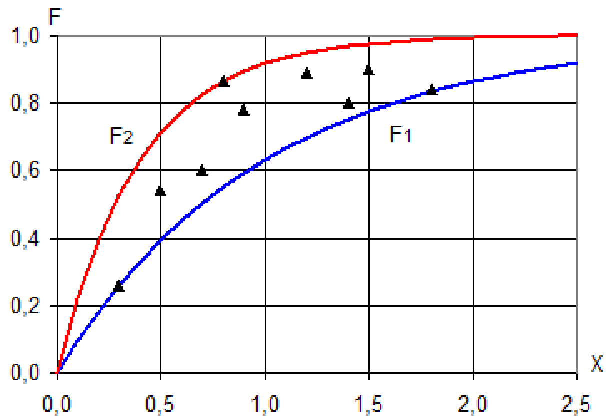

Рис. 4.1

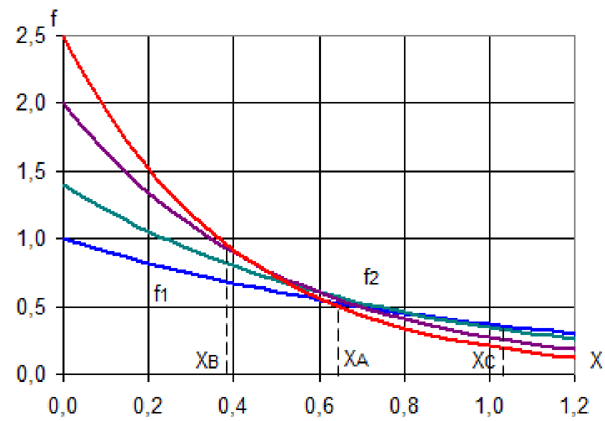

Рис. 4.2

ностей $[P_i]$ в точках регистрации x_i, т. е. набора $\{[P_i], x_i\}$, $i = 1,2, \dots N$. Представим вначале исходное распределение в линеаризованной форме

$$\ln \frac{1}{1-F(x)} = Z(x) = \lambda\, x \qquad (4.2)$$

и пересчитаем соответствующим образом статистику

$$\{\,[Z_i], x_i\} = \{\,[\ln\frac{1}{1-P_i}], x_i\};$$
$$[Z_i] = [Z_i^{(1)}, Z_i^{(2)}]\,;\; i = 1,2,\; \dots\, N. \qquad (4.3)$$

Задача интервальной идентификации распределения в этом случае сводится к оценке нижней и верхней границ параметра λ_1 и λ_2, определению границ конуса с вершиной в точке $x = 0$ при соблюдении условий полноты охвата статистики и минимизации расхождения значений параметра λ. Все это можно сформулировать в виде следующей задачи линейного программирования

$$\min\,(\lambda_2 - \lambda_1) \qquad (4.4)$$

$$\lambda_1 x_i \le Z_i^{(1)};\; \lambda_2 x_i \ge Z_i^{(2)};\;\; i = 1,2, \dots N;$$

$$\lambda_1 \ge 0;\; \lambda_2 \ge 0.$$

Решение данной задачи представляет собой интервал параметров $[\lambda] = [\lambda_1, \lambda_2]$, а разность значений его границ $\omega_\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ можно интерпретировать как расхождение по параметру.

Исходное экспоненциальное распределение (4.1) монотонно меняется по параметру λ. При этом распределения с различными значениями параметра заведомо не пересекаются, а границы интервального образа этого распределения соответствуют минимальной и максимальной оценкам параметра, т. е.

$$[F(x)] \;=\; [F_1(x),\, F_2(x)] \;=\; [1\text{-}\,e^{-\lambda_1 x},\, 1\text{-}\,e^{-\lambda_2 x}\,],\, x \ge 0 \qquad (4.5)$$

Качество интервального приближения будем оценивать по расхождению распределения $\omega_F(x) = \max \Delta F(x) = \max\,\{F_2(x) - F_1(x)\}$ при $x \ge 0$. При этом точка максимума x_{max} находится из очевидного условия:

$$\frac{d}{dx}\Delta F(x) = \frac{d}{dx}(e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x}) =$$
$$= \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} = 0\,. \qquad (4.6)$$

Откуда следует

$$x_{max} = \frac{\ln\lambda_2 - \ln\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \qquad (4.7)$$

Полученное решение $\omega_F(x) = \Delta F(x_{max})$ представляет собой гарантированную оценку точности интервального приближения и служит основным критерием соответствия статистики данному распределению (Рис. 4.1). Представленный на рисунке интервальный образ распределения соответствует интервалу параметров $[\lambda] = [1{,}01;\, 2{,}49]$. Значение точки максимума при этом равно $x_{max} = 0{,}611$, а расхождение составляет $\omega_F(x) = 0{,}326$.

Другой показатель качества приближения – расхождение ожиданий ω_m – определяется здесь как разность ожиданий на границах интервального распределения F_1 и F_2. Ожидания m_1 и m_2 для экспоненциального распределения равны обратной величине параметров λ_1 и λ_2 и, соответственно,

$$\omega_m = m_1 - m_2 = \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\,. \qquad (4.8)$$

В рассматриваемом примере $m_1 = 0{,}909$, $m_2 = 0{,}416$, а $\omega_m = 0{,}507$, что существенно превышает нижнюю границу ожиданий.

Интегральный показатель точности – площадь области неопределенности S_F – в данном случае численно совпадает с расхождением по ожиданию

$$S_F = \int_0^\infty (F_2(x) - F_1(x))\,dx =$$

$$= \int_0^\infty (e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x})\,dx = \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} = \omega_m, \qquad (4.9)$$

аналогично равномерному распределению. Однако это свойство не носит общего характера.

