

# Задача проективно инвариантного описания овалов с неявно выраженной центральной и осевой симметрией и принцип двойственности Пюккера\*

Г. П. АКИМОВА, Д. С. БОГДАНОВ, П. А. КУРАТОВ

**Аннотация.** Статья посвящена обзору алгоритмических подходов, предложенных для решения задачи проективно инвариантного описания овалов (плоских гладких выпуклых кривых), обладающих симметрией двух родов, декартовы признаки которой утрачены при центральном проецировании оптикой системы технического зрения. Успешная детекция элементов симметрии (образа оси либо образа центра симметрии) позволяет использовать их в качестве опорных структур при формировании описания фигуры, не чувствительного к смене ракурса регистрации. Идеи, развитые для поиска элементов симметрии, базируются на ряде аналогий с «полюс-полярным соответствием», известным как принцип двойственности Пюккера.

**Ключевые слова:** овал, полюс, поляр, проективное преобразование, вурф, гармоническое отношение.

## Введение

Задача инвариантного к перспективным искажениям распознавания плоских гладких кривых исследуется, начиная с 80-х годов XX века, так и не дойдя до стадии завершения. Интенсивность теоретических и инженерных попыток ее решения в настоящее время возросла, что обусловлено, в первую очередь, увеличением запросов на автоматизацию когнитивных процессов, и обеспечено прогрессирующей производительностью вычислительных систем. В большинстве применяемых методов сравнения, совмещения и опознания контуров используется поточечная корреспонденция, что само по себе является весьма сложной специфической задачей, некорректность которой в ряде постановок компенсируется либо за счет накопления динамической статистики, либо «отбором задач под объект» – с надежно детектируемыми «опорными его признаками» (полигональная и полиэдральная модели). Однако, некоторая исследовательская и экспериментальная деятельность проводится и для создания алгоритмов инвариантной репрезентации гладких фигур. В этом

ряду особое место занимают исследования П. П. Николаева, с оригинальной концепцией привлечения свойств симметрии гладких фигур в качестве базиса для их проективно инвариантного описания. Перечислим несколько направлений в создании теоретических основ для практики распознавания, попытки развития которых продолжаются на протяжении ряда лет, что в итоге поможет соотнести обсуждаемый подход с иными идеями решения важной задачи анализа гладких кривых.

1. Поиск проективно инвариантных точек для формирования глобального проективного базиса, в частности, по точкам перегиба на вогнутости кривой [1–3]. Для строго выпуклых гладких кривых (овалов) в качестве опорных элементов могли бы послужить *секстатические* точки, но для них пока не предложен надежный алгоритм детекции.

2. Привлечение дифференциальных инвариантов (ДИ). При допущении, что кривая задана с высокой точностью, предлагается строить локальные проективные ДИ, образующие проективно инвариантную сигнатуру овала [4–7]. Сильной стороной подхода является его нечувствительность к окклюзии, однако, вычисление ДИ подразумевает возможность оценки на кривой производных восьмого порядка, что абсолютно нереально для контуров, задаваемых на дискретной сетке.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13–01–12107).

3. *Использование теоремы о шести вершинах* [8]. Теорема декларирует для овальной кривой наличие на ее контуре не менее шести «точек квадратичного перегиба», успешную локализацию которых предлагается использовать для построения глобального проективного базиса фигуры [9], что также как и для ситуации с ДИ неисполнимо в инженерной реализации по причине необходимости оперировать производными пятого порядка.

4. *Опора на полудиференциальные инварианты* (ПДИ). Для того, чтобы превратить действие проективной группы в свободное, в оговоренных случаях допустим прием: вместо вычисления локальных ДИ высокого порядка в каждой точке формируют инварианты меньшего порядка для фиксированных наборов точек [10, 11]. Подобная стратегия имеет немало плюсов (она позволяет добиться требуемой в практике устойчивости к координатному шуму, однако, подобное достоинство «компенсируется» высокой размерностью процедуры). По-прежнему актуально построение быстрых алгоритмов, использующих ПДИ. Слабая сторона подхода с ПДИ – отсутствие устойчивости к окклюзии.

5. *Работа с плоскостным вурфом*. Метод локального плоскостного вурфа, предложенный в работе [12], имеет близкую аналогию с гистограммами парных расстояний, разработанными группой Олвера [13]. Подход, дающий приемлемую устойчивость к шуму дискретизации, вычислительно трудоемок. Кроме того, до настоящего момента не приведено убедительных доказательств отсутствия семейства проективно неэквивалентных кривых, неразличимых для этого метода.

6. *Иные подходы*. Метод приближения гладкого плоского контура фрагментами коник, на базе чего в точках сопряжения высчитываются вурфы, используемые для формирования проективного базиса [14], что похоже на прием, развитый в работе [11]. Описан метод быстрого поиска радиальной симметрии кривых для группы аффинных преобразований, обобщенных на ограниченное множество проективных преобразований [15]. Фактически, его цель сводится к поиску эллипсообразных контуров, что может быть достигнуто многими вычислительными приемами (например, применением быстрого обобщенного преобразования Хафа). Любой из вариантов достижения подобной цели имеет мало общего с тем, что предлагается в рамках обсуждаемого здесь подхода, где коники не рассматриваются в качестве объектов распознавания, так как все эллипсы аффинно эквивалентны, а все коники эквивалентны проективно. Особо следует упомянуть работу [16], где была доказана «теорема о кролике и уточке», по сути объявившая неправомерность проективно инвариантного распознавания гладких кривых – по причине существования (для всякой пары неэквива-

лентных кривых) набора коэффициентов преобразования, для любой заданной точности делающих неразличимыми два гладких криволинейных контура (в утрированной форме теорема сводима к «тривиальности»: при проекциях плоскости, наблюдаемой «почти с торца», все кривые плохо различимы). Помня про этот результат, следует аккуратнее обращаться с заявлениями, употребляя конструкции с кванторами всеобщности: «для любых овалов» и «всегда различимы». Вышперечисленные подходы очертили границу, выделяющую обсуждаемую далее концепцию распознавания овала с симметриями в качестве оригинальной, начиная с самой постановки задачи: для нее показан путь привлечения элементов симметрии (ЭС) – в качестве данных, достаточных для вычисления у фигуры проективно инвариантного базиса двух родов: глобального и локального.

