Динамические системы

Открытость и замкнутость разбиений на орбиты гладкого потока

В. И. Рабовер

Аннотация. В некоторых вопросах редукции нелинейных динамических систем существенную роль играют общие топологические свойства множеств, составленных из целых орбит (траекторий) системы. Например, таким множеством является объединение всех орбит, задевающих заданное множество в фазовом пространстве. Эта работа посвящена исследованию свойств открытости и замкнутости таких множеств, составленных из целых орбит, для случая гладкого потока без особых точек.
Ключевые слова: *динамические системы, орбиты, потоки.*

Введение

Мы рассматриваем гладкие потоки без особых точек в 3-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ (размерность 3 здесь не принципиальна и взята для наглядности). Мы будем изучать эволюцию под действием потока 2-мерной площадки трансверсальной потоку на конечных и бесконечных интервалах времени. Такую плоскую площадку мы называем *сечением* (если она ограничена и открыта в топологии несущей 2-мерной плоскости). Область, заметаемая сечением при движении по потоку на конечном интервале, называется здесь *клеткой*. Область, заметаемая сечением за бесконечное время, называется *трубкой*. Другими словами, трубка это объединение всех орбит потока, задевающих данное сечение.

Вообще, объединение всех орбит, задевающих какое-то множество, называется *насыщением* этого множества (по потоку). Например, насыщение любой клетки есть трубка (и насыщение любого сечения разумеется есть трубка). Нас будут интересовать здесь некоторые общетопологические свойства насыщений. Мы покажем, например, что трубки (насыщения сечений) всегда являются открытыми множествами. И что насыщения любых открытых множеств также являются открытыми множествами. Мы покажем также, что в некоторых ситуациях насыщения компактов являются замкнутыми множествами (это происходит, когда насыщение состоит из одних так называемых «длинных» орбит). В общем случае, однако, это неверно. В конце статьи будет построен пример гладкого потока и такого компакта (в виде отрезка прямой), что насыщение этого компакта по потоку не является замкнутым множеством (не содержит одну из своих граничных орбит).

Общие сведения о потоках и дифференциальных уравнениях можно найти в [1, 2]. Необходимые факты из топологии и геометрии имеются в [3, 4].

1. Потоки и орбиты

Здесь в основном напоминаются известные сведения о гладких потоках и уточняется терминология. Основным пространством здесь выбрано $\mathbb{R}^3$ — чисто из соображений наглядности и простоты записи; все результаты сохраняют силу в произвольном $\mathbb{R}^n$.

Пусть в открытом множестве $V \subset \mathbb{R}^3$ (например, просто $V = \mathbb{R}^3$) задано векторное поле $F: V \to \mathbb{R}^3$ класса C^r (r — любое фиксированное целое ≥ 1).

Через

$$g^x : J^x \to V$$

обозначим максимальное (непродолжаемое) решение системы $\dot{x} = F(x)$ с начальным условием $g^x(0) = x$ (таким образом, $J^x \ni 0$ — интервал жизни этого решения). Совокупность всех решений g^x, $x \in V$, определяет (максимальный) *поток* поля F — отображение

$$g : D \to V,\ g(t,x) \equiv g_t(x) \equiv g^x(t),$$

определенное в открытом множестве $D \subset \mathbb{R} \times V$, где

$$D = \left\{ (t,x) \in \mathbb{R} \times V \;\middle|\; t \in J^x \right\}.$$

Таким образом, поток g эквивалентен семейству отображений $g^x : J^x \to V$, $x \in V$, где открытое множество $J^x \subset \mathbb{R}$ есть срез D по x, и поток g эквивалентен семейству отображений $g_t : D_t \to V$, $t \in \mathbb{R}$, где открытое множество $D_t \subset V$ есть срез D по t.

Все отображения g, g^x, g_t, — класса C^r. Кроме того, каждое g_t есть диффеоморфизм («преобразование за время t»)

$$g_t : D_t \to D_{-t}$$

с обратным $g_t^{-1} = g_{-t}$, причем g_0 — тождественное отображение $V \to V$. Наконец, для любых $s,t \in \mathbb{R}$ выполнено групповое свойство

$$g_t \circ g_s = g_{t+s}$$

(в соответствующих областях определения).

Образы решений, т. е. множества $O_x = g^x\left(J^x\right)$, $x \in V$, называются *орбитами* потока g. Орбиты задают разбиение пространства V. Орбиты, вообще говоря, могут быть компактными (и тогда это либо «точки», либо «циклы», диффеоморфные окружности) и некомпактными (диффеоморфными прямой $\mathbb{R}$). Если все орбиты не являются точками, то они образуют 1-мерное *слоение* на V.