Полученные оценки качества распределения необходимо дополнить еще одним объективным показателем, характеризующим корректность по точности. Таким показателем может служить относительная величина расхождения интервального распределения. Распределение при этом можно считать корректным, если максимальное значения этого показателя не превышает единицы, т. е. когда оценка точности не превышает значений распределения на всей области его определения:

$$\max_{0<x<+\infty} \frac{\Delta F(x)}{F_1(x)} = \max_{0<x<+\infty} \left(\frac{F_2(x)}{F_1(x)} - 1 \right) < 1, \qquad (4.10)$$

или, когда кратность расхождения границ распределения не превышает двух,

$$\max_{0<x<+\infty} \frac{F_2(x)}{F_1(x)} < 2. \qquad (4.11)$$

Определим вначале условия, при которых достигается максимум выражения (4.11). Покажем, что отношение значение границ F_2 к F_1 является монотонно убывающей функцией по x,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{F_2}{F_1}\right) = \frac{f_2 F_1 - F_2 f_1}{(F_1)^2} < 0, \qquad (4.12)$$

где f_1 и f_2 плотности этих распределений. Это условие эквивалентно следующему неравенству

$$\frac{F_1}{f_1} < \frac{F_2}{f_2}. \qquad (4.13)$$

Нетрудно показать, что отношение экспоненциального распределения к его плотности

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{\lambda e^{-\lambda x}} = \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda x} - 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} x^k}{k!}, \qquad (4.14)$$

является монотонно возрастающей функцией по параметру λ, что подтверждает справедливость неравенства (4.12). Таким образом, максимальное значение показателя корректности достигается на левой границы области определения, т. е.

$$\max_{x>0} \frac{\Delta F(x)}{F_1(x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{(1 - e^{-\lambda_2 x})}{(1 - e^{-\lambda_1 x})} - 1 \right) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 < 1; \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 2. \qquad (4.15)$$

Утверждение. Интервальное экспоненциальное распределение будет корректно по точности, если отношение границ его параметра $\lambda_2/\ \lambda_1$ меньше двух.

Построенное интервальное распределение [F(x)] позволяет также восстановить интервальный образ его плотности [f(x)], как еще одной характеристики распределения, в виде множества его производных $f = F'$ на интервале $[\lambda_1, \lambda_2]$. Условие монотонности f(x, λ) по параметру λ здесь не соблюдается и интервальный образ плотности [f(x)] необходимо конструировать особо, исходя из общих свойств экспоненциального распределения. Как следует из примера на Рис. 4.2, интервальный образ [f(x)] определяется двумя фрагментарными огибающими: нижней $f_1(x)$ и верхней $f_2(x)$.

$$f_1(x) = \inf_{\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]} \lambda e^{-\lambda x}, \; f_1(x) = \sup_{\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]} \lambda e^{-\lambda x}. \qquad (4.16)$$

Первая из них $f_1(x)$ состоит из двух участков:

- фрагмента функции f(x, λ) на нижней границе параметра $f_1^{(1)}(x) = f(x, \lambda_1)$, $0 \le x \le x_A$ и
- фрагмента той же функции на верхней границе $f_1^{(2)}(x) = f(x, \lambda_2)$, $x > x_A$.

Положение точки пересечения x_A определяется из условия $f(x_A, \lambda_1) = f(x_A, \lambda_2)$, формально совпадающим с выражением (4.6). Соответственно, точка пересечения совпадает с положением максимума расхождения распределения, т. е. $x_A = x_{max}$.

Верхняя граница интервальной плотности $f_2(x)$ имеет более сложный вид и состоит из трех частей:

- фрагмента функции плотности на верхней границе параметра, т. е. $f_2^{(1)}(x) = f(x, \lambda_2)$, $0 \le x \le x_B$. – огибающей множества функции f(x) на интервале $\lambda\in[\lambda_1, \lambda_2]$ при $x_B < x < x_C$ и
- фрагмента функции плотности на нижней границе параметра $f_2^{(3)}(x) = f(x, \lambda_1)$, $x \ge x_C$.

Для детального определения положения верхней границы $f_2(x)$ необходимо уточнить координаты точек сопряжения x_B и x_C, а также вид огибающей $f_2^{(2)}(x)$. Определим положение каждой точки этой огибающей как пересечение двух функций плотности с близкими по значению параметрами, f(x, λ) и f(x, λ+Δ) при $\Delta \to 0$:

$$x = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\ln(\lambda+\Delta)-\ln(\lambda)}{(\lambda+\Delta)-\lambda} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\Delta}{\lambda}\right)}{\Delta} = \frac{1}{\lambda}. \quad (4.17)$$

Координаты точек x_B и x_C теперь можно определить по границам интервала параметров $[\lambda_1, \lambda_2]$

$$x_B = \frac{1}{\lambda_2}, \quad x_C = \frac{1}{\lambda_1}. \quad (4.18)$$

Их положение, как оказалось, численно с ожиданиями на границах интервального образа распределения F_1 и F_2, а сама огибающая $f_2^{(2)}(x)$ имеет вид гиперболы

$$f_2^{(2)}(x) = f\left(x, \lambda = \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}e^{-1}, \quad (4.19)$$

В целом границы интервальной плотности распределения [f (x)] можно определить следующим образом:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x,\lambda_1),\ 0 \le x \le x_A \\ f(x,\lambda_2),\ x > x_A \end{cases};$$
$$f_2(x) = \begin{cases} f(x,\lambda_2),\ 0 \le x \le x_B \\ \dfrac{1}{x}e^{-1},\ x_B > x > x_C \\ f(x,\lambda_1),\ x \ge x_C \end{cases}. \quad (4.20)$$

Полученные выражения позволяют получить общее представление о конфигурации интервальной функции [f (x)], ее заполнении, характере изменения показателя ширины и др. В частности, расхождение плотности здесь равно ширине интервала параметров $\omega_f = \lambda_2 - \lambda_1$. В некоторых случаях эти оценки могут оказаться полезным. Однако, в практическом плане большинство задач, связанных с определением интервальных вероятностей, квантилей, ожиданий и т. п. проще решать с помощью полученного ранее интервального распределения [F(x)].

5. Интервальное распределение Рэлея

Область приложения распределения Рэлея в основном связана с радиофизикой, радиолокацией и радионавигацией, где фактор неопределенности является существенным элементом в представлении результатов наблюдений и обосновании решений [13]. Исходное распределение Рэлея имеет следующий вид

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x \ge 0, \quad (5.1)$$

где σ – его параметр. Интервальный образ [F(x)] будем строить, как и ранее, по оценочным значениям вероятностей $[P_i]$ в соответствующих точках регистрации x_i, где i = 1,2, … N.