### Теорема взаимности и роль диады «полюс/поляра» в задаче замещения коники овалом

Функциональный смысл дуалитета «полюс/поляра» за полтора века эволюции подвергался ряду уточнений, чему нужен, по крайней мере, краткий комментарий. Термины эти изначально введены Плюккером в качестве структурной пары, выражающей двойственность отношений точки и прямой на декартовой плоскости (для которой была показана однозначная позиционная связь элементов пары относительно единичной окружности с центром в начале координат – при обмене переменных и констант в каноническом уравнении прямой), в результате перенесения ее – как диады образов *полюса* и *поляры* – для описания инвариантных свойств коник в аффинной и проективной моделях. Эта дуальная категория, в свою очередь, обобщена Кремоной (в виде многоуровневого аппарата анализа гладких контуров) на классы аналитических кривых заданного порядка  $n$ , где при условии  $n > 2$  у поляр показано свойство криволинейности, не имевшее места для коник. Последнее обстоятельство означает, что новизна предложенных Николаевым обобщений для обсуждаемой диады состоит вовсе не в криволинейности вводимых им поляр ( $H$ -,  $T$ -,  $ht$ - и других типов), а в их пригодности к описанию инвариантных свойств существенно более широкого класса кривых – при условии спецификации их свойств (в том числе, гармонических и тангенциальных, не подразделявшихся у плюккеровых поляр). Поскольку в данной работе делается попытка обзора не всех (разнородных методически) разработанных Николаевым подходов к проективно инвариантной репрезентации овалов [1, 11, 12, 17–21], а лишь специфического подкласса обладающих свойствами скрытой сим-

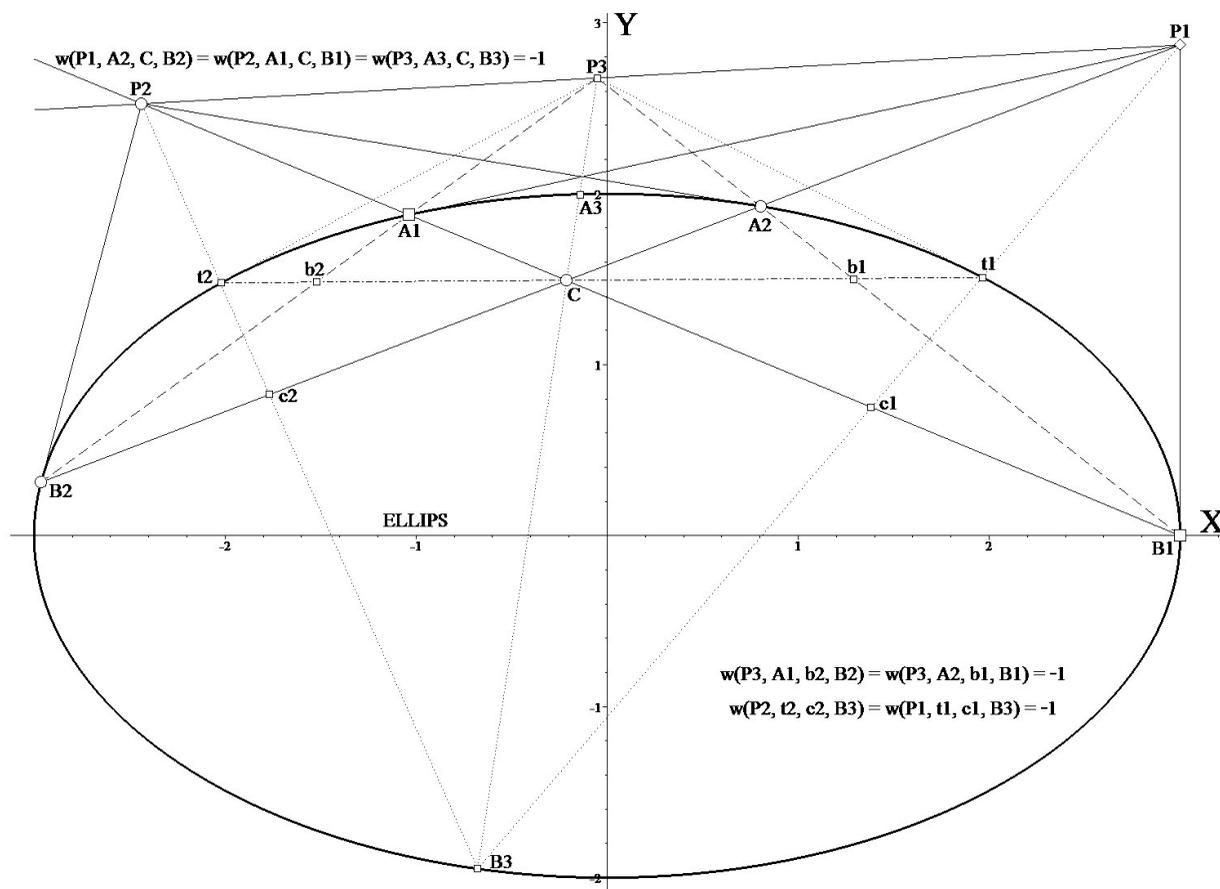


Рис. 1. От эллипса к овалу: расширенная конфигурация полюс-полярного соответствия ОЭ

метрии, то для обсуждения авторского концептуального положения о «зеркально симметричной роли самих ЭС» (образа оси  $OO$  и образа центра  $OЦ$  симметрии) в позиционной привязке к дуальным им элементам (у  $OO$  это полюс симметрии [12], у  $OЦ$  – поляр «линии горизонта» [20]), нами избран прием графической иллюстрации связей опорных элементов (ОЭ) в их диадах (при сопоставлении случаев симметрии осевого и центрального типа). Конкретнее, проиллюстрируем тезисы известной теоремы взаимности (она традиционно излагается через вводимые Плюккером проективные координаты, что не слишком наглядно), демонстрирующей в образах синтетической геометрии, как через независимые свойства гармоничности и тангенциальности плюккеровых поляр может быть прослежена формальная связь этих характеристик с некоторыми положениями теоремы.

Для этого на специальном образом дополненной схеме линейных ОЭ, иллюстрирующих тезисы теоремы, рассмотрим связи ОЭ уже в качестве прообразов неких инвариантных свойств симметричной структуры овалов. Подобная расширенная конфигурация представлена на рис. 1.