Если 1-я компонента поля F, задающего поток, положительна, $F^1 > 0$, то, разделив на нее, получим поле с условием $F^1 \equiv 1$. Далее везде мы будем рассматривать только такие потоки и называть их *положительными*. Положительный поток, как легко видеть, однозначно определяется множеством своих орбит (т.е. соответствующим слоением на V). Как правило, далее всегда $V = \mathbb{R}^3$, т. е. речь идет о положительных потоках в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Всякую плоскость в $\mathbb{R}^3$, параллельную осям 2 и 3 (т. е. всякую плоскость $\{t\} \times \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$), мы будем называть *вертикальным слоем* или *вертикалью*. (Иногда так называется след этой плоскости на данном множестве.)

Утверждение. А. *В положительном потоке в пространстве* $\mathbb{R}^3$ *проекция произвольной орбиты* O *на 1-ю ось есть некоторый открытый интервал* I (*с точностью до сдвига это интервал жизни решения*), *причем в каждом вертикальном слое лежит не более одной точки орбиты* O (*ровно одна, если слой задевает* I). Б. *Орбита* O *есть вложенное подмногообразие в* $\mathbb{R}^3$ (*диффеоморфное* $\mathbb{R}$).

Доказательство. В силу условия положительности, $F^1 = 1$, первая компонента любого решения имеет вид $c_0 + t$, откуда и следует А. Условие Б означает, что для любой точки $a \in O$ найдется окрестность U и диффеоморфизм $U \to K$ на некоторый открытый куб K, при котором след орбиты O на U переходит в след 1-й оси на K. Этот факт легко получается из известной теоремы о выпрямлении поля направлений и того, что любая вертикаль содержит не более одной точки орбиты (см. А). Орбита диффеоморфна $\mathbb{R}$, поскольку не является компактной (ее образ при проекции на 1-ю ось — открытый интервал). Утверждение доказано. ►

2. Сечения и клетки

Здесь вводятся понятия *сечения* — 2-мерной площадки, трансверсальной потоку, и *клетки* — области, заметаемой такой площадкой за конечное время при движении по потоку.

Рассмотрим положительный поток $g : D \to \mathbb{R}^3$ (где D — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$). Заметим, что в множестве D лежит всякий 1-мерный сегмент $J^x \times \{x\}$, $x \in \mathbb{R}^3$, и лежит 3-мерная плоскость $\{0\} \times \mathbb{R}^3$.

Сечением в $\mathbb{R}^3$ мы называем подмножество

$$S = \{s\} \times U,$$

где $s \in \mathbb{R}$ — любое число, а $U \subset \mathbb{R}^2$ — любое ограниченное открытое связное множество. Отметим два свойства (доказательство их — несложное упражнение на тему существования у любого компакта в метрическом пространстве базы из r-окрестностей).

А. Для любой точки $x \in \mathbb{R}^3$ и любого ограниченного интервала I, такого что $\overline{I} \subset J^x$ (черта обозначает замыкание), найдется сечение $S \ni x$, такое что

$$\overline{I \times S} \subset D.$$

Б. Для любого сечения S найдется ограниченный интервал I, такой что

$$\overline{I \times S} \subset D$$

(причем всегда можно выбрать $I \ni 0$).

Интервалом жизни сечения S мы называем интервал $J_S \ni 0$, равный объединению всех ограниченных интервалов I, таких что $\overline{I \times S} \subset D$. Из определений вытекает, что $J_S \times \overline{S} \subset D$. Кроме того, для любого ограниченного интервала I условие $\overline{I \times S} \subset D$ равносильно условию $\overline{I} \subset J_S$ (это несложное следствие предыдущих свойств).

Пусть ограниченный интервал I и сечение $S = \{s\} \times U \subset \mathbb{R}^3$ таковы, что $\overline{I \times S} \subset D$. *Клеткой* Γ мы называем множество

$$\Gamma = g(I \times S).$$

В следующем утверждении строится морфизм, который «выпрямляет» клетку Γ, превращая ее в «брус» $I \times U$ (здесь термин «брус» понимается шире обычного и означает просто прямое произведение интервала на любое множество).

Утверждение. *Клетка* Γ *есть открытое связное ограниченное множество в* $\mathbb{R}^3$*, диффеоморфное брусу* $I \times U$*. Именно, отображение*

$$\varphi : I \times U \to \mathbb{R}^3, \ (t, \xi) \mapsto g(t, s, \xi),$$

есть диффеоморфизм $I \times U$ *на* Γ*, переводящий поле* $E = (1, 0, 0)$ *в поле* F *(векторное поле потока* g*).*

Доказательство. Отображение φ есть сужение g на открытое подмножество в координатной 3-мерной плоскости, поэтому φ — гладкое отображение со значениями в Γ.

