

Выпуклые ленточные матрицы и их положительная определенность*

В. Н. РАЗЖЕВАЙКИН

Аннотация. Доказывается теорема о положительной определенности ленточных матриц, широко используемых в задачах математической биологии.

Ключевые слова: ленточная матрица, задающая функция, положительно определенная матрица.

1. Ленточные матрицы

Ленточной будем называть квадратную $n \times n$ матрицу $A = \|a_{ij}\|$, такую, что $a_{ij} = f(|i - j|)$ для некоторой невозрастающей функции $f(x)$, определенной на отрезке $[0, n - 1]$. Каждую такую подходящую функцию будем называть *задающей* для ленточной матрицы. Если при этом можно подобрать гладкую задающую функцию так, чтобы выполнялось неравенство $f''(x) \geq 0$, то такую ленточную матрицу мы будем называть *выпуклой*. Выполнение дополнительных неравенств $f(n - 2) \geq f(n - 1) \geq 0$ сужает множество выпуклых ленточных матриц до некоторого множества неотрицательных невозрастающих выпуклых ленточных матриц (ибо в этом случае можно выбрать функцию $f(x)$ так, чтобы в дополнение к ее выпуклости выполнялись также и неравенства $f'(x) \leq 0$, $f(x) \geq 0$), которое мы будем называть множеством *L-матриц*. В случае, когда все три неравенства для задающей функции выполняются строго на всем отрезке $[0, n - 1]$, мы будем говорить о множестве *строгих L-матриц*.

Матрицы указанного типа появляются вполне естественным образом при построении и исследовании математических моделей конкурирующих биологических популяций, описываемых посредством учета их экологических ниш, см., например, [1], гл. VI и библиографию там же.

В работе [2] было предложено доказательство того факта, что строгая L-матрица является положительно определенной. В предлагаемой статье указанный результат обобщается на случай всех L-матриц, за исключением матрицы, все элементы которой одинаковы.

Технически методика доказательства положительной определенности сходна с предложенной в [2], базисными составляющими которой явились вложение ленточной матрицы в циклическую и выпуклое разложение циклической матрицы по циклическим же матрицам специального вида. Перестановка этих двух действий местами позволяет получить более точные результаты, причиной чего служит появляющаяся при этом дополнительная возможность вложения ленточных матриц, входящих в базис неотрицательного разложения (так называемых реперных матриц), в ленточные же матрицы большей размерности.

2. Предварительные сведения

В этом разделе излагаются некоторые формулировки и относящиеся к ним общеизвестные результаты, необходимые для дальнейшего.

Пусть $A - n \times n$ и $B - m \times m$ симметричные матрицы, причем $n \geq m$. Будем говорить, что матрица B *вложена* в A и писать $B \subset A$, если существует главный минор матрицы A , совпадающий с матрицей B .

Если $\lambda^{\pm}(A)$ обозначают соответственно верхнее и нижнее собственные значения симметричной матрицы A , то следствием теоремы отделимости Штурма (см. [3], 7.8) является импликация

$$(B \subset A) \Rightarrow (\lambda^{-}(A) \leq \lambda^{-}(B) \leq \lambda^{+}(B) \leq \lambda^{+}(A)), \quad (1)$$

легко проверяемая также на основе экстремальных свойств границ спектра. Последнее соображение позволяет, кроме того, установить для симметричных матриц A и B одинаковой размерности неравенства

$$\pm \lambda^{\pm}(A + B) \leq \pm (\lambda^{\pm}(A) + \lambda^{\pm}(B)). \quad (2)$$

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-07-00789).

В частности для неотрицательного разложения

$$A = \sum_{l=1}^L \rho_l A_l, \quad \rho_l \geq 0$$

из (2) получаем

$$\lambda^-(A) \geq \sum_{l=1}^L \rho_l \lambda^-(A_l), \quad (3)$$

так что для положительной определенности симметричной матрицы A достаточно подобрать такое ее неотрицательное разложение, что *реперные* симметричные матрицы A_l окажутся неотрицательно определенными, причем по крайней мере одна из них, входящая в разложение с ненулевым коэффициентом, будет положительно определенной. Иногда (как это делалось в [2]) оказывается более удобным рассматривать не ограничивающие общности выпуклые разложения с дополнительным нормирующим условием $\sum_{l=1}^L \rho_l = 1$. $N \times N$ матрица $A = \|a_{ij}\|$ называется *циркулянт*ом (см. [3], 12.14), если $a_{ij} = c(i-j)$ для некоторой периодической функции $c(x+N) = c(x)$. Все собственные значения циркулянта вычисляются как

$$\lambda_k = \sum_{l=0}^{N-1} c(l) \varepsilon_k^l,$$

где $\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{N} + i \sin \frac{2\pi k}{N}$, $k = 0, \dots, N-1$ – корень скалярного уравнения $\varepsilon^N = 1$ (для проверки этого достаточно убедиться в том, что такому собственному значению соответствует собственный вектор $(1, \lambda_k, \dots, \lambda_k^{N-1})^T$). В частном случае *симметричного* циркулянта $c(l) = c(N-l)$ (являющегося, очевидно, ленточной матрицей), его корни вычисляются как

$$\lambda_k = \sum_{l=0}^{N-1} c(l) \cos \frac{2\pi lk}{N}.$$

В частных случаях нечетного N , а также четного N при $c\left(\frac{N}{2}\right) = 0$

$$\lambda_k = c(0) + 2 \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} c(l) \cos \frac{2\pi lk}{N} \quad (4)$$

(здесь $[x]$ – целая часть x).