Симметричные связи полюсов  $P1, P2$  и двух им дуальных поляр, которым соответственно принадлежат отрезки  $A1-B1$  и  $A2-B2$ , исчерпывают конфигурацию теоремы, декларирующей два независимых тезиса: а) для любой позиции полюса  $P1$  (с внешним расположением) относительно эллипса произвольной формы и ориентации и второго полюса  $P2$ , лежащего на поляре первого (в произвольной точке внешней ее части), поляр второго проходит через  $P1$ ; б) точка  $C$  пересечения поляр, дополняя коллинеарные триады  $P1-A2-B2, P2-A1-B1$  до четвертов, образует гармонические ансамбли, т. е. выполняются соотношения  $w(P1, A2, C, B2) = -1$  и  $w(P2, A1, C, B1) = -1$ . Продолжим построение. Фиксируем на отрезке  $P1-P2$  точку  $P3$  в качестве третьего полюса. Проективная симметрия расширенной схемы, задавшая  $P3$  на прямой через  $C$  и точку пересечения касательных в  $A1$  и  $A2$ , не обязательна для справедливости дальнейших утверждений, она лишь минимизирует число элементов построения (позиция  $P3$  на внешней поляре полюса  $C$  вполне произвольна, требуется лишь ее коллинеарность с  $P1$  и  $P2$ ). Обязательным следствием коллинеарности триады  $P1-P3-P2$  будет при этом свойство принадлежности

точке  $C$  полярны  $t_1-t_2$ , дуальной полюсу  $P_3$ . Этот «тангенциального характера» тезис (как в двусоставной формулировке теоремы взаимности) в обязательном порядке дополняет тезис «гармонизма»:  $w(P_3, A_3, C, B_3) = -1$ . Легко показать, что для расширенной конфигурации справедливы еще четыре гармонических соотношения:  $w(P_1, t_1, c_1, B_3) = w(P_2, t_2, c_2, B_3) = -1$  для полюсов  $P_1, P_2$  и  $w(P_3, A_1, b_2, B_2) = -1$ ,  $w(P_3, A_2, b_1, B_1) = -1$  для добавочного полюса. Если точку пересечения полярны  $t_1-t_2$  с прямой, проходящей через  $P_1$  и  $P_2$  (она не показана на рисунке, будучи за пределами ближней зоны эллипса) обозначить через  $P_4$ , то для полюсов  $P_1 \div P_4$  окажется справедливым еще одно условие гармонизма:  $w(P_1, P_3, P_2, P_4) = -1$ . Все выписанные выше закономерности характеризуют ситуации, справедливые и для симметричных овалов, если под плюккеровыми полярными понимать такие ОЭ их скрытой симметрии, как  $OO$  и «линию горизонта»  $HL$ , а под полюсами – ОЦ и точку «полюса симметрии»  $PS$ . Особая форма контура овала с явно выраженными признаками его осевой либо центральной симметрии, названная [12] его ортоформой (заметим, что ортоформы проективно эквивалентного семейства овалов центральной симметрии образуют аффинную группу), является объектом, сугубо методически важным: а) для демонстрации (в роли связующего звена) тангенциальных свойств эллипса, сохраняющихся для ЭС овалов и б) в качестве наглядной модели трансформаций, происходящих с гармоническими квартетами при перепроецировании ортоформы в овальную кривую общего вида, т. е. служит истолкованию конкретных случаев применимости условий гармонизма, справедливых для эллипса и ортоформы овала. Действительно, полярна  $HL$  для ортоформы центральной симметрии представляет собой несобственную (бесконечно удаленную) прямую проективной модели, а полюс  $PS$  в ней для осевой ортоформы является несобственной точкой; и все это является прямым следствием свойств гармоничности:  $W(a, a, \infty) = 1$  (здесь  $W$  – модуль вурфа, записанный в длинах отрезков, разделяющих квартал коллинеарных точек), где равенство пары отрезков длиной  $a$  выражает свойство того или другого типа симметрии, а символ  $\infty$  указывает на *несобственный* характер элемента (как четвертой точки на продолжении симметричных хорд аксиального типа или же – непрерывного множества радиальных «четвертых точек» у овалов центральной симметрии). Для цикла работ [12, 18–21] рассмотрение именно ортоформ сделало весьма несложным получение большинства проективно инвариантных свойств ОЭ в виде теорем (хотя ряд закономерностей, использованных при создании процедур детекции ОЭ, были эвристическими). Но вернемся к схеме рис. 1, рассматривая ее уже не в качестве конфигу-

рации, иллюстрирующей свойства эллипса в контексте теоремы взаимности (с добавленной нами точкой  $P_3$  третьего полюса и его полярной  $t_1-t_2$ ), а как набор инвариантных объектов, различные композиции которых оказываются достаточными для формулировки проективно инвариантных свойств овалов неявной симметрии. Этот чисто методический прием свяжет расположение полюса у овала с дуальной ему полярной – в качестве *уникальной* пары ОЭ симметрии фигуры (в противовес *произвольности* положения плюккерова «полюса и полярны»).