Представим вначале распределение Рэлея (5.1) в линеаризованной форме

$$Z(y) = \alpha\, y, \quad y = x^2, \quad Z(y) = \ln\frac{1}{1-F(\sqrt{y})},$$
$$\alpha = \frac{1}{2\sigma^2} \quad (5.2)$$

и пересчитаем надлежащим образом заданную статистику:

$$\{[Z_i],\ y_i\} = \{[\ln\frac{1}{1-P_i}],\ x_i^2\};\ [Z_i] = [Z_i^{(1)}, Z_i^{(2)}]\ . \quad (5.3)$$

Интервальная идентификация распределения здесь сводится к оценке нижней и верхней границ параметра α_1 и α_2, определяющих границы конуса с вершиной в точке y = 0, при условии полноты охвата статистики и минимизации расхождения параметра α, т. е.

$$\min(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (5.4)$$

$$\alpha_1\, y_i \le Z_i^{(1)}; \quad \alpha_2\, y_i \le Z_i^{(2)}; \quad i = 1,2,...N;$$

$$\alpha_1 \ge 0;\ \alpha_2 \ge 0.$$

Решением задачи является интервал $[\alpha] = [\alpha_1, \alpha_2]$, позволяющий восстановить интервальный образ распределения [F(x)] и его границы F_1 и F_2

$$[F(x)] = [F_1, F_2] = [\,1-e^{-\alpha_1 x^2},\ 1-e^{-\alpha_2 x^2}\,]. \quad (5.5)$$

В качестве основного критерия точности приближения, как и в случае экспоненциального распределения, будем использовать расхождение распределения, определяемое как максимальное расстояние между границами образа:

$$\omega_F(x) = \max \Delta F(x) = \max\{F_2(x) - F_1(x)\};\ x > 0.$$

Точка максимума x_{max} здесь находится из очевидного условия

$$\frac{d}{dx}\omega_F(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{-\alpha_1 x^2} - e^{-\alpha_2 x^2}\right) = 0;\ x > 0 \quad (5.6)$$

и вычисляется следующим образом

$$x_{max} = \sqrt{\frac{\ln\alpha_2 - \ln\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}}. \quad (5.7)$$

Значение $\omega_F(x) = \Delta F(x_{max})$ здесь также можно рассматривать как порог точности вероятностей, получаемых на основе этого распределения.

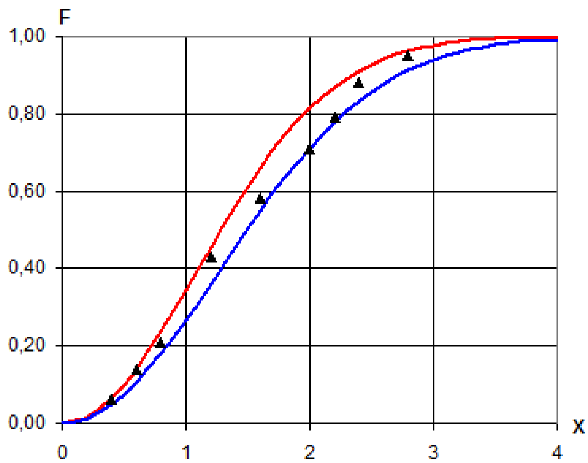

Рис. 5.1

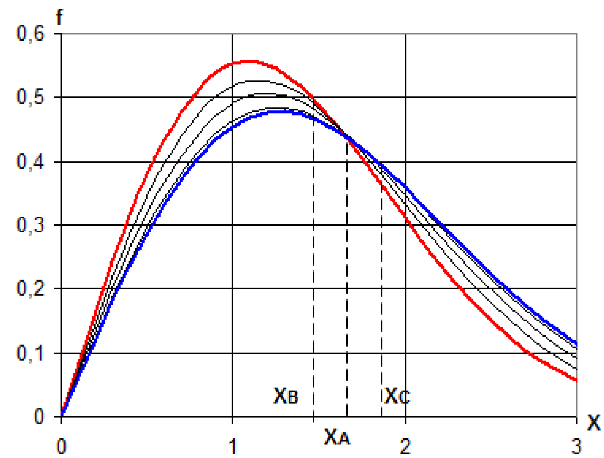

Рис. 5.2

С учетом монотонности распределения Рэлея по параметру интервальные оценки ожидания $[m_F]$ и их расхождение ω_F могут быть вычислены по границам интервала их значений

$$[m_F] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,[\sigma] = [\sqrt{\frac{\pi}{\alpha_2}},\ \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1}}],$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1}} - \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_2}}. \qquad (5.8)$$

Площадь области неопределенности S_F в данном случае численно равна половине ширины интервала ожидания ω_m

$$S_F = \int_0^\infty (F_2(x) - F_1(x))\,dx = \int_0^\infty (e^{-\alpha_1 x^2} - e^{-\alpha_2 x^2})\,dx = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1}} - \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_2}}\right) = \frac{1}{2}\omega_m \qquad (5.9)$$

В примере, представленном на Рис. 5.1, интервал параметра $[\alpha]$, полученный в результате идентификации, составил величину $[\alpha] = [0{,}310;\ 0{,}421]$. При этом, координата точки максимума расхождения равна $x_{max} = 1{,}661$, а само расхождение $\omega_F = 0{,}112$. Границы ожиданий здесь находятся в пределах $[m_F] = [2{,}732;\ 3{,}183]$, а их расхождение составляет величину $\omega_F = 0{,}451$ или 16,5 % от минимального значения. Соответственно, площадь области неопределенности равна $S_F = 0{,}226$. В совокупности эта группа показателей позволяет достаточно обоснованно судить о качестве полученной модели распределения и его пригодности к решению практических задач.

Дополним эти показатели критерием корректности интервального распределения. Напомним, что распределение можно считать корректным, если относительная величина расхождения ω_F в рамках интервального образа распределения $[F(x)]$ при любых значениях $x > 0$ не превышает единицы. Повторив выкладки аналогичные случаю экспоненциального распределения, нетрудно убедиться в совпадении условий корректности.

Утверждение. Интервальное распределение Рэлея будет корректно по точности, если отношение границ его параметра меньше двух, т. е. при $\alpha_2 / \alpha_1 < 2$.

Применительно к рассмотренному примеру это условие выполняется, $\alpha_2 / \alpha_1 = 1{,}358$.