Покажем, что производная $D\varphi$ — всюду изоморфизм, т. е. что $\det D\varphi \neq 0$. Учитывая, что

$$g^1(t, s, \xi) = s + t \ \text{ и } \ g(t, s, \xi) \equiv g_t(s, \xi),$$

понятно, что

$$D\varphi(t, \xi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline * & \multicolumn{2}{c}{\delta} \end{array} \right), \ Dg_t(s, \xi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline * & \multicolumn{2}{c}{\delta} \end{array} \right),$$

где δ в обеих матрицах — одно и то же ($*$ — разные). Детерминант обеих матриц равен $\det \delta$. Но g_t — диффеоморфизм, и значит, этот детерминант не равен 0.

Непосредственная проверка, основанная на определениях и на свойствах положительного потока, показывает, что отображение φ есть биекция бруса $I \times U$ на клетку Γ. В итоге мы имеем биекцию φ с изоморфной всюду производной $D\varphi$. Поэтому, во-первых, φ есть диффеоморфизм на **открытое** множество **Γ** (образ φ открыт ввиду изоморфности производной). И во-вторых, множество Γ связно (как образ связного $I \times U$). Ограниченность Γ вытекает из того, что Γ лежит в компакте $g\left(\overline{I \times S}\right)$. Наконец, прямое вычисление по правилу переноса полей диффеоморфизмами показывает, что под действием φ поле E переходит в F. Утверждение доказано.►

Замечание. Несколько простых следствий из вышесказанного. Любую точку $x \in \mathbb{R}^3$ можно погрузить в клетку, лежащую в наперед заданной окрестности точки x. Погрузить в клетку можно также любой «плоский» компакт (т. е. компакт, лежащий в вертикальном слое) и любой замкнутый сегмент $[x_1, x_2]$ любой орбиты, и даже замыкание $\overline{\Gamma}$ любой клетки Γ. Все факты основаны на «выпрямлениях» клеток и свойствах А, Б этого раздела.

3. Слои и орбиты в клетках

Здесь изучаются разбиения клеток на вертикальные слои и на орбиты и преобразование слоев под действием потока. (Напомним, что вертикальными слоями мы называем плоскости $\{t\} \times \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$, или следы этих плоскостей на данном множестве.)

Пусть $g : D \to \mathbb{R}^3$ — положительный поток и $S = \{s\} \times U$ — сечение с интервалом жизни J_S. Для любого $t \in J_S$ положим

$$S_t = g_t(S).$$

Основные свойства множеств S_t перечислены в пп. А … Г.

А. Множество S_t есть сечение с интервалом жизни

$$J_{S_t} = J_S - t,$$

лежащее в вертикальном слое над $s + t$. (Это вытекает из того, что g_t есть диффеоморфизм, причем по 1-й компоненте это просто сдвиг на t.)

Б. Для любых $t, t' \in J_S$ выполнено «групповое» свойство

$$g_{t'-t}\left(S_t\right)=S_{t'}$$

(вытекающее из группового свойства потоков).

В. Для любых $t_1, t_2 \in J_S$ (и соответствующего интервала $I=\left(t_1, t_2\right)$) очевидно выполнено $\overline{I} \subset J_S$, т. е. $\overline{I \times S} \subset D$, и значит, определена клетка

$$\Gamma=g(I \times S)=\bigcup_{t \in I} g_t(S) .$$

Из вышесказанного понятно, что семейство сечений S_t, $t \in I$, дает разбиение клетки Γ на вертикальные слои S_t (следы вертикалей на Γ):

$$\Gamma=\coprod_{t \in I} S_t$$

(знак $\coprod$ — символ дизъюнктного объединения).

Г. Для любого $\tau \in J_S$ справедливо равенство

$$g\left((I-\tau) \times S_\tau\right)=g(I \times S)=\Gamma$$

(поскольку $g_{t-\tau}\left(S_\tau\right)=S_t$).