В случае, если точка  $C$  на рис. 1 соответствует позиции ОЦ (у овала со скрытой радиальной симметрией), то прямая, проходящая через  $P_1, P_3, P_2$ , есть ничто иное как «линия горизонта»  $HL$ , в итоге перепроецирования ортоформы овала переставшая быть несобственной прямой. Для  $HL$  позиции  $P_1 \div P_4$  на ней ничем не примечательны: из произвольной инцидентной ей точки  $P_i$  будут выполняться тангенциальное и гармоническое условия полюс-полярного соответствия (полярна для  $P_i$  пройдет через  $C$  и окажется справедливым соотношение  $w(P_i, A_i, C, B_i) = -1$ ). Если же рис. 1 трактовать как схему поведения ОЭ у аксиально симметричного овала, то роль  $C$ , как особой инвариантной точки ОЦ, окажется утраченной, заменяясь при этом на структурную роль полюсов симметрии  $PS$ , каковыми теперь станут: полюс  $P_1$  для прямой  $OO$ , совпавшей с полярной  $P_2-B_1$  (и будут выполнены условия  $w(P_1, A_2, C, B_2) = -1$  и  $w(P_1, t_1, c_1, B_3) = -1$ ); полюс  $P_2$  для  $OO$ , совмещенной с полярной  $P_1-B_2$  (при справедливости  $w(P_2, A_1, C, B_1) = -1$  и  $w(P_2, t_2, c_2, B_3) = -1$ ); точка  $P_3$  для  $OO$ , инцидентной  $t_1-t_2$  (при выполнении гармонических свойств  $w(P_3, A_3, C, B_3) = w(P_3, A_1, b_2, B_2) = w(P_3, A_2, b_1, B_1) = -1$ ). Подобные соотношения можно выписать и для отдаленной точки  $P_4$ , если прямой  $OO$  соответствует полярна  $P_3-B_3$  (с обязательным условием  $w(P_4, t_2, C, t_1) = -1$ ). При этом выбор направления полярного луча  $R_i$  из полюса  $PS$  на отрезок  $OO$ , ограниченный контуром фигуры, совершенно не важен: для любого  $R_i$  в угловом секторе между касательными к овалу условие гармонизма будет выполнено, поскольку любая пара симметричных точек ортоформы принадлежит прямой, инцидентной точке  $PS$  в ее несобственной позиции – с выполнением условия  $W(a_i, a_i, \infty) = 1$ , т. е. вурф-функция по  $i$  в пределах сектора представляет собой единичную константу. Итог таков: в силу очевидных закономерностей, прослеживаемых для ортоформы того и другого типа симметрии, справедливость их не будет нарушена при переходе к общему случаю (с симметрией, декартовы признаки которой утрачены под воздействием априори неизвестного дробно линейного преобразования  $T$ , связывающего произвольную проекцию фигуры с ее ортоформой), поскольку в описании плюккерова

полюс-полярного дуализма ОЭ были привлечены исключительно свойства касательных и гармонических ансамблей, являющиеся инвариантами  $T$ . При этом дуализм проявляется на двух уровнях: в рамках фиксированного типа симметрии – это отношения  $OO$  и  $PS$  (либо  $OЦ$  и  $HL$ ), тогда как при сопоставлении самих типов примечателен зеркальный обмен ОЭ полюса на поляр и поляры на полюс (точка  $OЦ$  заменяется прямой  $OO$ , а прямую  $HL$  сменяет точка  $PS$ ). Полнота рассмотрения полюс-полярных отношений в проективно инвариантном анализе гладких кривых возвращает нас к параллелям аппарата криволинейных поляр, предлагаемого Николаевым [12, 18], с кремоновой полюс-полярной системой, разработанной для описания инвариантных свойств кривых порядка  $n$ , в которой при  $n > 2$  поляры теряют прямолинейный характер. Для демонстрации преемственности подходов при использовании конфигураций двойственных элементов потребуется обсудить роль полюсов  $P$ , порождающих поляры  $H$ - и  $T$ -типа (что составляет минимальный набор аппаратных средств проективно инвариантного анализа овалов в задаче локализации ОЭ вида  $OO$  и  $OЦ$ ).

Кремонова модель соответствия ни в одном из положений не отвергает плюккеров подход: в обеих системах позицию полюса кривая, обследуемая при его участии, не детерминирует; это он свободной своей локализацией относительно фигуры позволяет через дуальную ему поляр охарактеризовать интегральные особенности геометрии кривой, выявляемые именно для данного его расположения. Говоря метафорически, он используется в качестве инструмента, тестирующего (через законы поведения дуальной ему поляры) инвариантные свойства фигуры. И эти свойства визуализируются формой поляры, меняющейся при смене позиции полюса в плоскости фигуры. В этой связи становится логически мотивированным вводимое Николаевым разделение подобных точечных ОЭ на полюса *симметрии* (это точка  $PS$  у осесимметричных овалов и центр  $C$  в точке  $OЦ$  – овалов скрытой радиальной симметрии) и все прочие – *тестовые* полюса. Поляры разных типов (например,  $T$ - и  $H$ -типов), детерминируемые позицией тестового полюса  $P$ , обнаруживают существенные различия поведения в зависимости от факта совпадения  $P$  (либо рассогласования) с центром  $C$  (или же полюсом  $PS$ ), что и используется в большинстве предлагаемых методов поиска ЭС, достаточных для решения задачи проективно инвариантной репрезентации фигур. Как только полюс  $P$  (в ходе случайного выбора позиции или в итоге целенаправленного сближения с полюсом симметрии) оказывается совмещенным с точкой ЭС, распознающая система имеет возможность зарегистрировать выполнение того или иного следствия теоремы взаимности. С подобной терминологической привязкой согласуется и

предложенное [18] наименование для набора точек пересечения  $T$ - и  $H$ -поляр, как  $E$ -ансамбля или ряда *эллиптических* точек, так как для любой позиции  $E$  квартет точек контура, ее задавший (пара тангенциальных и пара, совместно с  $P$  и  $E$  образовавшая гармоническую четверку) в некотором смысле ведет себя как четверка точек эллипса. На рис. 1, интерпретируемом в качестве модели овала для случая, когда тестовый полюс находится в точке  $C$ , квартету точек контура  $A1, A2, B1, B2$  в равной мере соответствуют позиции  $P1$  и  $P2$  в роли эллиптических точек  $E$ . В свою очередь, последствия происшедшего совпадения координат  $P$  с ЭС будут такие: для случая осевой симметрии инцидентность полюса  $P$  уникальной поляр  $OO$  выразится в совпадении позиций  $E$  и  $PS$ ; при радиальной симметрии овала совмещение  $P$  с полюсом  $OЦ$  однозначно покажет инцидентность  $E$  поляр  $HL$ . Такова, в общих чертах, авторская концепция, согласно которой тестовый полюс  $P$ , будучи перемещенным из некой произвольной позиции в новое положение, инцидентное ЭС, порождает конфигурацию поляр *криволинейных*, однозначно локализующих прямолинейную поляр симметрии ( $OO$  либо прямую  $HL$ ), что реализуемо согласно свойствам овала, сформулированным в конечном итоге в виде списка геометрических признаков ОЭ вида: «имеет место конфигурация 1 (с необходимыми ее признаками), когда  $P$  принадлежит некому ЭС, тогда как отсутствие для  $P$  такой инцидентности порождает конфигурацию 2». В следующем разделе рассмотрим два сводных списка положений теории, описанных в статьях [12, 18–21] применительно к ситуациям анализа овалов аксиальной либо радиальной симметрии, с тем, чтобы роль полюс-полярных отношений ОЭ наполнилась конкретным смыслом для той или иной версии алгоритмов поиска ЭС.