Восстановим теперь интервальный образ плотности распределения $[f(x)]$ как множества производных распределения Рэлея на интервале его параметра $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$. Границы образа представляют собой две составные огибающие f_1 и f_2 (Рис. 5.2):

$$f_1(x) = \inf_{\alpha\in[\alpha_1,\alpha_2]} 2\alpha x\, e^{-\alpha x^2},\quad f_2(x) = \sup_{\alpha\in[\alpha_1,\alpha_2]} 2\alpha x\, e^{-\alpha x^2} \qquad (5.10)$$

Нижняя граница f_1 состоит из двух частей $f_1^{(1)}$ и $f_1^{(2)}$, пересекающихся в точке x_A и образованных одной и той же функцией плотности распределения:

- при минимальном значении параметра, $f_1^{(1)} = f(x,\alpha_1),\ 0 \le x \le x_A$
- и максимальном, $f_1^{(1)} = f(x,\alpha_2),\ x > x_A$.

Условие пересечения $f(x_A, \alpha_1) = f(x_A, \alpha_2)$ совпадает с выражением (5.6) и, соответственно, точка пересечения $x_A = x_{max}$.

Верхняя граница $f_2(x)$ здесь также состоит из трех частей:

- фрагмента функции плотности на верхней границе параметра, $f_2^{(1)}(x) = f(x, \alpha_2),\ 0 \le x \le x_B$,
- огибающей $f_2^{(2)}(x)$ распределения $f(x, \alpha)$ на интервале $\alpha\in[\alpha_1, \alpha_2]$ при] при $x_B < x < x_C$,

- и фрагмента функции плотности на нижней границе параметра $f_2^{(3)}(x) = f(x, \alpha_1)$, $x \ge x_C$.

Определим теперь вид неизвестной огибающей $f_2^{(2)}(x)$ и положение точек сопряжения фрагментов x_B и x_C.

Точки огибающей $f_2^{(2)}(x)$ вновь будем искать на пересечении функций плотности с близкими по значению параметрами, $f(x, \alpha)$ и $f(x, \alpha+\Delta)$, используя выражение (5.7) и следующий предельный переход

$$x = \lim_{\Delta\to 0} \sqrt{\frac{\ln(\alpha+\Delta) - \ln\alpha}{(\alpha+\Delta)-\alpha}} = \\ = \lim_{\Delta\to 0} \sqrt{\frac{\ln(1+\frac{\Delta}{\alpha})}{\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}. \tag{5.11}$$

Координаты точек x_B и x_C теперь можно определить следующим образом

$$x_B = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}, \quad x_C = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}. \tag{5.12}$$

Огибающая $f_2^{(2)}(x)$ при этом будет иметь вид квадратичной гиперболы

$$f_2^{(2)}(x) = f(x, \alpha = \frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x^2}e^{-1}. \tag{5.13}$$

Построенная таким образом интервальная функция плотности распределения [f (x)] может послужить основой для более детального анализа вероятностных оценок при использовании интервального распределения Рэлея.

Отметим еще раз, что общая схема интервальной идентификации и оценки показателей распределения Рэлея во многом совпадает с экспоненциальной моделью.

6. Интервальное представление квазинормального распределения.

В статистическом анализе нормальное распределение играет особую роль, имеющую весомое теоретическое обоснование [14]. Оно считается экстремальным для случайных величин с неограниченным диапазоном, но при конечной дисперсии. Практическая пригодность такого распределения обычно не подвергается сомнению, а его идентификация сводится к вычислению ожидания и дисперсии. Если оценки этих параметров представлены интервалами, то нетрудно восстановить интервальную модель такого распределения, хотя, строго говоря, считать ее интервальным образом нельзя.

Осложнения возникают, когда статистика оказывается заведомо локализована, хотя общие свойства распределения близки к нормальному. В частности, это характерно для метрологии в машиностроении [15], статистики в медицине [8] и др. Использование усеченных распределений здесь оказывается неудобным. Поэтому прибегают к упрощенным квазинормальным моделям распределений, схожим по своим свойствам с нормальным. Такими моделями могут быть полиномиальные распределения специального вида.

В качестве базовой модели распределения F(x) будем рассматривать полином третьей степени на диапазоне [0, 1], удовлетворяющий следующим необходимым условиям:

- значения F(x) неотрицательны при $x\in [0,1]$, причем $F(0) = 0$ и $F(1) = 1$;
- плотность распределения также неотрицательна $f(x) \ge 0$ и принимает нулевые значения на границах области определения, $f(0) = f(1) = 0$;
- f(x) должна быть симметрична относительной средней точки интервала [0,1] и иметь максимум в этой точке.

Нетрудно убедиться, что этим требованиям удовлетворяет полином следующего вида:

$$F(x) = 3x^2 - 2x^3,\ x\in [0,1]. \tag{6.1}$$

Привязка этой модели к конкретным условиям, её смещение и деформация осуществляются по общим правилам линейных преобразований распределений. Если диапазон значений случайной величины установлен [a, b], a < b, то идентификация сводится к следующему преобразованию полинома:

$$F(x) = 3\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 - 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^3; \\ x \in [a,b]. \tag{6.2}$$

Однако, вопрос о соответствии статистики данной модели распределения остался открытым. Для ответа на него воспользуемся процедурой интервальной идентификации на основе оценочных вероятностей, $\{[P_i], x_i\}$, $i = 1,2, \ldots N$. При этом, как и ранее, будем строить границы интервального образа $[F] = [F_1, F_2]$ применительно к модели (6.1). Фактически это сводится к оптимизации интервалов $\Omega_1 = [a_1, b_1]$ и $\Omega_2 = [a_2, b_2]$, устанавливающих область определения каждой из границ F_1 и F_2.

