Оптимальное управление финансированием целевых программ с помощью линейного программирования

С. И. Носков

Аннотация. В статье рассматривается проблема оптимального распределения финансовых средств по частным направлениям целевых программ с учетом временного фактора. Показано, что она при некоторых допущениях может быть сведена к задаче линейного программирования.

Ключевые слова: *целевая программа, оптимальное управление, линейное программирование.*

Одной из ключевых проблем, возникающих при разработке целевых программ и управления ходом их выполнения, является решение вопросов определения и (или) оперативной корректировки объемов средств, расходуемых по различным направлениям. И проблема эта касается, по существу, любой из таких программ, независимо от их характера и масштаба, будь то программы федерального, регионального, муниципального или отраслевого уровней. Особенно это актуально для ситуаций, когда остро ощущается недостаток всех видов ресурсов. При этом важно не только выделение определенных (фиксированных) финансовых ресурсов под реализацию конкретных мероприятий, но и направление их именно туда, где текущая ситуация складывается особенно неблагоприятно. Руководитель программы должен быть абсолютно уверен в эффективности того формального аппарата или методики, который будет положен в основу формирования механизма распределения финансовых ресурсов по отдельным программным направлениям.

В настоящей работе предлагается математическая модель управления финансированием целевой программы, методически основанная на алгоритмической схеме, изложенной в монографии [1].

Итак, пусть органом управления соответствующего уровня и специализации принято решение о выделении финансовых средств с фиксированной по каким-либо временным отрезкам (например, годам) суммой в рамках реализации некоторой целевой программы для улучшения качества функционирования объекта управления в целом. При этом неизбежно возникает проблема оптимального, или, по крайней мере, рационального, расходования этих средств по отдельным направлениям, например, таким, как развитие транспортной инфраструктуры, строительство жилья, улучшение социальных условий на подведомственной территории, подготовка профессиональных кадров, снижение уровней уязвимости объектов определенных категории и т. д.

Перейдем к формальной постановке проблемы.

Пусть $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))$ — вектор значений показателей, в денежном выражении отражающих состояние объекта управления за период времени t (обычно это номер года) по отдельным направлениям функционирования. В качестве переменных y_i могут выступать, в частности, суммарная стоимость жилого фонда, объектов транспортной инфраструктуры, социальной сферы, фонда заработной платы и т. д.

Важным вопросом, подлежащим решению на начальной стадии исследования исходной проблемы, является выбор глобального (агрегированного) показателя (критерия, фактора), который в целом, одним числом, выражал бы качество (эффективность, уровень) функционирования объекта управления. В рамках теории принятия решений (см., например, [2, 3]), занимающейся проблемами векторной (многокритериальной) оптимизации, разработано значительное число классов соответствующих функций (сверток, агрегатов) [4].

Представляется, что наиболее адекватной по отношению к рассматриваемой проблеме функцией является кусочно-линейная свертка частных показателей вида

$$z(t) = \min\{\alpha_1 y_1(t), \alpha_2 y_2(t), \dots, \alpha_m y_m(t)\},$$

$$\alpha_i > 0,\ i = \overline{1,m}, \qquad (1)$$

Здесь α_i, $i = \overline{1,m}$ — коэффициенты (параметры) при локальных показателях, указывающие на их относительную значимость. Определены эти параметры могут быть либо расчетным путем [5], либо посредством привлечения экспертной информации с ее последующей обработкой [6], либо, что наиболее эффективно, с помощью комбинирования этих подходов. Замечательное свойство критерия (1) (он еще называется функцией с постоянными пропорциями) состоит в следующем: если лимитирующим фактором («узким местом») является показатель y_i, то никакое сколь угодно большое увеличение значений других критериев посредством «вливания» для этого соответствующих финансовых ресурсов не приведет к улучшению обстановки на объекте управления в целом, а лишь усилит имеющуюся диспропорцию.

Предполагая, что каждый частный показатель y_i измеряется в стоимостных единицах, или может быть к ним сведен, представим его динамику рекуррентным соотношением вида:

$$y_i(t+1) = \beta_i y_i(t) + u_i(t+1),\ i=\overline{1,m},\ t=\overline{0,T-1}\,. \quad (2)$$

Здесь β_i, $i=\overline{1,m}$ — амортизационные коэффициенты из интервала (0, 1), рассчитанные аналогичными по отношению к α_i способами или заданные эмпирически; $u_i(t)$ — объем финансовых ресурсов, выделенных за период времени t на наращивание фактора y_i; T — плановый горизонт, или период реализации данной целевой программы.