### Списки свойств ОЭ симметричных овалов двух типов

Описание свойств ОЭ целесообразно предварить уточнением правил вычисления поляр двух типов ( $T$  и  $H$ ) относительно тестового полюса  $P$  в плоскости овала. Особенно просты правила формирования поляр в случае их внешнего (по отношению к фигуре) задания по координатам внутренней точки  $P$ . Общим процедурным узлом для получения обеих поляр является учет свойств хорды  $A-B$  (концевые точки  $A, B$  хорды принадлежат контуру овала) при ее вращении вокруг  $P$ . Полуоборот хорды (т. е. стартовый из произвольной позиции  $A_0$  до финального положения в  $B_0$ ; в дискретном представлении – по вершинам  $i$  ломаной, аппроксимирующей контур овала) создает возможность вычисления обеих поляр. Криволинейная  $T$ -поляр представляет собой гео-

метрическое место точек  $T_i$  пересечения текущей  $i$ -ой пары касательных в  $A_i$  и  $B_i$ .  $H$ -поляра (также криволинейная) определена как геометрическое место точек внешнего гармонического расширения для текущих коллинеарных триад  $A_i$ - $P$ - $B_i$  (иными словами, каждая текущая точка  $H_i$  поляры в паре с тестовым полюсом  $P$  гармонически сопряжена паре  $A_i$  и  $B_i$ ). При внутреннем расположении не только  $P$ , но и точки  $h_i$  гармонического расширения триады  $A_i$ - $P$ - $B_i$ , будет получена замкнутая гладкая кривая (названная гармоническим контуром  $HC$  и формально являющаяся разновидностью  $H$ -поляры). Эти три проективно инвариантные кривые и фигурируют в большинстве альтернативных (в смысле дихотомичности – описания альтернативы) свойств (АС) в виде особенностей их поведения в зависимости от позиции  $P$  относительно ЭС. К примеру, полюс ОЦ, адекватная оценка координат которого достаточна для решения задачи распознавания радиально симметричных овалов, можно локализовать целенаправленным перебором тестовых полюсов (либо в виде коллинеарного их ряда произвольной ориентации, либо цепи позиций – от стартового случайного положения  $P_0$ , итеративно сближаемого с координатами детектируемого ОЦ) в той или иной схеме поиска ОЦ, использующей какое-либо из проективно инвариантных его свойств, репрезентативный список которых, из числа ранее описанных [12, 18–21], приведен ниже.

При условии У1, что полюс  $P$  инцидентен ОО (в любой позиции на внутреннем отрезке ОО), для ансамбля  $E$ -точек пересечения внешних  $H$ - и  $T$ -поляры выполняются формулируемые свойства (альтернативным условием У2 назовем утрату признака У1, описывая новые свойства для У2):

**АС1.** При У1 одна из точек («особая»  $E1$ ) принадлежит полюсу симметрии  $PS$ . При У2 ни одна из точек  $E$ -ансамбля не совпадает с  $PS$  (рис. 2 иллюстрирует свойства У1 для АС 1, 3 и 5–7).

**АС2.** Для У1 при числе  $E$ -точек, большем трех (три – минимальное их число), они образуют проективную конфигурацию пучка из нескольких коллинеарных триад с центром пучка в  $PS$ . При У2 утрачивается свойство коллинеарности триад, а, значит, и структура пучка прямых-носителей.

**АС3.** При У1 гармоническая точка  $EH$ , позиция которой (в статусе «четвертой») вычислена для коллинеарной триады между точками, не совпадающими с  $PS$ , принадлежит прямой ОО. При У2 согласно АС2 нарушается коллинеарность триад, а, стало быть, и возможность гармонизма.

**АС4.** При У1 вурф-функция из  $E1$  постоянная и равная  $-1$  в секторе между точками касания. При У2 эта вурф-функция всюду непостоянна (приближаясь к значению  $w(i) = -1$  у точек касания).

**АС5.** При У1 касательные к  $H$ -поляре в точках  $E2$  и  $E3$  основной коллинеарной  $E$ -триады пересекают-

ся на прямой ОО. При У2 точка пересечения касательных поляре ОО не принадлежит.

**АС6.** При У1 касательные к  $T$ -поляре в точках  $E2$  и  $E3$  основной триады пересекаются на поляре ОО (в позиции  $TT$ , не совпадающей с  $HH$  из условий АС5). При У2 особенности У1 утрачиваются.

**АС7.** При У1 касательная  $H$ -поляры в  $PS$  является касательной к  $T$ -поляре, касаясь ее на пересечении последней с прямой ОО (на рис. 2 касательная показана пунктиром, а точка касания отмечена кружком и обозначена  $tt$ ; при том, что изображены два набора поляр, соответствующие неким двум позициям  $P$  на ОО). При У2 эти особенности поведения касательной не имеют места.

Последние три позиции списка АС (АС5-АС7) принадлежат к числу дифференциальных особенностей поведения криволинейных поляр осесимметричного овала, и их справедливость может быть показана на модели его ортоформы. Для пункта АС2 автор [12] не предъявил прямых доказательств справедливости тезиса У1 и антитезиса У2, приведя лишь «логические соображения их адекватности». Сходное впечатление некоторой незавершенности теоретического анализа может вызвать у читателя и отсутствие в работе [19] для картин АС5 и АС6 описания поведения касательных к полярам в «побочных» триадах (когда они есть)  $E$ -ансамбля. Перейдем теперь к свойствам фигур центральной симметрии.

Для сводки инвариантных особенностей поведения ЭС (полюса  $C$  и поляры  $HL$ ) в условиях их альтернативного соотношения с позицией тестовой точки  $P$ , задающей геометрию  $H$ - и  $T$ -поляр, приведем лишь наиболее важные положения (II) теории. Поясним, что самое простое (по вычислительной сложности) из вурф-отображений  $W1(W2)$  (П4) может быть сформировано на основе вычисления кривой гармонического контура  $HC$  (по позиции  $P$ ). Итак, краткий список дуальных Положений для овала неявной радиальной симметрии таков:

**П1.** Если точки  $P$  и  $C$  совмещены, то формируемые для координат  $P$  внешние поляры обоих типов ( $H$ -polar и  $T$ -polar) полностью совпадают с линией горизонта  $HL$ . Если же тестовая  $P$  разнесена с полюсом  $C$ , то вычисленные для  $P$  внешние поляры обоих типов всегда криволинейны, а сами эти кривые ни при каких условиях полностью не совпадают.