Точность интервального приближения будем оценивать по расхождению ожиданий на границах, $\omega_m = m_1 - m_2$. С учетом свойства симметрии модели распределения (6.1)

$$\omega_m = \frac{a_1+b_1}{2} - \frac{a_2+b_2}{2}. \tag{6.3}$$

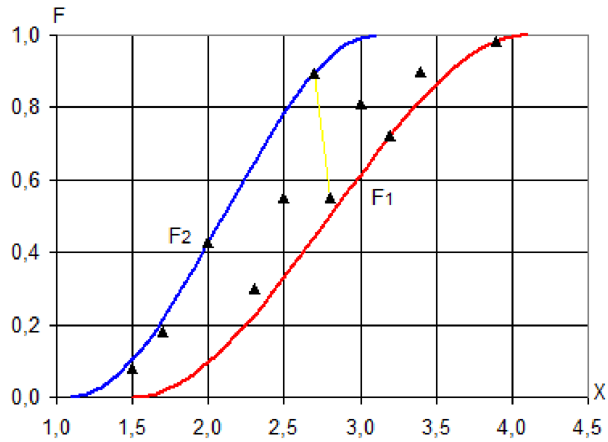

Рис. 6.1

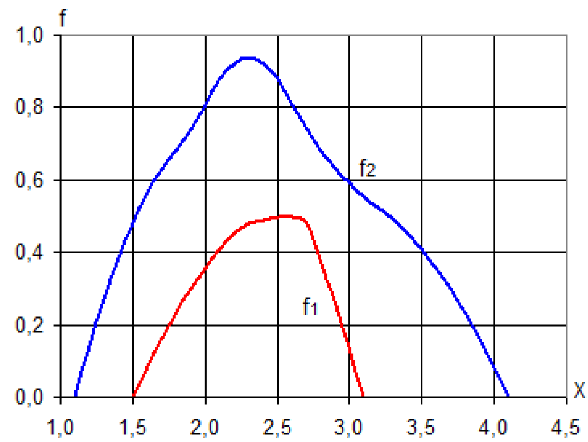

Рис. 6.2

Задача интервальной идентификации квазинормального распределения будет заключаться в минимизации критерия

$$\min_{\{a_1,b_1,a_2,b_2\}} \omega_m \tag{6.4}$$

при соблюдении условий полноты охвата статистики

$$y_i = \frac{x_i - a_1}{b_1 - a_1};\ 3y_i^2 - 2y_i^3 \le P_i^{(1)};\ i = 1,2,\ \dots\ N; \tag{6.5}$$

$$z_i = \frac{x_i - a_2}{b_2 - a_2};\ 3z_i^2 - 2z_i^3 \ge P_i^{(2)};\ i = 1,2,\ \dots\ N;$$

и условия корректности границ интервального образа ($F_1 \le F_2$) в виде следующих ограничений на параметры:

$$a_2 \le a_1;\ b_2 \le b_1. \tag{6.6}$$

Решение данной оптимизационной задачи осложнено ее нелинейностью. Существенное значение при этом будет играть выбор начальной точки приближения, которую следует определить на этапе предварительного анализа задачи.

Полученное таким образом решение (Рис. 6.1) позволяет судить о соответствии выбранной модели распределения и статистики на основе характеристик построенного интервального образа [F]. Расхождение ожиданий ω_m при этом определяется непосредственно в результате идентификации распределения. Площадь области неопределенности S_F здесь вычисляется на основе полученных оценок параметров распределений F_1 и F_2

$$S_F = \int_{a_1}^{b_1} \left(3\left(\frac{x-a_1}{b_1-a_1}\right)^2 - 2\left(\frac{x-a_1}{b_1-a_1}\right)^3 \right) dx + (b_2 - b_1) -$$

$$-\int_{a_2}^{b_2} \left(3\left(\frac{x-a_2}{b_2-a_2}\right)^2 - 2\left(\frac{x-a_2}{b_2-a_2}\right)^3 \right) dx =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{b_1 - a_1}{2} + (b_2 - b_1) - \frac{b_2 - a_2}{2} = \\ &= \frac{(a_2 + b_2) - (a_1 + b_1)}{2} = \omega_m \end{aligned} \tag{6.7}$$

и численно совпадает с оценкой расхождения ожиданий. Третий показатель точности приближения – максимальное расхождение распределений ω_F – определяется в точке совпадения значений производных от распределений F_1 и F_2 (значений плотностей этих распределений f_1 и f_2)

$$\frac{x-a_1}{(b_1-a_1)^2} - \frac{(x-a_1)^2}{(b_1-a_1)^3} = \frac{x-a_2}{(b_2-a_2)^2} - \frac{(x-a_2)^2}{(b_2-a_2)^3} \tag{6.8}$$

как решение следующего квадратного уравнения

$$x_{max}:\ C_2 x^2 + C_1 x + C_0 = 0, \tag{6.9}$$

где $C_2 = \dfrac{1}{(b_2-a_2)^3} - \dfrac{1}{(b_1-a_1)^3}$;

$$C_1 = \frac{a_1+b_1}{(b_1-a_1)^3} - \frac{a_2+b_2}{(b_2-a_2)^3};$$

$$C_0 = \frac{a_2 b_2}{(b_2-a_2)^3} - \frac{a_1 b_1}{(b_1-a_1)^3}.$$

Расхождение распределений при этом вычисляется следующим образом $\omega_F = F_2(x_{max}) - F_1(x_{max})$.

В рассмотренном примере (Рис. 6.1), где $\Omega_1 = [1{,}5;\ 4{,}1]$ и $\Omega_2 = [1{,}1;\ 3{,}1]$, точка максимума расхождения $x_{max} = 2{,}59$, а само значение расхождения составляет величину $\omega_F = 0{,}458$. При этом, расхождение ожиданий $\omega_m = 0{,}7$, а его относительная величина $\omega_m / m_1 = 0{,}33$. Площадь области неопределенности $S_F = 0{,}7$. В совокупности эти характеристики вызывают большие сомнения в выборе данной модели распределения.

Оценка расхождения ω_F имеет смысл ($\omega_F < 1$), если области определения Ω_1 и Ω_2 границ F_1 и F_2 пересекаются, $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \varnothing$ или при условии $a_1 < b_2$. В противном случае $\omega_F = 1$, а само интервальное распределение [F] не соответствует необходимому требованию по точности.

Утверждение. Интервальное квазинормальное распределение будет корректно по точности, если полученные в результате идентификации интервалы $\Omega_1 = [a_1, b_1]$ и $\Omega_2 = [a_2, b_2]$ пересекаются, а их крайние точки удовлетворяют условию $a_1 < b_2$.

