Алгоритмы. Решения

Новые апостериорные оценки погрешности приближенных решений нерегулярных операторных уравнений*

А. Б. Бакушинский

Аннотация. Дается краткий обзор апостериорных оценок погрешности приближенных решений нерегулярных операторных уравнений, полученных к настоящему времени. Описываются некоторые новые возможности использования апостериорной информации в процессе приближенного решения таких уравнений.

Ключевые слова: *нерегулярные операторные уравнения, апостериорные оценки, итеративно регуляризированные процессы типа Гаусса—Ньютона.*

1. Апостериорные оценки погрешности приближенных решений операторных уравнений представляют теоретический интерес и могут быть использованы в практических приложениях. Эти оценки делаются на основе информации полученной в процессе реализации алгоритма решения и некоторых дополнительных априорных предположений.

Сравнительно недавно было обращено внимание на то, что такие оценки возможны и для нерегулярных (некорректных) операторных уравнений.

Первой работой, специально посвященной апостериорным оценкам погрешности в нерегулярном (некорректном) случае, по-видимому, была работа [1], в которой предлагался возможный подход к получению таких оценок. Он получил дальнейшее развитие в работах [2, 3]. Наиболее полно результаты этого направления исследований отражены в недавней работе [4]. Кратко опишем суть этого подхода.

Предметом интереса является операторное уравнение

$$F(x) = 0. \qquad (1)$$

Оператор F предполагается действующим в паре нормированных пространств.

Предполагается также единственность решения уравнения (1).

Пусть в процессе нахождения приближенного решения оператор уравнения (1) нам доступен с погрешностью, характеризуемой числовым параметром η, и приближенное решение уравнения (1) — z_η получено с помощью регуляризирующего алгоритма. В цитируемых работах имеется в виду алгоритм на основе вариационной схемы Тихонова.

Используя z_η и некоторые функционалы от него, можно описать множество, стягивающееся при $\eta \to 0$ к точному решению уравнения (1). Диаметр этого множества и будет искомой апостериорной оценкой погрешности.

Практическая реализация этого подхода наталкивается на две основные трудности.

Построенное множество содержит точное решение только при «малых» η.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 12–01–00239а,12–01–90401 Укр. а).

Количественных оценок этой малости нет.

Построение указанного множества при фиксированном η является весьма сложной задачей даже в случае аффинного оператора F в уравнении (1) (см., например, [3]).

Эти трудности делают актуальными и другие подходы к получению апостериорных оценок погрешности приближенных решений нерегулярных операторных уравнений.

В наших работах [5, 6] предложен подход к построению апостериорных оценок, не предполагающий связь приближенного решения с реализацией схемы Тихонова и опирающийся на некоторые более детальные априорные предположения о решении (1) по сравнению с подходом [1–3].

Главной апостериорной информацией при таком подходе является величина невязки, которая получается при подстановке полученного приближенного решения в оператор, аппроксимирующий F в процессе приближенного решения.

Предлагаемая работа примыкает к этому направлению получения апостериорных оценок погрешности.

В ней мы предполагаем, что приближенное решение уравнения (1) получается каким либо вариантом итеративно регуляризированного метода Гаусса—Ньютона [7], а в качестве апостериорной информации вместо нормы невязки используется норма разности между двумя соседними членами итерационной последовательности.

В «классическом» случае регулярного операторного уравнения подобные апостериорные оценки для методов Ньютона и Гаусса—Ньютона используются в вычислительной практике давно (часто без аккуратного формального обоснования).

В этой работе мы показываем возможность таких оценок и для нерегулярных уравнений. Обсуждается так же одна простая адаптивная стратегия проведения итераций для получения приближений к решению нерегулярных операторных уравнений.