Начальные условия $y_i(0)$, $i=\overline{1,m}$ считаются заданными:

$$y_i(0) = y_i^0\,. \quad (3)$$

Кроме того, предполагаются известными объемы финансовых ресурсов, выделяемых каждый год на программу в целом:

$$\overline{u}(t) = \sum_{i=1}^{m} u_i(t),\ t=\overline{1,T}\,. \quad (4)$$

Учитывая то обстоятельство, что освоение средств может происходить с временным запаздыванием (как, например, в строительстве), соотношение (2) может быть преобразовано к виду:

$$y_i(t+1) = \beta_i y_i(t) + \sum_{j=0}^{\tau_i} \gamma_i^j u_i(t+1-j)\,,$$

где γ_i^j — дисконтирующие коэффициенты, τ_i — лаги запаздывания. Это, в свою очередь, приведет к необходимости задания начальных условий для объемов выделяемых ресурсов:

$$u_i(0) = u_i^0, u_i(-1) = u_i^1, \ldots, u_i(1-\tau_i) = u_i^{\tau_i - 1}\,.$$

Задача состоит в определении оптимальной структуры расходования объемов выделяемых средств $\overline{u}(t)$ между отдельными направлениями, т. е. в расчете $u_i(t)$, $t=\overline{1,T}$ таким образом, чтобы максимизировать суммарное значение агрегированного эффекта от освоения этих средств за весь временной период:

$$\sum_{t=1}^{T} z(u(t)) \to \max\,,$$

где

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t))\,. \quad (5)$$

Задача (1)–(5) является дискретной задачей оптимального управления (ОУ). Обычно решение таких задач представляет собой известную трудность, учитывая негладкость критерия оптимальности и уравнений состояния. В данном же случае существует способ сведения этой динамической задачи к серии из T задач линейного программирования (ЛП). Он состоит в следующем.

Введем в рассмотрение новую переменную $h^1 = z(1)$. Тогда, в соответствии с (1), справедливы неравенства:

$$h^1 \le \alpha_i y_i(1), i=\overline{1,m}\,, \quad (6)$$

причем для некоторого $j \in \{1,2,\ldots,m\}$ должно выполняться равенство:

$$h^1 = \alpha_j y_j(1). \quad (7)$$

Перепишем каждое из неравенств (6) с учетом рекуррентных соотношений (2) и начальных условий (3):

$$h^1 \le \alpha_i(\beta_i y_i^0 + u_i(1)) = \alpha_i\beta_i y_i^0 + \alpha_i u_i(1), i=\overline{1,m}\,. \quad (8)$$

Здесь α_i, β_i, y_i^0 — известные константы, неизвестны лишь значения переменных $h^1, u_i(1), i=\overline{1,m}$.

Ограничение (4) примет вид:

$$\overline{u}(1) = \sum_{i=1}^{m} u_i(1) \quad (9)$$

с известным $\overline{u}(1)$.

Наложим на неизвестные переменные естественные ограничения неотрицательности:

$$h^1 \ge 0, u_i(1) \ge 0, i=\overline{1,m}\,. \quad (10)$$

Первая компонента суммы (5) примет вид:

$$h^1 \to \max\,. \quad (11)$$

Таким образом, для поиска оптимальных значений $z^*(1) = h^{1*}$ переменной $z(1)$ и $u_i^*(1)$ переменных $u_i(1)$ сформирована эквивалентная (1)–(5) по отношению к первой компоненте функционала задача ЛП (6), (8)–(11), в чем нетрудно убедиться, используя стандартные в таких случаях приемы. Легко также показать справедливость равенства (7) для по крайней мере одного индекса $j \in \{1,2,...,m\}$.

После решения приведенной задачи ЛП с помощью (2) можно вычислить оптимальные значения $y_i^*(1)$ фазовых переменных $y_i(1)$:

$$y_i^*(1) = \beta_i y_i^0 + u_i^*(1).$$

Затем формируется следующая задача ЛП:

$$h^2 \le \alpha_i \beta_i y^*(1) + \alpha_i u_i(2),$$

$$\bar{u}(2) = \sum_{i=1}^{m} u_i(2),$$

$$h^2 \ge 0, u_i(2) \ge 0, i = \overline{1,m},$$

$$h^2 \to \max,$$

определяются оптимальные значения

$$z^*(2), u_i^*(2), y_i^*(2), i = \overline{1,m},$$

и формируется следующая аналогичная задача ЛП.