В качестве дополнительной характеристики интервального распределения можно рассматривать интервальный образ [f (x)] его плотности

$$f(x) = 6\frac{x-a}{(b-a)^2}\left(1-\frac{x-a}{b-a}\right). \tag{6.10}$$

Границы этого образа $f_1(x)$ и $f_2(x)$ представляют собой огибающие функции плотности (6.10) на полученном множестве параметров распределения. Положение этих границ может быть найдено как решение пары оптимизационных задач для соответствующих диапазонов переменной:

$$\begin{gathered} f_1(x): \\ \min_{\{a,b\}} f(x); \quad a_1 \le a \le a_2; \quad b_1 \le b \le b_2; \\ x \in \Omega_1 \cap \Omega_2 = [a_1, b_2]. \end{gathered} \tag{6.11}$$

$$\begin{gathered} f_2(x): \\ \max_{\{a,b\}} f(x); \quad a_1 \le a \le a_2; \quad b_1 \le b \le b_2; \\ x \in \Omega_1 \cup \Omega_2 = [a_2, b_1]. \end{gathered} \tag{6.12}$$

При $x \in [a_2, a_1] \cup [b_2, b_1]$ значения нижней границы $f_1(x) = 0$. Полученный интервальный образ плотности [f(x)] имеет довольно вычурный вид (Рис. 6.2). В данном примере этот образ построен на интервалах параметров $a \in [1,1; 1,5]$ и $b \in [3,1; 4,1]$. Общий анализ интервальной функции плотности [f(x)] представляется затруднительным. Однако качество этой функции можно оценить ее расхождением:

$$\omega_f = \max_{\{x \in \Omega_1 \cup \Omega_2\}} (f_2(x) - f_1(x)) \tag{6.13}$$

или его относительной величиной

$$\omega_{f0} = \max_{\{x \in \Omega_1 \cup \Omega_2;\ f_2(x) > 0\}} \frac{f_2(x) - f_1(x)}{f_2(x)} \tag{6.14}$$

В приведенном примере значения этих оценок оказались весьма велики: $\omega_f = 0,556$ и $\omega_{f0} = 0,848$. Таким образом, с точки зрения свойств интервальной плотности выбор модели распределения также является сомнительным.

Рассмотренная здесь процедура интервальной идентификации не замыкается только на базовой модели распределения (6.1). Она позволяет также варьировать вид интервального образа путем введения дополнительных ограничений и связей между параметрами. В частности, если предполагается, что начальные или конечные точки границ распределения F_1 и F_2 совпадают, то необходимо ввести ограничения $a_1 = a_2$ или $b_1 = b_2$. Если интервальный образ [F] необходимо представить в виде полосы, то дополнительно вводится условие $a_1 - a_2 = b_1 - b_2$ и т. д. В ряде случаев подобные ограничения могут оказаться полезными и конструктивными.

7. Интервальное представление полиномиальных распределений общего вида

Частный случай полиномиального распределения был рассмотрен в предыдущем разделе. Однако, возможности полиномиальных моделей существенно шире, особенно в приложениях.

Восстановление распределения вероятностей всегда предполагает два момента: выбор вида (модели) распределения и определение его параметров. Существующие в настоящее время процедуры идентификации распределений имеют надежную теоретическую и методическую основу. Что же касается исходной модели распределения, то ее выбор, привязка к конкретным ситуациям или явлениям зачастую носит эвристический характер. Это наиболее характерно для малоизученных, слабо формализованных областей знаний. В частности, для задач медицинской диагностики [7,8]. Выбор модели распределения при этом обычно строится на качественном анализе частотной характеристики проявления событий, т. е. модели плотности восстанавливаемого распределения. Это далеко не всегда приводит к успеху, главным образом из-за недостаточной представительности статистики, а также погрешностей в оценках частот событий. В результате, частотная характеристика становится изрезанной и неопределенной, что весьма затрудняет ее сопоставление с известными стандартными распределениями. Сглаживание в этом случае рекомендуется применять исключительно к интегральной частотной характеристике [14]. Однако установить вид распределения по такой характеристике практически невозможно.

Наиболее простой и реалистичный выход из этой ситуации заключается в привлечении полиномов общего вида для аппроксимации распределения и последующего восстановления сглаженной модели

Таблица 1

x i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$P^{(1)}$ i	0,000	0,033	0,128	0,292	0,507	0,671	0,825	0,880	0,922	0,955	1,000
$P^{(2)}$ i	0,000	0,087	0,198	0,362	0,571	0,790	0,863	0,945	0,980	0,986	1,000

его плотности. Использование при этом интервального приближения позволяет более обоснованно подойти к выбору стандартного распределения (если это возможно), а также оценить возможные дефекты статистики. В принципе, полученное распределение можно использовать в качестве рабочего, если его подгонка под какой-либо стандарт оказывается невозможна или нежелательна.

Полиномиальные модели распределений достаточно универсальны и позволяют получить практически любую форму плотности этих распределений. Если число точек регистрации на интегральной частотной характеристике равно N, то с помощью полинома степени K = N – 1 можно получить идеальную аппроксимацию распределения на заданной статистике. Однако, очевидно, что эта модель заведомо не будет удовлетворять основным требованиям, предъявляемым к распределениям вероятностей. В практическом плане достаточно ограничится полиномами третьей – четвертой степени, $K \le 4$. При этом удается выявить все основные особенности распределения: его смещение по оси ординат, тренды, положение возможных экстремумов, точки перегиба, что характерно для унимодальных распределений и ряд других. Более высокие степени полинома существенно не влияют на форму распределения, однако, требуют дополнительной статистики, что в условиях дефицита данных нежелательно.

Для идентификации полиномиального распределения

$$F(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ \ldots \\ \ldots + \alpha_K x^K; \qquad K \le N - 1. \tag{7.1}$$

будем использовать, как и ранее, набор интервальных оценок вероятностей $[P_{i]} = [P_i^{(1)}, P_i^{(2)}]$ в заданных точках регистрации x_i, i = 1,2, … N, а интервальный образ распределения [F(x)] будем искать в виде простой интервальной регрессии, $[F(x)] = F(x) + \omega_F\,[e]$, где ω_F – показатель ширины образа или расхождение распределения, а [e] = [0,1] – базисный интервал.