Итак, произвольная клетка $\Gamma=g(I \times S)$ разбита на вертикальные слои S_t, $t \in I$. Она же разбита на орбиты потока (следы полных орбит O_x на клетке). Для более ясного понимания свойств этих разбиений напомним о диффеоморфизме $\varphi: I \times U \rightarrow \Gamma$, связывающем брус $I \times U$ и клетку Γ. Брус $I \times U$ естественным образом разбит на вертикальные слои $\{t\} \times U$ и разбит на орбиты $I \times\{\xi\}$ поля E. Каждый слой в брусе задевает каждую орбиту в одной и только одной точке. Клетка Γ, как уже сказано, также разбита на слои и орбиты. При этом диффеоморфизм φ переводит орбиты в орбиты и слои в слои. Таким образом, каждая орбита в Γ задевает каждый слой в Γ в одной и только одной точке. При этом орбиты, которые мы обозначаем C_ξ, нумеруются точками $\xi \in U$, а слои S_t — точками $t \in I$. Подчеркнем, что каждый слой S_t есть след на Γ вертикали $\{s+t\} \times \mathbb{R}^2$, и каждая орбита $C_\xi \subset \Gamma$ есть след на Γ полной орбиты O_x, где $x=(s, \xi)$.

Остановимся теперь на определенного вида частях (подмножествах) клетки Γ, составленных из целых слоев S_t, либо из целых орбит C_ξ. Возьмем любое открытое связное множество $U' \subset U$ (и соответствующее $S' \subset S$) и любой интервал $I' \subset I$.

Понятно, что множество

$$\Gamma'=g\left(I' \times S'\right)$$

есть клетка, лежащая в клетке Γ. В частности при $U'=U$ или $I'=I$ клетка Γ' как раз составлена из целых слоев S_t или из целых орбит C_ξ.

Укажем еще один пример множеств, составленных из целых орбит C_ξ. Возьмем любое множество $A \subset \Gamma$ и рассмотрим объединение всех орбит $C_\xi \subset \Gamma$, задевающих A. Обозначим это объединение $[A]_\Gamma$. След множества $[A]_\Gamma$ на каком-нибудь слое S_t мы будем называть *тенью* множества A на слое S_t. Отметим факт, который будет использоваться позже: если множество $A \subset \Gamma$ компактно, то и его тень на любом слое S_t компактна. (Выпрямляющий клетку Γ диффеоморфизм делает этот факт очевидным.) Еще одно замечание: орбиты (полные), задевающие тень множества, и орбиты (полные), задевающие само множество, — одни и те же (поскольку любая орбита $C_\xi \subset \Gamma$ есть след на Γ полной орбиты).

Замечание. Введенный здесь термин «тень множества» — вспомогательный, относящийся только к данному исследованию. Возможное использование этого термина другими авторами в другом смысле не должно вызывать недоразумений.

4. Трубки и перенос полей

Здесь вводится понятие трубки (множества, составленного из целых орбит) и описывается конструкция переноса полей с трансверсали к потоку на всю трубку.

Пусть $g: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ — положительный поток и S — сечение с интервалом жизни J_S.

Трубкой T (с сечением S) мы называем объединение всех орбит потока, проходящих через S,

$$T=\bigcup_{x \in S} O_x .$$

Напомним, что с каждым сечением S связано семейство сечений S_t, $t \in J_S$.

Утверждение. *Трубка T (с сечением S) есть открытое связное множество в $\mathbb{R}^3$. При этом каждое сечение S_t, $t \in J_S$, есть вертикальный слой в T над точкой $s+t$ (след на T плоскости $\{s+t\} \times \mathbb{R}^2$), и для любых $t_1, t_2 \in J_S$ открытый сегмент трубки T между S_{t_1} и S_{t_2} есть клетка*

$$\Gamma=g\left(\left(t_1, t_2\right) \times S\right)$$

(разбитая на слои S_t, $t_1 < t < t_2$). Кроме того, клетку Γ можно передвигать вдоль трубки: если τ таково, что $t_1 + \tau, t_2 + \tau \in J_S$, то множество

$$\Gamma_\tau = g\left(\left(t_1 + \tau, t_2 + \tau\right) \times S\right)$$

также есть клетка и

$$\Gamma_\tau = g_\tau\left(\Gamma\right).$$

Доказательство. Связность T следует из того, что любые 2 точки $x_1, x_2 \in T$ лежат в связном множестве $O_{x_1} \cup S \cup O_{x_2}$. Докажем открытость T, т. е. покажем, что произвольная точка $x \in T$ обладает окрестностью V_x, целиком лежащей в T. Точка x лежит в орбите O_x, которая задевает S в некоторой точке y. Точки x, y лежат в одной орбите и, значит, лежат в некоторой клетке Γ'. В следе множества S на Γ' возьмем связное открытое в S множество $S' \subset S$, содержащее y. Оно определяет некоторую клетку $\Gamma'' \subset \Gamma'$, которая уже лежит в T и дает искомую окрестность V_x.