Этот итерационный процесс завершается определением значений $z^*(T), u_i^*(T), y_i^*(T), i = \overline{1,m}.$

Легко убедиться в том, что данный подход применим и к случаю, когда объем финансирования программы задан для всего планируемого периода, и этот объем необходимо оптимальным образом распределить как по временным периодам, так и по отдельным направлениям.

Отметим, что если в правую часть соотношений (2) войдут также и лаговые значения переменных u_i, как отмечалось выше, это приведет лишь к соответствующему преобразованию ограничений (8), сделав их более громоздкими, но по-прежнему линейными.

Приведем простой иллюстративный пример.

Пусть соотношения (2) и агрегирующий критерий (1) имеют вид:

$$y_1(t+1) = 0.9 y_1(t) + u_1(t),$$

$$y_2(t+1) = 0.8 y_2(t) + u_2(t),$$

$$z(t) = \min\{2y_1(t), 3y_2(t)\}.$$

Пусть также заданы длина планового периода, начальные условия и объемы финансовых ресурсов:

$$T = 3, y_1^0 = 7, y_2^0 = 6, \bar{u}(1) = 10, \bar{u}(2) = 12, \bar{u}(3) = 9.$$

Легко убедиться, что z(0)=min{14,18}=14, при этом «узким местом» является первое направление деятельности объекта, и «цена» этой «узости» составляет четыре единицы.

Решим для периода времени $t = 1$ первую задачу ЛП:

$$h^1 - 2u_1(1) \le 12.6,$$

$$h^1 - 3u_2(1) \le 14.4,$$

$$u_1(1) + u_2(1) = 10,$$

$$h^1, u_1(1), u_2(1) \ge 0,$$

$$h^1 \to \max.$$

В результате получим

$$u_1^*(1) = 6.36, u_2^*(1) = 3.64, y_1^*(1) = 12.66, y_2^*(1) = 8.44,$$

$$z(1) = \min\{25.32, 25.32\} = 25.32.$$

То есть на первом же этапе устраняется диспропорция в состоянии дел между направлением. Это свойство оптимального решения будет сохранено и для других периодов времени:

$$u_1^*(2) = 6.694, u_2^*(2) = 5.306,$$
$$y_1^*(2) = 18.09, y_2^*(2) = 12.06,$$
$$z^*(2) = 36.18$$

$$u_1^*(3) = 4.676, u_2^*(3) = 4.324,$$
$$y_1^*(3) = 20.955, y_2^*(3) = 13.97,$$
$$z^*(3) = 41.91.$$

Литература

1. *Носков С. И., Удилов В. П.* Управление системой обеспечения пожарной безопасности на региональном уровне. — Иркутск: ВСИ МВД России, 2003. — 151 с.
2. *Макаров Н. М. и др.* Теория выбора и принятия решений. — М.: Наука, 1982. — 392 с.
3. *Матросов В. М., Головченко В. Б., Носков С. И.* Моделирование и прогнозирование показателей социально-экономического развития области. — Новосибирск: Наука, 1991. — 144 с.
4. *Носков С. И.* Технология моделирования объектов с нестабильным функционированием и неопределенностью в данных. — Иркутск: Облинформпечать, 1996. — 320 с.
5. *Носков С. И., Лонщаков Р. В.* Идентификация параметров кусочно-линейной регрессии // Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем. — 2008. — № 6. — С. 63–64.
6. Носков С. И., Протопопов В. А. Оценка уровня уязвимости объектов транспортной инфраструктуры: формализованный подход // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. — 2011. — № 4. — С. 241–244.

Носков Сергей Иванович. Директор Центра моделирования транспортных процессов Иркутского ГУ путей сообщения. Д. т. н., профессор. Окончил в 1980 г. Иркутский ГУ. Количество печатных работ: 189, в том числе 7 монографий. Области научных интересов: системный анализ, математическое моделирование сложных систем, теория принятия решений. E-mail sergey.noskov.57@mail.ru, noskov_s@irgups.ru