Процедура интервальной идентификации предполагает в первую очередь соблюдение условия полноты охвата статистики

$$F(x_i) = \sum_{k=0}^{K} \alpha_k x_i^k \le P_i^{(1)};$$
$$F(x_i) \ + \omega_F = \sum_{k=0}^{K} \alpha_k x_i^k + \omega_F \ge P_i^{(1)}; \tag{7.2}$$
$$i = 1,2,\ \ldots\ N\,;$$

Поскольку нас интересует главным образом форма распределения, то имеет смысл в качестве ее прообраза выбрать среднюю линию интервального распределения. Соответственно, это распределение должно удовлетворять следующим необходимым условиям:

– неотрицательности значений в точках регистрации

$$F(x_i) + \frac{\omega_F}{2} = \sum_{k=0}^{K} \alpha_k x_i^k + \frac{\omega_F}{2} \le P_i^{(1)}; \ge 0; \\ i = 1,2,\ \ldots\ N; \tag{7.3}$$

– и неотрицательности производных (плотности распределения)

$$\frac{d}{dx} F(x_i) = \sum_{k=1}^{K} k \alpha_k^{(1)} x_i^{k-1} \ge 0;\ \ i = 1,2\ \ldots\ N\,. \tag{7.4}$$

Если область определения распределения заведомо установлена, например, по крайним точкам регистрации x_1 и x_N, то систему ограничений необходимо дополнить краевыми условиями:

$$F(x_1) + \frac{\omega_F}{2} = \sum_{k=0}^{K} \alpha_k x_1^k + \frac{\omega_F}{2} = 0; \\ F(x_N) + \frac{\omega_F}{2} = \sum_{k=0}^{K} \alpha_k x_N^k + \frac{\omega_F}{2} = 1. \tag{7.5}$$

Таким образом, процедура идентификации сводится к минимизации расхождения

$$\min_{\{\alpha_k\}} \ \ \omega_F \tag{7.6}$$

при соблюдении условий (7.2) – (7.5).

Рассмотрим особенности реализации этой процедуры на примере восстановления распределения для одной из задач медицинской диагностики (иден-

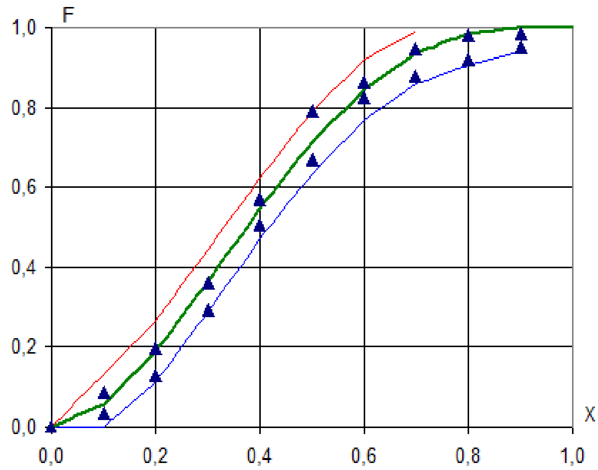

Рис. 7.1

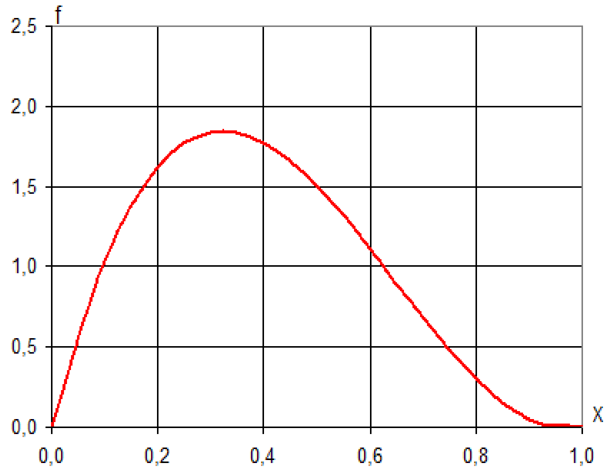

Рис. 7.2

тификации бластных клеток крови). Исходные данные были получены по результатам исследований с использованием аппаратно-программного комплекса АТЛАНТ-ГЕМ [7] для нескольких серий измерений. Предварительно эти данные были нормированы (что, как известно, не влияет на общий вид распределения) и представлены в виде интервальных оценок вероятностей на диапазоне [0,1]:

В качестве образующей функции F(x) модели распределения рассматривался полином 4-ой степени (K = 4), а с учетом ограничения на область определения, условия (7.5) были упрощены:

$$\alpha_0 + \frac{\omega_F}{2} = 0; \qquad \sum_{k=0}^{4} \alpha_k + \frac{\omega_F}{2} = 1. \tag{7.7}$$

Решение задачи интервальной идентификации позволило получить простой интервальный образ распределения с вполне удовлетворительным расхождением ω_F = 0,15 и одновременно определить оптимальные значения коэффициентов полинома:

$$\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 0{,}01,\ \alpha_2 = 6{,}41,$$
$$\alpha_3 = -8{,}83,\ \alpha_4 = 3{,}41.$$

Графический образ полученного интервального распределения и его средней линии представлены на Рис. 7.1. По средней линии интервального распределения теперь нетрудно восстановить функцию его плотности (Рис. 7.2) и, возможно, тип подходящего стандартного распределения. В данном случае оказалось, что подходящим можно считать распределение Рэлея по следующим качественным признакам: линейный начальный участок, пик и ниспадающая часть экспоненциального вида. Более точные оценки соответствия данному распределению можно получить по результатам его интервальной идентификации с помощью ранее рассмотренной методики.

8. Признаки стационарности и изменчивости интервальных распределений

Понятие стационарности обычно используется применительно к случайным процессам. Однако его в равной мере можно отнести и к статистике, имея в виду пополнение, корректировку, редактирование и любые другие изменения состава данных или значений ее отдельных элементов. Под слабым условием стационарности при этом понимается совпадение значений ожидания и дисперсии случайной величины. Сильное условие стационарности предполагает неизменный вид функции распределения и его параметров [11]. Применительно к статистике оба этих условия практически невыполнимы, поскольку любые изменения базы данных неизбежно ведут к искажению параметров распределения и его характеристик. Иными словами, само понятие стационарности в этом случае лишено смысла. В принципе, можно ввести пороги толерантности по контролируемым параметрам, но тогда стационарность становится условной и субъективной, что крайне нежелательно.

Преодолеть это осложнение и достаточно просто можно, используя интервальный подход к решению задач статистического анализа [9]. Признаки устойчивости и изменчивости распределения вероятностей здесь устанавливаются на основе достаточных статистик или активных ограничений, определяемых по результатам интервальной идентификации.