**П2.** Если  $P$  принадлежит прямой  $HL$ , то  $H$ -поляра, вычисляемая внутри фигуры по позиции  $P$  (при произвольном расположении  $P$  на  $HL$ ), всегда криволинейна и проходит через полюс  $C$ , лежащий на плюккеровой поляре. Если же точка  $P$  расположена вне прямой  $HL$ , то внутренняя  $H$ -поляра также всегда криволинейна, но ни при каких условиях не включает в себя позицию ОЦ.

**П3.** Если полюс  $P$  служит для формирования гармонического контура  $HC$ , то при совпадении по-

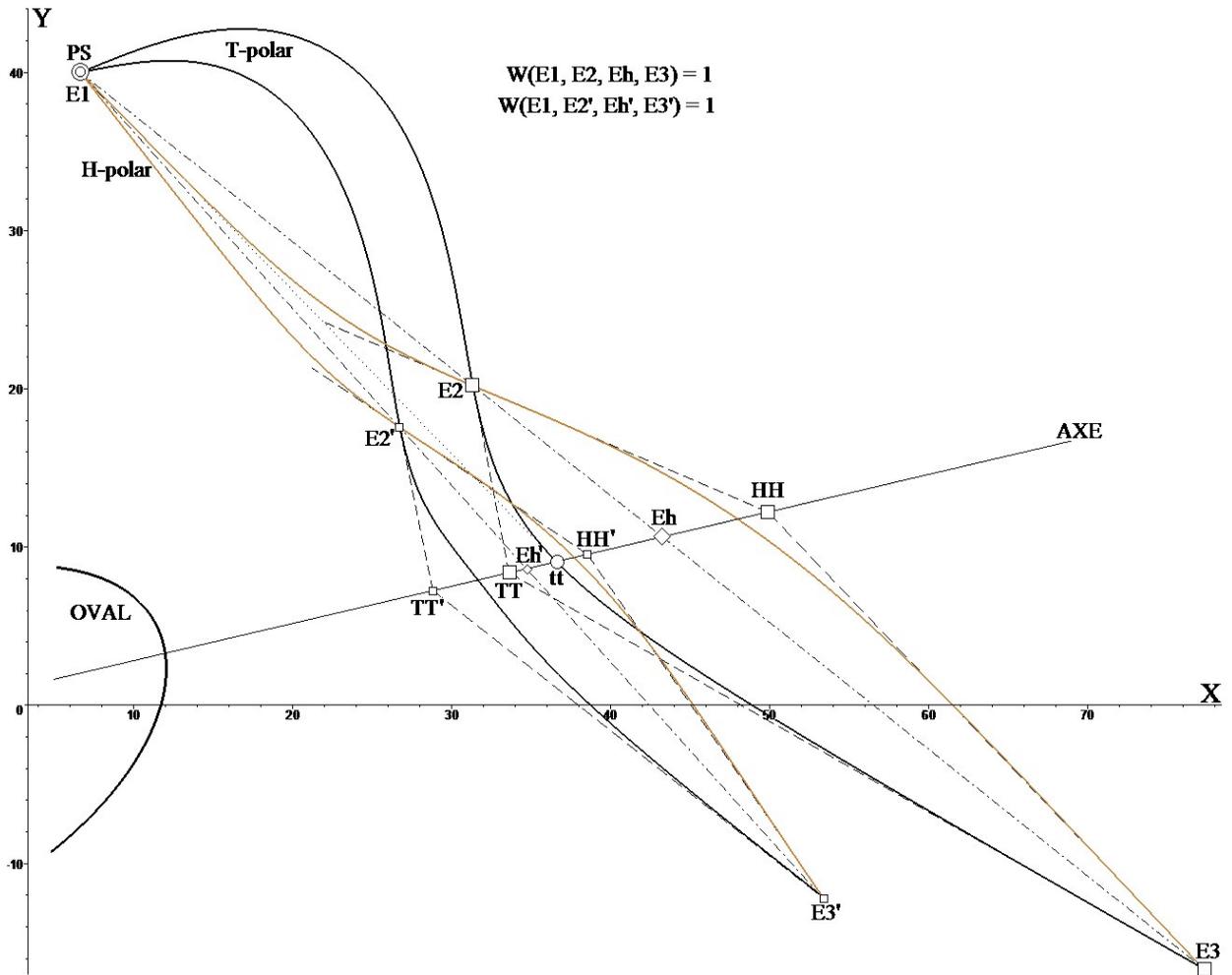


Рис. 2. Конфигурация *H*- и *T*-поляр, полюса *PS* и участка *OO* (*AXE*) овала аксиальной симметрии

зиций *P* и *C* кривая *HC* проективно подобна контуру овала, так как *HC* для его ортоформы *o* является гомотетической копией *o*. Если же точки *P* и *C* разнесены, не существует такого набора коэффициентов проективного преобразования плоскости, с помощью которого удалось бы спроецировать полученную кривую *HC* в исходный контур овала.

**П4.** Если кривая отображения  $W1(W2)$  центрально-симметричного овала сформирована для полюса *C*, она представляет собой гладкую замкнутую ветвь с самопересечениями и многократным (не менее чем двукратным и всегда четным числом) полным самопокрытием. Если же она вычислена для любой другой точки *P* внутреннего поля овала, свойство полного самопокрытия отсутствует.

Все приведенные выше Положения [20, 21] без особых сложностей доказываются на модели ортоформы, хотя предложенные их автором методы детекции ЭС, опирающиеся на независимые свойства **П3** и **П4**, нельзя назвать тривиальными, в то время как другие разработанные им методы, базируясь на

идее пересечения траекторий решения, формируемых перебором «тестовых поляр», используют закономерности **П1** либо **П2** лишь в качестве проверочных признаков инцидентности (внутренней для *P* и *C*, внешней – для *P* и *HL*), для основного блока процедур привлекая операции с «wurf-оценками». Об идее «текущих тестовых поляр, формирующих траекторию решения» стоит сказать детальнее. Некоторые подходы к задаче детекции ЭС требуют перебора пар точек контура, и, если опираться на достаточность акта прохождения прямой, задаваемой такой текущей парой, через полюс ЭС (им может быть не только ОЦ, но и *PS* у осесимметричных фигур согласно **АС1**), то необходимый перебор поляр (лучей) можно организовать для пар *P*–*P<sub>i</sub>* на контуре, фиксируя случайным образом позицию *P* и перебирая по *i* текущие координаты для *P<sub>i</sub>* [17, 20]. Подобные подходы расширяют спектр применимости тестовых ОЭ, привлекая точки контура (для поляр *H*- и *T*-типа это невозможно согласно определению), что предполагает разработку численной реализации для кон-

