# Методы и модели в экономике

## Цикличность конечного потребления в модели децентрализованной экономики*

А. П. Абрамов

**Аннотация.** Рассматривается динамическая модель децентрализованной экономики с леонтьевскими технологиями и конечным потреблением, которое определяется эндогенными переменными модели. Показано, что схема автономного планирования производства отраслями, базирующаяся на показателях сбыта, приводит к циклической динамике последовательностей нормированных векторов производства и конечного потребления.

**Ключевые слова:** *децентрализованная экономика, леонтьевские технологии, конечное потребление, циклическая динамика.*

Теория сбалансированного роста, основные результаты которой приведены в монографиях [1–4], является важным достижением математической экономики. Однако модели экономических систем, на которых базируется эта теория, неявно предполагают наличие централизованного управления экономическими агентами. Первые результаты обобщения этой теории на модели децентрализованных экономических систем приведены в работах [5–6]. В развитие данных исследований, в работе [7] описан механизм принятия управленческих решений в замкнутой децентрализованной экономической системе с леонтьевскими технологиями, который приводит к циклической динамике некоторых экономических показателей системы.

В данной работе приводится обобщение полученных в [7] результатов на случай открытой экономической системы с конечным потреблением. Значимость такого обобщения объясняется тем, что главная задача реальных экономических систем состоит в удовлетворении потребностей общества в продуктах и услугах. Соответственно, учет фактора конечного потребления является несомненным достоинством любой математической модели, описывающей многоотраслевую экономику.

Рассмотрим один из возможных вариантов учета конечного потребления в модели децентрализованной экономики с леонтьевскими технологиями. Введем следующие обозначения:

$t$ — индекс временного шага модели, $t = 0,1,2,\ldots$ ,

$i$ — индекс отрасли, $i = 1,\ldots,n$,

$A$ — квадратная неотрицательная матрица порядка $n$, элементы которой $a_{ij}$ равны удельным затратам продукта $i$ при производстве продукта $j$ (эти коэффициентами называются технологическими),

$x(t)$ — вектор выпуска продукции экономической системой на шаге $t$, компоненты которого равны объемам производства соответствующих отраслей на данном шаге,

$x^s(t)$ — вектор объемов реализации продукции, произведенной на шаге $t$,

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (пректы № 13–07–00730, № 11–07–00201).

$x^d(t)$ — вектор объемов спроса на продукты, произведенные на шаге *t*,

$x^p(t)$ — вектор планов выпуска продукции на шаге *t,*

$c(t)$ — вектор конечного потребления продукции на шаге *t*,

$c^d(t)$ — вектор величин спроса на конечное потребление на шаге *t*.

Предполагается, что объем конечного потребления и производственные затраты любого из продуктов не могут превосходить объема выпуска данного продукта на предыдущем шаге:

$$Ax(t)+c(t)\le x(t-1), \qquad t=1,2,...$$

Такой вид ограничения означает, что произведенная продукция должна быть использована в течение следующего шага в качестве производственного ресурса или/и для конечного потребления, после чего она теряет свои потребительские свойства.

Технологическая матрица $A$ предполагается неразложимой. Тем самым нетривиальная динамика системы на бесконечном временном горизонте возможна лишь при строго положительном векторе начальных запасов $x(0)$ и положительных выпусках всех видов продукции на всех шагах. С другой стороны, некоторые из компонент вектора $c(t)$ могут иметь нулевые значения при всех $t$.

В реальных экономических системах формирование спроса на продукты конечного потребления зависит от множества экономических, социальных и психологических факторов. Будем определять потребительский спрос, используя только эндогенные переменные модели, а именно объемы производства. Обоснованием такого подхода служит тот факт, что спрос на продукцию конечного потребления во многом определяется доходами трудящихся. В свою очередь, доходы определяются как трудозатратами, так и отраслевыми ставками заработной платы. Хотя фактор труда в данной модели не рассматривается, но трудозатраты можно косвенно оценить через объемы производства. Следовательно, появляется возможность оценить спрос на конечное потребление, зная объемы выпуска и действующие нормативы заработной платы в сфере производства. Заметим, что такую оценку можно считать корректной только для работающих по найму, поскольку их труд оплачивается сдельно или за отработанное время.