Остальные факты вытекают из свойств слоев в клетках и преобразовании этих слоев вдоль потока (разд. 3). Утверждение доказано.▶

Далее мы опишем конструкцию переноса полей (и гладких функций) вдоль орбит потока.

Говорят, что векторное поле G в области $W \subset \mathbb{R}^3$ *сохраняется потоком* g, если для любых точек q, $g_t\left(q\right) \in W$ выполнено

$$G\left(g_t\left(q\right)\right) = Dg_t\left(q\right) \cdot G\left(q\right).$$

(Функция $\psi : W \to \mathbb{R}$ *сохраняется потоком* g, если она постоянна на орбитах: $\psi\left(g_t\left(q\right)\right) = \psi\left(q\right)$.)

Утверждение. *Пусть* T *— трубка с сечением* S *в потоке* g. *Любое векторное поле* $H_0 : S \to \mathbb{R}^3$ *продолжается* (*однозначно*) *до векторного поля*

$$H : T \to \mathbb{R}^3,$$

сохраняемого потоком g, а именно, в любой точке $g_t\left(p\right) \in T$ ($p \in S$)

$$H\left(g_t\left(p\right)\right) = Dg_t\left(p\right) \cdot H_0\left(p\right).$$

Правило гладкости: если $g \in C^{r+1}$ *и* $H_0 \in C^r$, *то* $H \in C^r$.

Доказательство. Класс гладкости поля H подтверждается несложной технической проверкой. Покажем, что поле H сохраняется потоком g. Дифференцируя равенство

$$g_{t'}\left(p\right) = g_{t'-t}\left(g_t\left(p\right)\right),$$

имеем

$$Dg_{t'}\left(p\right) = Dg_{t'-t}\left(g_t\left(p\right)\right) \cdot Dg_t\left(p\right).$$

Умножая обе части справа на $H_0\left(p\right)$, получаем в итоге

$$H\left(g_{t'}\left(p\right)\right) = Dg_{t'-t}\left(g_t\left(p\right)\right) \cdot H\left(g_t\left(p\right)\right),$$

что и означает сохранение поля потоком. Утверждение доказано.▶

Перенос скалярных функций с сечения S на всю трубку T производится естественным образом: функция должна быть постоянной на орбитах потока. Нужно только проверить, что при этом сохраняется гладкость (т. е. что поток и функция на S класса C^r порождают функцию н а T класса C^r). Для этого надо произвольный сегмент орбиты, $\left[p, g_t\left(p\right)\right]$, погрузить в клетку. Клетку можно выпрямить (и даже так, что сечение S останется неподвижным). И тогда видно, что гладкость функции в клетке — та же, что у функции на S и у выпрямляющего морфизма (т. е. у потока).

5. Разбиения и насыщения

Здесь мы рассматриваем свойства открытости и замкнутости разбиений пространства на орбиты потока.

Напомним, что *разбиение* множества M это набор его подмножеств, таких что они попарно не пересекаются и их объединение есть M. Эти подмножества иногда называют *классами.* (Задание разбиения равносильно заданию отношения эквивалентности на M.)

Подмножество $N \subset M$ называют *насыщенным*, если оно составлено из целых классов. *Насыщением* произвольного подмножества $A \subset M$ называют наименьшее насыщенное подмножество, содержащее A (пересечение всех таких подмножеств). Насыщение мы будем обозначать $\left[A\right]$; это конечно же есть объединение всех классов, задевающих A.

Если M есть топологическое пространство (т. е. в M определены открытые и замкнутые множества), то можно говорить об открытых и замкнутых разбиениях. Именно, разбиение *открыто*, если насыщение $\left[A\right]$ каждого открытого множества $A \subset M$ открыто. Разбиение *замкнуто,* если насыщение $\left[A\right]$ каждого замкнутого множества $A \subset M$ замкнуто.

Пусть теперь в пространстве $\mathbb{R}^3$ задан положительный поток g. Тогда, как уже отмечалось, орбиты потока g суть 1-мерные гладкие подмногообразия, и они образуют разбиение пространства $\mathbb{R}^3$.

Непосредственно из определений вытекает, что трубка T в $\mathbb{R}^3$ с сечением S (т. е. объединение всех орбит, задевающих S) есть как раз насыщение множества S, $T=[S]$. (Она же есть насыщение любой клетки Γ с сечением S.) Ранее уже установлено (разд. 4), что любая трубка есть открытое множество. Сейчас, опираясь на этот факт, мы можем доказать открытость разбиения на орбиты.