2. В численном анализе уравнения (1) обычно невозможно использовать сам оператор *F*. Реалистично предположить, что в численных алгоритмах вместо этого оператора используется некоторый оператор Φ, действующий в паре действительных конечномерных евклидовых пространств E_N и E_M, размерности которых, вообще говоря, различны. Мы предполагаем, что оператор Φ в каком-то смысле аппроксимирует первоначальный оператор F и включает в себя разнообразные ошибки, связанные с неточным заданием параметров в первоначальной задаче (1).

Мы предполагаем далее что оператор Φ (не *F*!) дифференцируем и выполнено условие Липшица

$$\| \Phi'(u) - \Phi'(v) \| \leq M \| u - v \| . \tag{2}$$

Чтобы избежать непринципиальных технических усложнений, будем предполагать выполнимость неравенства (2) во всем пространстве E_N.

Предположим, что для нахождения приближенного решения уравнения (1) используется какой либо из итеративных процессов, описанных в [7–9]

$$\begin{gathered} x_{n+1} = \xi_n - \theta(\Phi'^*(x_n)\Phi'(x_n), \alpha_n)\Phi'^*(x_n), \\ \{\Phi(x_n) - \Phi'(x_n)(x_n - \xi_n)\}. \end{gathered} \tag{3}$$

В процессе выполнения итераций (3) мы можем контролировать величины различных функционалов, определенных на элементах этой последовательности, в частности, величину

$$\| x_{n+1} - x_n \| . \tag{4}$$

Нас будет интересовать вопрос: можно ли, зная величину (4), сделать какие-то выводы о близости x_{n+1} к образу в пространстве E_N некоторого решения z^* уравнения (1). Именно, пусть $x^* = P(z^*)$ образ интересующего нас решения z^* уравнения (1) в пространстве E_N.

Обычно в конкретных ситуациях оператор P удается эффективно описать.

Для дальнейшего анализа потребуются некоторые априорные предположения, в частности предположение

$$\| \Phi(Pz^*) \| \leq \delta . \tag{5}$$

Схема оценки величины δ приведена в [5, 6] и базируется на том, что мы можем априорно оценить $\| Pz^* - z^* \|$.

Наша ближайшая задача оценить величину

$$\| x_{n+1} - x^* \| , \tag{6}$$

зная величину (4).

Порождающая процесс (3) операторная функция θ может быть выбрана различными способами [7]. Ради наглядности мы ограничимся здесь наиболее употребительным вариантом:

$$\theta(\Phi'^*\Phi', \alpha) = (\Phi'^*\Phi' + \alpha)^{-1} . \tag{7}$$

Именно такая порождающая функция фигурировала в первоначальном варианте итеративно регуляризированного метода Гаусса—Ньютона.

Пусть $\lambda_{\min}$ минимальное ненулевое собственное значение оператора $\Phi'^*\Phi'$ на *n*-й итерации. В силу конечномерности пространства, в котором действуют итерации (3), величина $\lambda_{\min}$ **строго** больше 0.

Стандартным образом получается оценка

$$\| \theta(\Phi'^*\Phi',\alpha)\Phi'^* \| = \sup \frac{\lambda^{1/2}}{\lambda+\alpha} = \beta . \qquad (8)$$

Супремум в правой части (8) берется по спектру оператора $\Phi'^*\Phi'$.

Нетрудно видеть, что всегда справедливо неравенство

$$\beta \le \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(if\, \alpha \ge \lambda_{\min}) \vee \frac{1}{2\sqrt{\lambda_{\min}}}(if\, \alpha \le \lambda_{\min}) .$$

Если величина β определяется на текущей итерации, она будет зависеть ещё и от текущего индекса итерации. Поскольку аппроксимирующая задача конечномерная, и мы используем малые значения α, то величина β обычно оценивается вторым членом конъюнкции.

Как бы мы ни выбирали управляющий параметр ξ_n, в конечномерном случае справедливо разложение

$$\begin{aligned} &x^* - \xi_n = \Phi'^*(x_n)v_n + \Delta_n, \\ &\Delta_n \in Ker\Phi'(x_n). \end{aligned} \qquad (9)$$

Предположим, что мы знаем оценки норм v_n, Δ_n.