Исходя из приведенной аргументации, будем предполагать, что вектор $c^d(t)$ величин потребительского спроса на шаге $t$ связан с вектором выпуска $x(t-1)$ на закончившемся производственном цикле линейным соотношением вида

$$c^d(t)=Bx(t-1), \tag{1}$$

где $B$ — неотрицательная квадратная матрица порядка *n* с постоянными элементами. Если считать, что работники всех отраслей имеют одинаковые потребности в продуктах конечного потребления, то данная матрица состоит из коллинеарных столбцов, при этом различие столбцов обусловлено отраслевой спецификой трудозатрат на производство единицы продукции, а также отраслевыми ставками оплаты труда.

С учетом фактора конечного спроса, формула для вычисления вектора спроса $x^d(t-1)$ на продукцию шага $t-1$ выглядит так:

$$x^d(t-1)=Ax^p(t)+c^d(t).$$

**Замечание 1.** *Использование этой формулы предполагает, что любая отрасль i, продукция которой поставляется для конечного потребления, должна располагать всей информацией, необходимой для вычисления компоненты* $c_i^d(t)$ *согласно определению (1). Как правило, в реальной экономике взаимодействие между производителем и конечным потребителем осуществляется через цепочку посредников, они же косвенно и доводят информацию о величинах конечного спроса до производителей путем заказов на оптовые поставки продукции.*

Рассмотрим процедуру распределения продукции шага $t-1$ между производственным и конечным потреблением. Каждая отрасль *i* вычисляет коэффициент $\eta_i(t-1)$ обеспеченности величины спроса произведенной продукцией: $\eta_i(t-1)=x_i^d(t-1)/x_i(t-1)$. Далее эти коэффициенты сообщаются всем отраслям системы. На основе полученных данных каждая из отраслей вычисляет максимальное значение этих показателей:

$$\eta_{\max}(t-1)=\max_i \eta_i(t-1). \tag{2}$$

Будем предполагать, что на всех шагах этот показатель больше единицы, т. е. на каждом шаге существует продукт, величина спроса на который превышает объем производства. Если ни сфера производства, ни конечное потребление не имеют привилегий по снабжению продукцией, то логично считать, что наиболее дефицитный продукт(ы), т. е. тот, на котором достигается максимальное значение чисел $\eta_i(t-1)$, распределяется среди всех потребителей пропорционально величинам спроса. Для распределения остальных продуктов на нужды производства и конечное потребление используется другой подход. Предполагается, что все планы производства на шаге *t* корректируются под наиболее дефицитный ресурс, т. е. уменьшаются в $\eta_{\max}(t-1)$ раз. Соответственно, скорректированные производственные планы полностью обеспечиваются ресурсами.

Что касается конечного потребления, то подобная корректировка поставок выглядит явно неразумной, если в модели не требовать из каких-то соображений строгой комплектности потребления. Поэтому вместо корректировки поставок под наиболее дефицитный продукт, будем считать, что объем конечного потребления продукта вида *i* определяется формулой вида

$$c_i(t) = \min\left\{c_i^d(t),\ x_i(t-1) - \frac{1}{\eta_{\max}(t-1)}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^p(t)\right\} \tag{3}$$

Ясно, что данный подход обеспечивает не меньшие объемы конечного потребления всех продуктов по сравнению с отвергнутым. Как следствие, векторы $c^d(t)$ и $c(t)$ могут быть, вообще говоря, неколлинеарными, т. е. в модели допускается некомплектное конечное потребление продукции. С другой стороны, очевидный недостаток подхода, на котором базируется эта формула, состоит в том, что не учитывается возможность замещения одних продуктов другими, т. е. дефицит некоторого продукта нельзя компенсировать потреблением других продуктов сверх пределов, установленных соответствующими компонентами вектора $c^d(t)$.

Данная схема распределения выпусков позволяет подсчитать объемы реализованной продукции, произведенной отраслью *i* на шаге $t-1$, как функцию объемов производства на шагах $t-1$ и *t*:

$$\begin{aligned} x_i^s(t-1) &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) + \\ &+ \min\left\{x_i(t-1) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t), \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t-1)\right\}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $b_{ij}$ — элементы матрицы $B$, фигурирующей в формуле (1).