Утверждение. *Разбиение пространства* $\mathbb{R}^3$ *на орбиты положительного потока открыто. Другими словами, насыщение* (*вдоль потока*) *любого открытого множества* $U \subset \mathbb{R}^3$ *открыто.*

Доказательство. Каждую точку a открытого множества U можно окружить окрестностью $V_a \subset U$. В окрестность V_a, как показано ранее, можно вписать клетку $\Gamma_a \subset V_a$ с сечением $S_a \subset \Gamma_a$, проходящим через a. Рассмотрим всевозможные трубки $T_a=[S_a]$, $a \in U$. Это открытые и насыщенные множества. Поэтому таково и их объединение

$$T=\bigcup_{a\in U} T_a .$$

Остается заметить, что T есть в точности насыщение множества U, $T=[U]$, поскольку T есть объединение орбит, задевающих U. Утверждение доказано.▶

В отличие от свойства открытости, свойством замкнутости разбиение на орбиты положительного потока вообще говоря не обладает. Например, в пространстве $\mathbb{R}^2$ переменных x, y возьмем поток единичного векторного поля $E=(1,0)$. Кривая $y=e^x$ есть замкнутое множество, а ее насыщение по потоку не замкнуто (оно представляет собой открытую верхнюю полуплоскость). Для приложений, однако, более важны свойства насыщений не просто замкнутых, а **компактных** множеств. Этому посвящен следующий разд. 6.

Замечание. Термин «насыщение» — общематематический, относящийся к теории произвольных разбиений (теории отношений эквивалентности); см., например, книгу «Теория множеств» из известного трактата Бурбаки.

6. Насыщения компактов

Здесь показано, что свойства насыщений компактных множеств в некотором смысле зависят от типа орбит, из которых состоит насыщение.

Насыщение произвольного компакта в положительном потоке в пространстве $\mathbb{R}^3$, вообще говоря, не является замкнутым множеством. Проиллюстрировать этот факт не так просто. Соответствующий пример приводится в следующем разд. 7; там построен поток и указан компакт (в виде отрезка прямой), для которого насыщение вдоль орбит этого потока не есть замкнутое множество.

Тем не менее, можно указать условие, при котором насыщение данного компакта будет замкнутым. Назовем орбиту, проходящую через точку $x \in \mathbb{R}^3$, *длинной,* если интервал жизни J^x есть вся ось, $J^x=\mathbb{R}$.

Утверждение. *В положительном потоке* g *всякий компакт, задеваемый только длинными орбитами, имеет замкнутое насыщение.* (*Если вообще, все орбиты потока длинные, то, разумеется, любой компакт имеет замкнутое насыщение.*)

Доказательство. Мы будем называть *плоским компактом* всякий компакт $K_t \subset \mathbb{R}^3$, лежащий в какой-нибудь вертикали $L_t=\{t\}\times\mathbb{R}^2$.

А. Покажем, что плоский компакт K_t, задеваемый только длинными орбитами, имеет замкнутое насыщение $[K_t]$. Насыщение $[K_t]$ есть множество $g(\mathbb{R}\times K_t)$. Поток g, как мы знаем, переносит за время τ точки плоскости L_t в точки плоскости $L_{t+\tau}$ (если, конечно, τ лежит в интервале жизни точки). Отсюда понятно, что для любых $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$ множество

$$H=g\left([\tau_1,\tau_2]\times K_t\right)$$

заключено между плоскостями $L_{t+\tau_1}$ и $L_{t+\tau_2}$ (сами плоскости также задеты), причем H — компакт (как непрерывный образ компакта).

Возьмем теперь любую точку a вне насыщения $[K_t]$, и пусть L — проходящая через a вертикаль. Слева и справа от L возьмем какие-то вертикали L_1 и L_2 и выберем τ_1, τ_2, так чтобы H было как раз ограничено плоскостями L_1, L_2. Обозначим через Π открытую полосу между L_1 и L_2. Тогда

$$H=\overline{\Pi}\cap[K_t].$$

Поэтому, если выбрать окрестность $V_a \subset \Pi$ точки a, не задевающую компакта H, то она не будет задевать и $[K_t]$. Наличие окрестности V_a доказывает замкнутость $[K_t]$.