3. Неотрицательные разложения выпуклых матриц

Поскольку множество ленточных матриц фиксированной размерности инвариантно по отношению к линейным преобразованиям, то разложение любой матрицы $A = \|f(|i-j|)\|$ из этого множества по некоторому базису реперных ленточных матриц $A_l = \|f_l(|i-j|)\|$ однозначно определяется разложением вектора $(f(0), f(1), \dots, f(n-1))$ по базису, состоящему из векторов

$$(f_1(0), f_1(1), \dots, f_1(n-1)), \dots, (f_n(0), f_n(1), \dots, f_n(n-1)).$$

В частности, неотрицательным разложениям векторов и только им соответствуют неотрицательные разложения матриц.

В настоящем разделе доказывается, что множество L -матриц фиксированной размерности образует выпуклый конус в линейном пространстве той же размерности. Для формулировки результата нам потребуется описание базиса этого конуса.

Определение. Пусть $1 \leq m \leq n$. $B(m, n)$ – матрицей назовем ленточную $n \times n$ матрицу с задающей функцией $b_{m,n}(x) \equiv 1$ для $m = n$,

$$\text{и } b_{m,n}(x) = \max \left\{ 0, 1 - \frac{x}{m} \right\} \text{ для } 1 \leq m \leq n-1.$$

Теорема 1. Для любой L -матрицы A размерности n существует единственное разложение

$$A = \sum_{m=1}^n \rho_m B(m, n), \quad \rho_m \geq 0,$$

причем каждая сумма такого вида представляет собой L -матрицу. При этом строгим L -матрицам соответствует случай $\rho_m > 0$, $m = 1, \dots, n$.

Доказательство. Положим для задающей функции $f(x)$ индуктивно по убывающему

$$l = 0, \dots, n-1 \quad f_n(x) = f(x),$$

$$f_l(x) = f_{l+1}(x) - b_{l+1,n}(x) \frac{f_{l+1}(l)}{b_{l+1,n}(l)}$$

для $x \in [0, n-1]$. Если $f(x)$ – задающая функция L -матрицы A размерности n , то, как нетрудно видеть, свойства выпуклости, (нестрогого) монотонного убывания и неотрицательности сохраняются при итерациях, причем на каждой из них длина носителя (т. е. интервала, на котором $f_m(x) > 0$) сокращается на единицу, так что $f_0(x) \equiv 0$. Коэффициенты

$$\rho_m = \frac{f_m(l)}{b_{m,n}(l)} \geq 0, \quad m = 1, \dots, n$$

определяют разложение задающей функции $f(x)$, единственность которого следует из невырожденности матрицы $\|b_{m,n}(l)\|$, $m = 1, \dots, n$, $l = 0, \dots, n - 1$.

Обратное утверждение вытекает из его выполнимости для реперных матриц $B(m, n)$ и инвариантности по отношению к неотрицательным линейным комбинациям.

Строгая положительность задающей функции $f(x)$ L -матрицы соответствует неравенству $\rho_n = f(n - 1) > 0$, строгая монотонность – с учетом выпуклости неравенству

$$\rho_{n-1} = \frac{f(n - 2) - f(n - 1)}{b_{n-1}(n - 1)} > 0,$$

строгая выпуклость – равномерному (т. е. каждый раз ровно на единицу) сокращению носителей функций $f_m(x)$ при определяющих их итерациях, что эквивалентно положительности ρ_m для $m = 1, \dots, n - 2$.

Положительная определенность реперных матриц

Теорема 2. Реперные матрицы $B(m, n)$ при $1 \leq m < n$ являются положительно определенными.

Доказательство. Пусть $m \geq 1$. Обозначим через $C(m, N)$, $N \geq 2m$, симметричный $N \times N$ циркулянт с задающей функцией

$$c_{m,N}(x) = \max \left\{ 0, 1 - \frac{x}{m}, 1 + \frac{x - N}{m} \right\}$$

для $0 \leq x \leq N - 1$.