Если обозначить через

$$\overline{x}_i^s(t-1) \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t)$$

объем поставок на нужды производства, то формулу (4) можно переписать так:

$$\begin{aligned} x_i^s(t-1) &= \overline{x}_i^s(t-1) + \\ &+ \min\left\{x_i(t-1) - \overline{x}_i^s(t-1), \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t-1)\right\}. \end{aligned}$$

Для завершения описания модели осталось рассмотреть схему вычисления планов. Заметим, что в формуле (1) переменной величиной является только вектор выпуска продукции, значение которого становится известным в момент завершения шага $t-1$. Это позволяет считать, что отрасль *i,* определяя план выпуска $x_i^p(t)$ по окончанию шага $t-1$, знает объем спроса на конечное потребление своей продукции на шаге *t*. Таким образом, показатель $c_i^d(t)$ можно рассматривать как аддитивную составляющую плана отрасли $i$ на шаге *t*. Далее при составлении плана необходимо учесть прогноз объема сбыта продукта на производственные цели. Этот показатель будем вычислять с использованием диапазонов успешности реализации продукции, предназначенной на нужды производства.

Предположим, что отрасль i в момент окончания шага $t-1$ начинает планировать объем выпуска производственного назначения на шаге $t$ с сопоставления процента реализации своей продукции, произведенной на шаге $t-2$ и предназначенной для производственного потребления, с некоей заданной шкалой реализации. Эта шкала определена руководством отрасли и не меняется на рассматриваемом горизонте работы системы.

Шкала реализации отрасли i содержит $L(i)$ диапазонов, где $L(i) \ge 1$. Например, при $L(i) = 5$ эта шкала может быть такой: диапазон с индексом $l = 1$ отвечает случаю, когда реализовано не более 60 % произведенной продукции производственного назначения, диапазон $l = 2$ соответствует реализации от 60 % до 70 % включительно, …, диапазон $l = 5$ — уровням реализации, принадлежащих интервалу [90 %, 100 %].

Шкала любой отрасли должна удовлетворять трем условиям:

- любой диапазон является интервалом (открытым, замкнутым или полуоткрытым),
- диапазоны одной шкалы попарно не пересекаются,
- объединение диапазонов одной шкалы образует покрытие отрезка [0, 100].

Отметим, что допустимо выделение в вырожденный диапазон отдельной точки, например, уровня реализации в 100 %. Следует подчеркнуть, что и число диапазонов и их границы, вообще говоря, специфичны для каждой отрасли. С другой стороны, все отрасли могут использовать единую шкалу диапазонов.

Каждому диапазону соответствует свой коэффициент $k_{il}$, который имеет простой экономический смысл: — руководство отрасли $i$ ожидает темпа роста потребления своей продукции производственного назначения на уровне $\sqrt{k_{il}}$ в расчете на один шаг, если наблюдавшийся процент реализации ее продукции соответствует диапазону $l$. Предполагается, что при любом фиксированном $i$ коэффициенты $\{k_{il}\}$ упорядочены так: $k_{i1} < k_{i2} < \cdots < k_{iL(i)}$, т. е. диапазону с большим процентом реализации соответствует ожидание большего темпа роста потребления продукции данного вида. Значения коэффициентов $\{k_{il}\}$ определяет руководство соответствующей отрасли, и они не меняются на всем горизонте работы системы.

**Замечание 2.** *Предположение о неизменности коэффициентов и диапазонов шкалы нужно лишь для исследования асимптотического поведения системы. Изменение коэффициентов прерывает складывающуюся тенденцию в динамике системы и служит отправной точкой для новой. С точки зрения здравого смысла, руководство отрасли имеет право в любой момент изменить систему диапазонов своей шкалы, а также значения коэффициентов, если их использование приводит к неудовлетворительным результатам работы отрасли.*

Определяя план выпуска продукции на шаге $t$, отрасль $i$ использует формулу

$$x_i^p(t) = k_{il}\overline{x}_i^s(t-2) + c_i^d(t), \tag{5}$$

где положительный коэффициент $k_{il}$ отвечает диапазону $l$ шкалы отрасли $i$, которому принадлежит процент реализации продукции производственного назначения, произведенной на шаге $t-2$. Из этой формулы следует, что векторы выпуска на двух соседних шагах связаны равенством вида

$$x(t) = \beta(t)(K(t)Y + B)x(t-1),$$

где скалярный параметр $\beta(t)$ соотносит вектор выпуска с вектором плановых показателей и вычисляется с использованием параметра $\eta_{\max}(t-1)$ (2) так: $\beta(t) = 1/\eta_{\max}(t-1)$, а диагональная матрица $K(t)$ образована из соответствующих коэффициентов $k_{il}$, применявшихся отраслями при планировании производства на шаге $t$. Из этого равенства, используя индукцию, установим связь между векторами $x(t)$ и $x^p(1)$:

$$\begin{aligned} x(t) = \beta(t)\cdots\beta(1)(K(t)Y + \\ +B)(K(t-1)Y + B)\cdots(K(2)Y + B)x^p(1). \end{aligned} \tag{6}$$

При изучении данной модели будем считать, что значения коэффициентов $\{k_{il}\}$ достаточно велики, так что первоначальные планы (5) не могут быть выполнены на любом шаге из-за недостатка ресурсов.