Зафиксируем момент t формирования набора исходных ограничений R_t и в рамках этого набора каждому из ограничений присвоим уникальный номер (m) в списке, длиной M_t.

$$R_t = (r_1^{(t)},\ \dots\ r_m^{(t)},\ \dots\ r_{M_t}^{(t)})\,. \tag{8.1}$$

При последующих изменениях условий идентификации эти уникальные номера будем сохранять.

Число активных элементов из R_t (строгих равенств) определяется количеством идентифицируемых параметров K. Соответственно, на момент t по результатам решения задачи идентификации можно сформировать (по номерам) список активных ограничений $G_t \subset R_t$, определяющих вид интервального образа распределения, $G_t = (g_1^{(t)}, g_2^{(t)}, \ldots g_K^{(t)})$, $g_k^{(t)} \in \{1,2, \ldots M_t\}$, где k = 1,2, … K. Список G_t удобно представить в упорядоченном виде, $g_1^{(t)} < g_2^{(t)} < \ldots < g_K^{(t)}$. Активным ограничениям $g_k^{(t)}$ соответствуют определенные значения оценочных вероятностей, образующие достаточную статистику и однозначно определяющие вид интервального распределения.

Зафиксируем два момента времени t_1 и t_2 ($t_1 < t_2$), которым соответствуют два списка активных ограничений G_{t1} и G_{t2}. Сопоставляя эти списки нетрудно прийти к следующему заключению.

Утверждение. Интервальное распределение будет стационарно в момент t_2 относительно t_1, если списки активных ограничений в эти моменты совпадают, т. е. $G_{t1} = G_{t2}$. В противном случае – модель распределения не стационарна.

Таким образом, этот список G_t можно рассматривать как объективный качественный критерий стационарности или изменчивости интервального распределения.

9. Заключение

Проблему оценки качества идентификации моделей, в том числе и распределений вероятностей, часто относят к категории второстепенных при решении практических задач. Тем не менее, очевидно, что успешные решения во многом определяются именно точностью описания модели объекта или ситуации. Особенно, когда речь идет о надежности этих решений в условиях неопределенности. В данной работе представлена достаточно универсальная методика определения вида интервальных распределений и оценки их показателей точности приближения. Эти оценки позволяют более осмотрительно подойти к прогнозированию ситуации с учетом доступной на текущий момент информации, а также планированию объективно обоснованных и надежных решений в будущем.

Литература

1. *Walley P., Fine T. L.* Towards to a Frequents Theory of Upper and Lower Probability. – Annals of Statistic 10, 1982
2. *Williamson R. C.*, *Downs T.* Probabilistic Arithmetic: numerical methods for calculating convolutions and dependency bounds. International Journal of Approximate Reasoning 4, 1990
3. *Kyburg H. E.*. Interval Valued Probabilities, 1998 – эл. ресурс: http://ippserv/rug/ac/be/ documentation/interval_prob/interval_prob.html
4. *Стернин М. Ю.*, *Чугунов Н. В.*, *Шепелев Г. И.* Учет неопределенности экспертных знаний: синтез интервального и вероятностного подхода. – Информационные технологии и вычислительные системы, № 4, 2005
5. *Товб А. С.*, *Ципес Г. Л.* Управление проектами. Стандарты, методы, опыт. М.: «Олимп-Бизнес», 2003.
6. *Пороскун В. И.*, *Стернин М. Ю.*, *Шепелев Г. И.* Система поддержки экспертных решений: оценки запасов углеводородов. – Искусственный интеллект, № 2, 2004
7. *Никитаев В. Г.* и др. Компьютерные системы гематологической диагностики. М.: ФГУП «Цнииатоминформ», 2006.
8. *Подружко А. С.* Интервальный метод классификации состояний в задачах медицинской диагностики. – Труды ИСА РАН, т.61, вып.4, 2011.
9. *Подружко А. С.*, *Подружко А. А.* Интервальное представление надежных регрессий. ИСА РАН. Динамика неоднородных систем. Вып. 10 – М.: КомКнига, 2006
10. Крамер Г. Математические методы статистики. 2-е издание – М.: Мир, 1975
11. *Айвазян С. А.*, *Енюков И. С.*, *Мешалкин Л. Д.* Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных. Справочное издание. – Финансы и статистика, 1983
12. *Подружко А. С.*, *Подружко А. А.* Параметрический и вариационный подход к решению задач надежного прогнозирования. ИСА РАН. Динамика неоднородных систем. Вып.14 – М.: Изд-во ЛКИ, 2010
13. *Перов А. И.* Статистическая теория радиотехнических систем. – М.: Радиотехника, 2003
14. *Худсон Д.* Статистика для физиков. – М:. Изд-во Мир, 1979
15. *Зайцев С. А.*, *Куранов А. Д.*, *Толстов А. Н.* Допуски, посадки и технические измерения в машиностроении. – Издательский центр «Академия», 2004.

Подружко Александр Степанович. С. н. с., к. т. н. Окончил МИФИ в 1969г. Количество печатных работ: более 70. Область научных интересов: оптимизационное моделирование, вариационные методы статистики, интервальный анализ, системы поддержки принятия решений, риск-менеджмент. E-mail: ASP45ASP45@gmail.com

Никитаев Валентин Григорьевич. Зав. кафедрой Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». Профессор, д. т. н. Окончил Московский горный институт в 1967 г. Количество печатных работ: более 200. Область научных интересов: распознавание образов, цифровая обработка изображений, системы поддержки принятия решений, экспертные системы. E-mail: VGNikitayev@mephi.ru

Проничев Александр Николаевич. Доцент кафедры Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», к. т. н. Окончил МИФИ в 1982 г. Количество печатных работ: более 100. Область научных интересов: распознавание образов, цифровая обработка изображений, системы поддержки принятия решений, экспертные системы. E-mail: ANPronichev@mephi.ru

Чистов Кирилл Сергеевич. Доцент кафедры Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», к. т. н. Окончил МИФИ в 2002 г. Количество печатных работ: более 40. Область научных интересов: распознавание образов, цифровая обработка изображений, системы поддержки принятия решений, экспертные системы. E-mail: Kirill520@yandex.ru