Поскольку при $x \in [m, N - m]$ выполнено тождество $c_{m,N}(x) \equiv 0$, то $B(m, n) \subset C(m, N)$ при

$$m < n \leq N - m + 1,$$

так что в соответствии с (1) в этом случае

$$\lambda^-(C(m, N)) \leq \lambda^-(B(m, n)). \quad (6)$$

Поскольку в указанном случае для четного N выполнено

$$\frac{N}{2} \in [m, N - m],$$

так что $c_{\frac{N}{2}} = 0$, то в силу (4) и равенства

$$c_{m,N}(l) = 1 - \frac{l}{m}, \quad 0 \leq l \leq m - 1$$

для вычисления $\lambda^-(C(m, N))$ можно воспользоваться формулой

$$\lambda^-(C(m, N)) = \min_{k=0, \dots, N-1} \left(1 + 2 \sum_{l=1}^{m-1} \left(1 - \frac{l}{m} \right) \cos \frac{2\pi lk}{N} \right).$$

В силу тождества

$$1 + 2 \sum_{l=1}^{m-1} \left(1 - \frac{l}{m} \right) \cos(lx) = \frac{1 - \cos(mx)}{m(1 - \cos x)},$$

выполненного для всех $x \neq 2\pi q$, $q \in \mathbb{Z}$, и, в частности, для $x = \frac{2\pi k}{N}$, $k = 1, \dots, N - 1$, с учетом того, что минимум не может достигаться при $k = 0$, напомним из (6) для случая $m < n$ нижнюю оценку $\lambda_-(m, n)$ для $\lambda^-(B(m, n))$ как

$$\lambda_-(m, n) = \sup_{N \geq m+n-1} \min_{k=1, \dots, N-1} \left(\frac{1 - \cos \left(m \frac{2\pi k}{N} \right)}{m \left(1 - \cos \frac{2\pi k}{N} \right)} \right). \quad (7)$$

В случае взаимно простых m и N все $N - 1$ выражений под знаком минимума в (7) положительны, так что $0 < \lambda_-(m, n)$, что обеспечивает положительную определенность каждой из матриц $B(m, n)$ при выполнении неравенства $m < n$.

Более того, если m и N не являются взаимно простыми, то минимум в (7) достигает нулевого значения, так что все такие N исключаются из рассмотрения при нахождении супремума. При взаимно простых m и N минимум числителя в (7) достигается при некотором целом $k \in [1, N - 1]$ таким, что

$mk \equiv \pm 1 \pmod{N}$, и равен $2 \sin^2 \frac{\pi}{N}$. Поскольку знаменатель не превосходит $2m$, то в качестве нижней оценки для $\lambda_-(m, n)$ можно взять также величину

$$\hat{\lambda}_-(m, n) = \frac{1}{m} \sin^2 \frac{2\pi}{3m + 2n}, \quad (8)$$

ибо согласно (5) должно выполняться

$$N \geq N_{\min} = m + n - 1,$$

а на интервале длины

$$\left[\frac{m+1}{2} \right]$$

всегда найдется число N , взаимно простое с m . В данном случае рассматривается интервал с левым концом N_{\min} . С учетом первого неравенства в (5) можно воспользоваться еще более грубой оценкой, заменив в (8) m на n . При $n \rightarrow +\infty$ она дает асимптотику

$$\hat{\lambda}_-(m, n) > \frac{C}{n^3},$$

представляющуюся чрезвычайно заниженной, поскольку, непосредственные расчеты при обозримых значениях размерности матрицы указывают на вторую степень вместо третьей.

Здесь следует отметить также, что построенная оценка $\hat{\lambda}_-(m, n)$ для $B(m, n)$ в рамках использованной конструкции (т. е. с использованием циркулянтов) не улучшаема по крайней мере для нечетных m . Это связано с тем обстоятельством, что в таком случае m и $N = 2(lm + 1)$ (здесь l выбирается из условия, чтобы $N \geq N_{\min}$) взаимно просты, так что

минимум в (7) достигается при $k = 1 + l(m - 1)$, что обеспечивает значение знаменателя, близкое к двум.

Следствие 1. Для оценки нижней границы собственных значений матриц $B(m, n)$ при $1 \leq m < n$ можно использовать величины (7) или (8).

Доказательство. См. доказательство теоремы 2.

Следствие 2. Любая L -матрица, отличная от матрицы с постоянными коэффициентами, является положительно определенной.

Доказательство. Поскольку матрица $B(n, n)$ является неотрицательно определенной, то в силу (3) отсюда с учетом теоремы 1 получаем утверждение следствия.

Литература

1. Свирежев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. М., Наука, 1978. 352 с.
2. Логофет Д. О. Об устойчивости одного класса матриц, возникающих в математической теории биологических сообществ // Доклады АН СССР, 1975, т. 221, № 6, с. 1272–1275.
3. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М., Наука, 1976, 351 с.

Разжевайкин Валерий Николаевич. Гл. н. с. ВЦ РАН, Д. ф.-м. н, профессор. Окончил МФТИ в 1978г. Количество печатных работ: более 130. Область научных интересов: математическое моделирование, биология, экономика, опт. управление. E-mail: razzh@mail.ru