В работах [7–9] получены базовые неравенства, из которых для рассматриваемого случая непосредственно следует такое неравенство:

$$\begin{aligned} &\| x_{n+1} - x^* \| \le \beta_n M \| x_n - x^* \|^2 + \\ &+0{,}5\sqrt{\alpha_n} \| v_n \| + \delta\beta_n + \| \Delta_n \| . \end{aligned} \qquad (10)$$

В силу неравенства треугольника

$$\| x_n - x^* \| \le \| x_n - x_{n+1} \| + \| x_{n+1} - x^* \| .$$

Используя это неравенство в правой части (10), после элементарных преобразований получаем неравенство

$$\begin{aligned} &\| x_{n+1} - x^* \| (1 - 2M\beta_n \| x_{n+1} - x^* \|) \le \\ &\le 2\beta_n M \| x_n - x_{n+1} \|^2 + \\ &+0{,}5\sqrt{\ }\alpha_n \| v_n \| + \delta\beta_n + \| \Delta_n \| . \end{aligned} \qquad (11)$$

К сожалению, из неравенства (11) нетривиальная оценка $\| x_{n+1} - x^* \|$ в зависимости от оценки $\| x_{n+1} - x_n \|$ получается лишь при некоторых дополнительных априорных предположениях относительно «малости» величины $\| x_{n+1} - x^* \|$.

Дополнительные априорные предположения, если мы хотим использовать величину $\| x_{n+1} - x_n \|$ для апостериорной оценки близости $\| x_{n+1} - x^* \|$, приходится делать даже в случае использования метода Ньютона в одномерном случае. В инженерных расчетах обычно используется неформальное предположение о том, что $\| x_{n+1} - x^* \|^2 << \| x_{n+1} - x^* \|$.

Дополнительное априорное предположение — величина в круглых скобках в левой части неравенства (11) должна быть больше нуля. Это ведет к очевидным априорным ограничениям на локализацию $\| x_{n+1} - x^* \|$.

Более точно, пусть

$$0 < 1 - 2M\beta_n \| x_{n+1} - x^* \| = q_n < 1. \qquad (13)$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\| x_{n+1} - x^* \| \le \frac{1}{q_n}(2\beta_n M \| x_n - x_{n+1} \|^2 + \\ &+0{,}5\sqrt{\ }\alpha_n \| v_n \| + \delta\beta_n + \| \Delta_n \|). \end{aligned} \qquad (14)$$

Для эффективного использования неравенства (14) кроме выполнения условия (13) нужно ещё априорное знание норм v_n, Δ_n.

Однако в типичной ситуации можно обойтись без оценок этих норм.

Предположим, что

$$Ker\Phi'(x_n) = 0 . \qquad (15)$$

Условие (15) эффективно проверяемое **апостериорное (!)** условие, и обычно в численных расчетах оно выполнено.

Таким образом, апостериорный анализ процесса (3) позволяет предложить адаптивную стратегию выбора его параметров. Именно, если окажется выполненным условие (15), то для получения следующей итеративной точки x_{n+1} можно (и видимо целесообразно) положить в (3)

$$\alpha_n = 0 . \qquad (16)$$

Непосредственно проверяется, что x_{n+1} не будет зависеть от выбора ξ_n, а итерация (3) на это конкретном шаге превращается в стандартный метод Гаусса—Ньютона и апостериорный анализ погрешности упрощается.

Оказывается ненужным априорное условие (9), а оценка (14) принимает вид

$$\begin{aligned} &\| x_{n+1} - x^* \| \le \\ &\le \frac{1}{q_n}(2\beta_n M \| x_n - x_{n+1} \|^2 + \delta\beta_n). \end{aligned} \qquad (17)$$

При этом остается единственное априорное условие существования нетривиальной апостериорной оценки — условие (13).