Б. Покажем теперь, что насыщение **любого** компакта $K \subset \mathbb{R}^3$ (задеваемого только длинными орбитами) замкнуто. Компакт K разбит на вертикальные (компактные) слои $K_t \subset L_t$. Каждый плоский компакт K_t можно погрузить в клетку Γ_t, и даже так, что замыкание $\overline{\Gamma_t}$ будет лежать в некоторой большей клетке $\hat{\Gamma}_t$,

$$K_t \subset \Gamma_t \subset \overline{\Gamma_t} \subset \hat{\Gamma}_t$$

(все эти возможности упоминались ранее в разд. 2). Клетки Γ_t образуют покрытие компакта K. Поэтому (ввиду компактности) можно выбрать конечное число этих клеток, которые также будут давать покрытие K,

$$\Gamma_{t_1} \cup \ldots \cup \Gamma_{t_m} \supset K .$$

Рассмотрим следы замыканий $\overline{\Gamma_{t_i}}$ на компакте K. Каждый такой след $P_i = K \cap \overline{\Gamma_{t_i}}$ есть компакт, лежащий в клетке $\hat{\Gamma}_{t_i}$. Ранее (см. разд. 3), для множества, лежащего в клетке, было введено понятие **тени** этого множества на какой-то вертикали, задевающей клетку. При этом было отмечено, что, во-первых, тень компакта сама компактна, и во-вторых, орбиты, задевающие тень множества, и орбиты, задевающие само множество, — в точности одни и те же. Другими словами, насыщение тени множества совпадает с насыщением самого множества. Для каждого $P_i \subset \hat{\Gamma}_{t_i}$ обозначим через Q_i — тень P_i на плоскости L_{t_i}. Тогда Q_i есть компакт (поскольку P_i — компакт), причем это плоский компакт и насыщение $[Q_i]$ совпадает с насыщением $[P_i]$. Последнее означает, что все орбиты, задевающие Q_i, — длинные (ибо $P_i \subset K$). В силу А, насыщение плоского компакта, задеваемого только длинными орбитами, есть замкнутое множество. Таким образом, каждое множество $[P_i] = [Q_i]$ — замкнуто.

Нам остается заметить, что

$$K = P_1 \cup \ldots \cup P_m ,$$

и значит

$$[K] = [P_1] \cup \ldots \cup [P_m] .$$

А поскольку каждое $[P_i]$ замкнуто, то и $[K]$ замкнуто. Утверждение доказано.▶

7. Пример незамкнутого насыщения

Как показано в предыдущем разделе 6, в положительном потоке насыщение любого компакта, задеваемого только длинными орбитами, замкнуто. Требование длинных орбит здесь существенно. Это показывает описываемый далее пример.

Мы построим положительный поток, в котором лишь одна из орбит, задевающих данный компакт, не является длинной. Этого достаточно, чтобы насыщение компакта было незамкнутым.

Поток в пространстве $\mathbb{R}^2$ переменных x, y зададим в виде автономной системы

$$\dot{x} = 1 , \ \dot{y} = \Phi(x, y)$$

(пример потока в $\mathbb{R}^3$ немедленно получается отсюда добавлением уравнения $\dot{z} = 0$). Определим функцию Φ. В плоскости x, y выделим область Δ, ограниченную снизу осью абсцисс $y = 0$, а слева и справа — гиперболами $y = -1/x$ и $y = 1/x$. Другими словами, Δ это такой «криволинейный» треугольник с вершинами в бесконечности:

$$\Delta = \left\{ x, y \;\middle|\; |xy| < 1, \ y > 0 \right\} .$$

В областях слева, справа и внизу от Δ определим функцию Φ равной соответственно y^2, $-y^2$ и 0. В самой области Δ положим

$$\Phi(x, y) = -2y^2 \frac{xy}{1 + x^2 y^2} .$$

Частные производные функции Φ в области Δ равны

$$\partial_x \Phi(x, y) = -2y^3 \frac{1 - x^2 y^2}{\left(1 + x^2 y^2\right)^2} ,$$

$$\partial_y \Phi(x, y) = -2xy^2 \frac{3 + x^2 y^2}{\left(1 + x^2 y^2\right)^2} .$$

На границах области Δ, т. е. при $xy = \pm 1$ и при $y = 0$, имеем

$$\Phi\big|_{xy=\pm1} = \mp y^2 , \ \Phi\big|_{y=0} = 0 ,$$

$$\partial_x \Phi\big|_{xy=\pm1} = 0 , \ \partial_x \Phi\big|_{y=0} = 0 ,$$

$$\partial_y \Phi\big|_{xy=\pm1} = \mp 2y , \ \partial_y \Phi\big|_{y=0} = 0 .$$

Из этих данных видно, что функция Φ — непрерывная и даже гладкая (класса C^1) в $\mathbb{R}^2$.