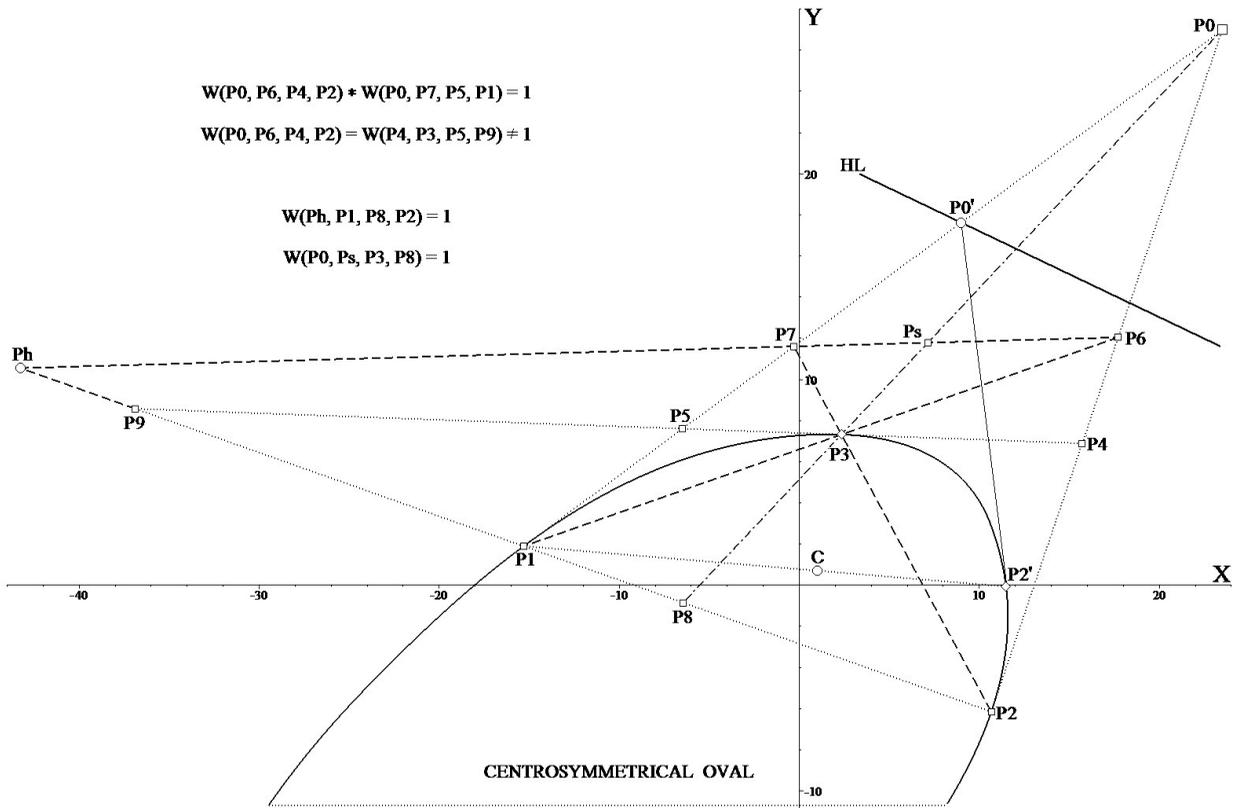


Рис. 3. К идее поиска ОЦ методом подвижной тестовой поляры P1-P2 – с перемещением P0 на HL

цепции поиска дуальных ЭС (ОО и ОЦ) – как единой процедуры.

Обсуждение списка П1-П4 завершим описанием идеи детекции ОЦ (обозначим его здесь как C) целенаправленным перебором позиций поляры P1-P2, порождающим смещение ее полюса P0 в положение на прямой HL при условии, что факт инцидентности P0' линии горизонта HL фиксируется выполнением ряда следствий П1 (рис. 3).

Итак, тестовую полярю вращают вокруг случайным образом избранной точки контура P1 – посредством скольжения второй (текущей) P2 по овальной кривой до позиции P2', для которой полярю включает и искомую ОЦ, а, следовательно, текущий полюс Pi, смещаясь по прямой P0-P1 из начального положения P0 в «ключевую» позицию P0', даст для нее выполнение всех необходимых следствий (согласно П1) инцидентности HL, которые мы опишем с привлечением вспомогательной точки P3.

Положение P3 (на контуре между P1 и P2) варьируют так, чтобы расстояние P9-Ph было минимальным при том, что P3 детерминирует позиции P6 и P7 (Ph – точка пересечения прямых P1-P2 и P6-P7, а P9 находится на пересечении касательной в P3 с прямой P1-P2). Нетрудно убедиться (представив аналогичную конфигурацию для ортоформы), что при достижении P2 экстремальной позиции P2'

варьируемая P3 займет положение P3' на прямой, соединяющей P0' с C, а точки P9 и Ph совместятся. На языке вурф-отношений сдвиг P0 в позицию P0' сведется для коллинеарных ансамблей P0'-P6'-P4'-P2'; P4'-P3'-P5'-Ph' и P0'-P7'-P5'-P1 к выполнению условия их гармоничности (что не имеет места для всех прочих положений P2 и P0 – в противовес выражениям, выписанным в верхнем поле рис. 3, – справедливым всегда). Итак, по ходу вращения тестовой поляры в P1 ее полюс Pi скользит по прямой, P2 и P3 – по контуру, а P8 (в пересечении P0'-P3' и P1-P2') – по криволинейной траектории, терминал P8' которой обязан совпасть с ОЦ. Сделанное описание имело методическую цель (вложенный цикл варьируемой по j позиции P3j слишком громоздок) – показать, как могут помочь в рассматриваемой задаче сформулированные выше Положения.