**Теорема.** *Если технологическая матрица $A$ неразложима, векторы $x(0)$ и $x^p(1)$ строго положительны и выполняется неравенство*

$$k_{\min} \equiv \min_i k_{i1} \geq (1/\lambda_A)^2,$$

*где $\lambda_A$ — фробениусово собственное число технологической матрицы $A$, то начиная с некоторого шага $T$, возникает цикличность в произведении матриц, фигурирующих в правой части формулы (6). Эта цикличность проявляется в том, что при $t \geq T$ в качестве новых сомножителей используются только $m$, $m \geq 1$, матриц в строго определенном порядке. Если записать параметр $t$ в виде $t = T + ms + j$, $s = 0,1,...$, $j = 0,...,m-1$, то указанная цикличность позволяет уточнить формулу (6) при $t \geq T$ так:*

$$x(T+ms+j) = \begin{cases} \beta(t)\cdots\beta(T+1)\left(M_{m-1}A\cdots M_0A\right)^s x(T), & j=0; \\ \beta(t)\cdots\beta(T+1)M_{j-1}A\cdots M_0A\left(M_{m-1}A\cdots M_0A\right)^s x(T), & j>0, \end{cases}$$

*где $M_0, M_1, \ldots, M_{m-1}$ — фиксированные матрицы вида $M_j = K_j + B$, а $K_j$, $j = 0,...,m-1$, суть диагональные матрицы, положительные элементы которых образованы из коэффициентов, используемых при вычислении планов соответствующими отраслями.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству существования предельного цикла в последовательности нормированных выпусков в более простой модели децентрализованной многоотраслевой экономической системы, рассмотренной в работе [7].

Предельный цикл последовательности нормированных выпусков порождает в этой модели предельный цикл последовательности нормированных векторов потребления $\left\{c(t)/\|c(t)\|\right\}$. Чтобы убедиться в этом, перепишем формулу (3) так:

$$c_i(t) = \min\left\{\sum_{j=1}^n b_{ij}x_j(t-1), x_i(t-1) - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(t)\right\},$$
$$i = 1, \ldots, n.$$

Поскольку в пределе через каждые $m$ шагов цикла компоненты векторов выпуска меняются в одной и той же пропорции, то этим свойством должны обладать и компоненты векторов конечного потребления.

Так как темпы роста выпуска любого продукта от шага к шагу, вообще говоря, меняются, а переменная $c_i(t)$ зависит от переменных $x(t-1)$ и $x(t)$, то темпы роста на любом шаге переменных $c_i(t)$ и $x_i(t)$, $i=1,...,n,$ вообще говоря, различны.

## Литература


1. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей. — М.: ИЛ, 1963, 420 с.
2. *Моришима М.* Равновесие, устойчивость, рост (Многоотраслевой анализ). М.: Наука, 1972, 280 с.
3. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. — М.: Мир, 1972, 520 с.
4. *Макаров В. Л., Рубинов А. М.* Математическая теория экономической динамики и равновесия. — М.: Наука, 1973, 336 с.
5. *Беленький В. З., Сластников А. Д.* Равновесная динамика замкнутого рынка монопродуктовых производств // Экономика и математические методы, 1994, т. 30, № 4, с. 112–128.
6. *Абрамов А. П.* О выходе на магистраль сбалансированного роста в модели замкнутой децентрализованной экономики // Математическое моделирование, 2008, т. 20, № 2, с. 3–12.
7. *Абрамов А. П.* Циклический рост в модели замкнутой децентрализован-ной экономики // Проблемы управления, 2012, № 2, с. 32–37.


**Абрамов Александр Петрович.** Гл. н. с. ФГБУН ВЦ им. А. А. Дородницына. Д. ф.-м. н., профессор. Окончил МФТИ в 1973 г. Количество печатных работ: 96, в т. ч. 6 монографий. Область научных интересов: математическая экономика, исследование операций. E-mail: apabramov@list.ru