Подчеркнем ещё раз, малость величины (4) не гарантирует, без дополнительных априорных условий, каких либо нетривиальных оценок величины (6).

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема. Для итерационного процесса (3) с порождающей функцией (7) при выполнении условий (2), (5), (9), (13) справедлива оценка (14), а при выполнении условий (15), (16), (2), (5), (13) — оценка (17).

Если условие (15) выполнено на n-ной итерации, можно использовать простую адаптивную стратегию проведения дальнейших итераций.

Пусть из каких-то соображений нам известно, что

$$\| x_n - x^* \| \le d_n . \tag{18}$$

Делаем из этой точки шаг стандартного метода Гаусса—Ньютона.

Так как при этом $\alpha_n = 0$ и $\Delta_n = 0$, из неравенства (10) получаем неравенство

$$\| x_{n+1} - x^* \| \le \beta_n M d_n^2 + \delta \beta_n . \tag{19}$$

Элементарный анализ теперь позволяет получить допустимые границы величины d в правой части (18), при соблюдении которых целесообразно делать следующий итеративный шаг:

n + 1-итерацию разумно делать, если правая часть неравенства (19) строго меньше d_n. В этом случае положим

$$d_{n+1} = \beta_n M d_n^2 + \delta \beta_n$$

и сделаем следующую итерацию. Для анализа возможности продолжения процесса используем теперь d_{n+1} и т. д. Переходя к пределу при $n \to \infty$, несложно получить нижнюю границу таких d_n и представить себе наилучшую возможную точность приближений, достигаемую в таком адаптивном процессе.

Литература

1. *Гапоненко Ю. Л.*, *Винокуров В. А.* Апостериорные оценки погрешности решения некорректных обратных задач // Доклады АН СССР. 1982. **263.** № 2. С. 277–280.
2. *Дорофеев К. Ю.*, *Титаренко В. Н.*, *Ягола А. Г.* Алгоритмы построения апостериорных оценок погрешности для некорректных задач // ЖВМ и МФ. 2003. **43.** № 1. С. 12–25.
3. *Леонов А. С.* Об апостериорных оценках точности решения линейных некорректно поставленных задач и экстраоптимальных регуляризирующих алгоритмах// Вычислительные методы и программирование. 2010. **11.** № 1. С. 18–28.
4. *Leonov A. S.* Extra-optimal methods for solving ill-posed problems// JIIP (2012). N5–6. P. 637–665.
5. *Bakushinsky A.* A posteriori Error Estimates for Approximate Solutions of Irregular Operator Equations // Dokl. Russian Acad. Sci. 2011. **437.** N4. P. 439–440.
6. *Bakushinsky A.*, *Smirnova A.*, *Liu H. A.* posteriori error analysis for unstable models// JIIP (2012). N4. P. 411–428.
7. *Bakushinsky A.*, *Kokurin M.* Iterative Methods for Approximate Solution of Inverse Problems // (2004), Springer, Dordrecht, 291+XV pp.
8. *Bakushinsky A.*, *Smirnova A.* Irregular Operator Equations by Iterative Methods with undetermined reverse connection // JIIP (2010). N2. P. 147–165.
9. *Бакушинский А. Б.*, *Кокурин М. Ю.* Алгоритмический анализ нерегулярных операторных уравнений. М.: Ленанд/URSS, 2012. 312 с.

Бакушинский Анатолий Борисович. Гл. н. с. ИСА РАН. Д. ф.-м. н., проф. Окончил в 1959 г. МГУ. Количество печатных работ: 150, в том числе 8 монографий. Область научных интересов: некорректные задачи, нерегулярные операторные уравнения и итерационные методы для их приближенного решения, применение нерегулярных операторных уравнений и задач оптимизации в современном математическом моделировании. E-mail: bakush@isa.ru