### Заключение

Для развития обсуждаемого направления (создания автоматических систем распознавания гладких выпуклых контуров) предстоит масштабный труд по оптимизации численных методов, предложенных на сегодняшний день и опробованных пока на уровне модельных реализаций. Безусловно ценен вклад в теорию проективно инвариантных структур семейств

ва овалов с ЭС, которая, не являясь на данный момент завершённой, потребует усилий в детализации положений по двум независимым линиям развития: 1) для группы методов детекции ЭС, заявленных как эвристические [18–20], полезно очертить диапазон их применимости; но существенно более важной представляется 2) попытка теоретически оценить возможность расширения самой постановки задачи проективно инвариантного описания гладких кривых, с переходом к некомпланарному случаю и иному характеру генерации овалов (имеется в виду добавление к числу контрастных 3D контуров – границ тени на гладких выпуклых телах с плоскостями, осями и центрами симметрии). Обнадеживают два соображения о подобной возможности: а) плоккеров принцип дуализма в результате его перенесения в декартово 3D пространство декларирует двойственной полюсу плоскость, которая в рамках обсуждаемой концепции ЭС могла бы означать плоскость симметрии опознаваемого тела, каковые, к примеру, для семейства поверхностей-суперквадрик (у них три плоскости симметрии) в избранном классе сцен реально локализовать, используя закономерности светотеневого распределения на объекте однородной окраски, освещенном малоапертурным источником [22–24].

## Список литературы

1. Николаев П. П. Модели константного зрительного восприятия. I. Проективно-инвариантное представление гладких объектов // Сенсорные системы. 1995. Т. 9. № 2. С. 109–131.
2. Ruiz A., Lopez de Teruel P. E., Fernandes L. Robust Homography Estimation from Planar Contours Based on Convexity // Comp. Vision – 9<sup>th</sup> European Conf. of Comp. Vision. 2006. Graz, Austria, May 7–13. Proceedings, Part 1. Springer Berlin Heidelberg. 2006. P. 107–120.
3. Николаев П. П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. I. Анализ и инвариантное отображение составных овалов // Сенсорные системы. 2011. Т. 25. № 2. С. 118–137.
4. Calabi E., Olver P. J., Shakiban C., Tannenbaum A., Haker S. Differential and numerically invariant signature curves applied to object recognition // Int. J. Computer Vision. 1998. V. 26. P. 107–135.
5. Hann C. E. and Hickman M. S. Projective curvature and integral invariants // Acta Appl. Math. 2002. V. 74. № 2. P. 177–193.
6. Weiss I. Geometric invariants and object recognition // International Journal of Comp. Vision. 1993. V. 10. № 3. P. 207–231.
7. Weiss I. Noise-resistant invariants of curves // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1993. V. 15. № 9. P. 943–948.
8. Овсиенко И. Ю., Табачников С. Л. Проективная дифференциальная геометрия. Старое и новое: от производной Шварца до когомологий групп диффеоморфизмов // М.: МЦНМО. 2008. 280 с.
9. Kamel A., Farahat M. On the moduli space of smooth plane quartic curves with a sextactic point // Applied Matem. & Information Sciences. 2013. V. 7. № 2. P. 509–513.
10. Van Gool L., Moons T., Pauwels E., Oosterlinck A. Semi-differential invariants // Applications of Invariance in Comp. Vision, Springer-Verlag, N.Y. 1994. P. 157–192.
11. Николаев П. П. Проективно инвариантное распознавание составных овалов // Информационные технологии и вычислительные системы. 2010. № 4. С. 3–15.
12. Николаев П. П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. III. Обработка осе-симметричных овалов методами анализа поляра // Сенсорные системы. 2011. Т. 25. № 4. С. 275–296.
13. Brinkman D., Olver P. Invariant histograms // Amer. Math. Monthly. 2012. V. 119. P. 4–24.
14. Srestasatheirn P., Yilmaz A. Planar shape representation and matching under projective transformation // Comp. Vision and Image Understanding. 2011. P. 1525–1535.
15. Ni J., Singh M., Bahlmann C. Fast Radial Symmetry Detection under Affine Transformation // Proc. of the 2012 IEEE Conf. on Comp. Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2012. P. 932–939.
16. Astrom K. Affine and Projective Normalization of Planar Curves and Regions // Computer Vision – ECCV’94, Lecture Notes in Computer Science. 1994. V. 801. P. 438–448.
17. Николаев П. П., Николаев Д. П. Проективно инвариантное распознавание плоских контуров на примере кривых с симметриями // Труды ИСА РАН. 2009. Т. 45. С. 209–221.
18. Николаев П. П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. II. Овал в композиции с дуальным элементом плоскости // Сенсорные системы. 2011. Т. 25. № 3. С. 245–266.
19. Николаев П. П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. IV. Методы формирования проективно инвариантного описания осесимметричных овалов // Сенсорные системы. 2012. Т. 26. № 4. С. 280–303.
20. Николаев П. П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. V. Методы детекции образа центра у овалов с неявно выраженной центральной симметрией // Сенсорные системы. 2013. Т. 27. № 1. С. 10–34.
21. Николаев П. П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. VI. Инвариантное представление и методы поиска образа центра овалов с неявно выраженной центральной симметрией // Сенсорные системы. 2014. Т. 28. № 1. С. 3–25.
22. Николаев П. П. Модели константного зрительного восприятия // Интеллектуальные процессы и их моделирование. М.: Наука, 1987, С. 300–350.
23. Николаев П. П. Методы представления формы объектов в задаче константного зрительного восприятия // Интеллектуальные процессы и их моделирование. Вып. 3. Пространственно-временная организация. М.: Наука, 1991, С. 146–173.
24. Николаев П. П. Гауссовская модель и процедуры цветовой константности для сцен двойного освещения. III. Геометрия цвета // Сенсорные системы, 2008. Т. 22, № 2. С. 120–138.

**Акимова Галина Павловна.** Вед. н. с. К. т. н. Окончила МФТИ в 1978 г. Количество печатных работ: 50. Область научных интересов: системное программирование, системный анализ, информационные технологии, информационно-аналитические системы. E-mail: galina@cs.isa.ru

**Богданов Дмитрий Степанович.** Зав. лабораторией. К. т. н. Окончил МГУ в 1980 г. Количество печатных работ: более 30. Область научных интересов: распознавание образов, распознавание речи, анализ и проектирование информационных систем. E-mail: bogdanov@cs.isa.ru

**Куратов Павел Александрович.** Научный сотрудник. Окончил МГУ в 1978 г. Количество печатных работ: 15. Область научных интересов: теория и методы распознавания образов. E-mail: paul@cognitive.ru