Таким образом, мы определили некоторый гладкий положительный поток в $\mathbb{R}^2$. Попробуем найти его орбиты. Поток задается 2-мерной автономной системой $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = \Phi(x, y)$. Ввиду условия $\dot{x} = 1$ эта система эквивалентна 1-мерной неавтономной системе

$$\dot{y} = \Phi(t, y) .$$

Графики решений этой системы (в плоскости t, y) это то же, что орбиты исходной системы (в плоскости x,y), и далее мы эти графики так и называем — орбитами.

Прежде всего отметим 3 очевидные орбиты, ограничивающие область Δ: это орбиты $y=-1/t$, $y=1/t$ и $y=0$. Далее, из вида правой части вне Δ, понятно, что области слева от Δ, справа от Δ и внизу от Δ покрыты соответственно орбитами

$$y=-\frac{1}{t+C},\ y=\frac{1}{t+C},\ y=C.$$

Наконец, относительно самой области Δ мы утверждаем, что она покрыта орбитами $y=\gamma_C(t)$, $C>0$, где

$$\gamma_C(t)=-\frac{1-\sqrt{1+4C^2t^2}}{2Ct^2}$$

и $\gamma_C(0)=C$, т. е. γ_C определено на всей вещественной оси и при всех $C>0$.

Обоснуем это утверждение. Элементарная проверка показывает, что при любом $C>0$ функция γ_C — положительная, гладкая (класса C^1), и представляет собой симметричный «колокол» с вершиной в 0. Производная ее равна

$$\dot\gamma_C(t)=-\frac{\left(1-\sqrt{1+4C^2t^2}\right)^2}{2Ct^3\sqrt{1+4C^2t^2}}$$

и $\dot\gamma_C(0)=0$. График функции γ_C лежит в области Δ, поскольку

$$\gamma_C(t)<\left|\frac{1}{t}\right|.$$

(Эту оценку легко получить из неравенства

$$\sqrt{1+\tau^2}<1+\tau$$

при $\tau>0$.) Подставляя теперь γ_C вместо y в уравнение $\dot y=\Phi(t,y)$ (производная $\dot\gamma_C$ выписана выше), убеждаемся, что γ_C есть решение этого уравнения в области Δ. Остается проверить, что орбиты $y=\gamma_C(t)$, $C>0$, покрывают Δ. Возьмем любую точку $(t_0,y_0)\in\Delta$ и положим

$$C_0=\frac{y_0}{1-t_0^2y_0^2}.$$

Прямая подстановка показывает, что функция γ_{C_0} в точке t_0 равна как раз y_0, что и требуется.

Итак, мы нашли все орбиты заданного потока. В частности, открытая область Δ покрыта орбитами $y=\gamma_C(t)$, $C>0$. Заметим, что все эти орбиты — длинные (γ_C определено на всей оси). Граница области Δ составлена из 3-х орбит — длинной орбиты $y=0$ и 2-х коротких орбит $y=-1/t$ и $y=1/t$. Обозначим эти 3 орбиты соответственно O_0, O_1 и O_2, и заметим, что замыкание $\overline{\Delta}$ равно

$$\overline{\Delta}=\Delta\cup O_0\cup O_1\cup O_2.$$

Наша цель — указать компакт с незамкнутым насыщением. Обозначим точки $a_0=(-1,0)$, $a_1=(-1,1)$, и соединяющий их замкнутый вертикальный сегмент $I=[a_0,a_1]$, а также соответствующий открытый сегмент $J=(a_0,a_1)$.

Мы утверждаем, что насыщение $[I]$ компакта I незамкнуто. В самом деле, все орбиты $y=\gamma_C(t)$, $C>0$, составляют область Δ, причем все они длинные, и значит, в частности, все они задевают вертикаль $t=-1$. Но след этой вертикали на области Δ есть J, поэтому насыщение $[J]$ есть Δ. Насыщение $[I]$ получается из $[J]$ добавлением 2-х орбит, проходящих через концевые точки a_0, a_1. Это орбиты O_0, O_1. Таким образом,

$$[I]=\Delta\cup O_0\cup O_1,$$

и значит

$$\Delta\subset[I]\subset\overline{\Delta},$$

где все 3 множества разные. Отсюда понятно, что средний член $[I]$ не может быть замкнутым (между множеством и его замыканием нельзя вставить замкнутое множество). Искомый пример построен.

Литература

1. *Хирш М.* Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979.
2. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: URSS, 2004.
3. *Постников М. М.* Гладкие многообразия. М.: Наука, 1987.
4. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.

Рабовер Владимир Ильич. Н. с. ИСА РАН. К. ф.-м. н. Окончил в 1977 г. МФТИ. Количество печатных работ 20. Область научных интересов: нелинейный анализ и теория управления. E-mail: golvic@isa.ru