Математическое моделирование

Аксиоматический подход к математической теории макросистем с одновременным поиском априорных вероятностей и стационарных значений стохастических потоков*

Е. С. Левитин, Ю. С. Попков

Аннотация. Статья посвящена одной из важнейших проблем теории макросистем, изложенной в монографиях [2, 3], — поиску априорных вероятностей, на знании которых базируется энтропийный метод. С точки зрения терминологии, предложенной в [10], тематика данной работы связана с моделированием и алгоритмизацией прогнозного блока, позволяющего найти установившееся (стационарное) состояние макросистемы при фиксированном управлении, выбор которого определяет свойства макросистемы. Алгоритмизация предлагаемого подхода использует редукцию к так называемой базовой задаче глобальной оптимизации [9], для которой легко применим метод ветвей и границ [5–9] с оценочными задачами выпуклого программирования.

Ключевые слова: *макросистема, векторный поток (в макросистеме), стационарный (установившийся) поток, функция энтропии, энтропийная оптимизационная задача, энтропийный оператор, аксиоматический энтропийный подход, прогнозно-оптимизационная задача, глобальная оптимизация, базовая оптимизационная задача, метод ветвей и границ (в глобальной оптимизации).*

Введение

В системном анализе важную роль играют математические задачи оптимизации и прогнозирования в так называемых *неоднородных системах.* В этих системах одна часть искомых переменных (компоненты вектора u — управление), определяющих определённый вариант развития и/или функционирования системы, является детерминированной, а другая часть искомых переменных (векторный прогноз v), определяющая состояние системы при выбранном векторе u, является стохастической.

Среди неоднородных систем особое место занимают *макросистемы,* в которых при задании детерминированного вектора u компоненты стохастиче-

* Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований президиума РАН «Информационные, управляющие и интеллектуальные технологии и системы» (проект № 103 «Математическое моделирование и алгоритмизация основных прогнозно-оптимизационных задач в неоднородных системах»).

ского вектора v с большим числом стохастических элементов преобразуются в некоторый детерминированный вектор, дающий *установившееся состояние вектора v при выбранном векторе u*.

Для нахождения этого установившегося или стационарного состояния применяется известный принцип максимизации энтропии [1–4]. Однако его использование наталкивается на одну принципиальную сложность: требуется знать так называемый *вектор априорных вероятностей*, который при фиксированном управлении является экзогенным векторным параметром в энтропийной оптимизационной задаче.

Всё дело в том, что от задания вектора априорных вероятностей оптимальное решение энтропийной задачи зависит самым существенным образом. Например, в уже простейших макросистемах (соответствующий пример построил В. И. Швецов) для некоторых классов «внутренних» ограничений на состояние макросистемы можно в качестве стационарного потока получить любое допустимое состояние при соответствующем выборе вектора априорных вероятностей. Поэтому правильное задание априорных вероятностей полностью определяет правильное нахождение стационарных потоков.

Чтобы избежать подобных трудностей и вообще чётко зафиксировать все предположения, которые необходимо сделать для реализации энтропийного подхода, предлагается сформулировать все положения математической теории макросистем в виде аксиом. Лишь затем уже можно приступить к рассмотрению вычислительных аспектов рассматриваемой здесь задачи, которая является основой для постановок и численного решения задач управления макросистемой.

1. Энтропийная оптимизационная задача и энтропийный оператор

Сформулируем сначала так называемые *энтропийные оптимизационные задачи*, на решении которых базируется энтропийный подход. Без ограничения общности можно ограничиться одноиндексными потоками, так как сквозная нумерация переменных при двух или трёхиндексных потоках всегда сведёт математическое описание к этому случаю.

Для одноиндексных потоков *энтропийная задача,* состоящая в максимизации энтропии $H(x)$, или, что то же самое, в минимизации функции $[-H(x)]$ при линейных ограничениях типа равенств и неравенств, зависящих от управления u, имеет следующий вид:

$$-H(p, v) = \sum_{l=1}^{n} v_l \mathbf{ln} \frac{v_l}{p_l e} \to \min,$$

$$v = (v_1, \ldots, v_n) \in D(u), \qquad (1)$$

где

$$D(u) = \{v \in R^n : \ v_l \geq 0 \ (l \in L), \ \sum_{l=1}^{n} \alpha_{kl}(u)\, v_l \leq a_k(u)$$

$$(k \in K_1), \ \sum_{l=1}^{n} \beta_{kl}(u)\, v_l = b_k(u) \ (k \in K_2)\}. \qquad (2)$$

Здесь: $L = \{1, \ldots, n\}$, $v = \{v_l\ (l \in L)\}$ — вектор потоков, $p = \{p_l\ (l \in L)\}$ — вектор априорных вероятностей, входящий в энтропию, функция H — энтропия системы, K_1 и K_2 — конечные множества индексов, причём $|K_2| < n$ и $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, $\{\alpha_{kl}(u)\}$, $\{\beta_{kl}(u)\}$ и $\{a_k(u)\}$, $\{b_k(u)\}$ — коэффициенты и правые части линейной системы (2).

Для фиксированного управления u в задаче (1), (2), которую будем называть *энтропийной оптимизационной задачей,* экзогенными параметрами являются априорные вероятности p_l $(l \in L)$, коэффициенты $\alpha_{kl}(u)$ и числа $a_k(u)$ $(k \in K_1,\ l \in L)$, а также коэффициенты $\beta_{kl}(u)$ и числа $b_k(u)$ $(k \in K_2,\ l \in L)$. Как известно [2, 3], при любых значениях экзогенных параметров, при которых линейные ограничения в энтропийной задаче совместны (соответствующий вектор экзогенных параметров будем называть *допустимым*), решение этой задачи существует и единственно. Соответствующее решение v как функцию всех допустимых экзогенных параметров будем называть *энтропийным оператором* и обозначать $z[u](p)$. Таким образом,

$$z[u](p) = \operatorname{argmin}\{-H(\mathrm{p}, \mathrm{v}) : v \in D(u)\}. \qquad (3)$$

Обозначим

$$h[u](p) = \min\{-H(\mathrm{p}, \mathrm{v}) : v \in D(u)\} \qquad (4)$$

функцию параметрического минимума в задаче (1), (2). Тогда, очевидно, условие $v = z[u](p)$ эквивалентно следующей системе:

$$v \in D(u), \ [-H(\mathrm{p}, \mathrm{v})] \leq h[u](p). \qquad (5)$$

2. Аксиомы теории макросистем

Первые две из формулируемых ниже трёх аксиом основаны на теории макросистем, изложенной в монографиях [2, 3].

Аксиома 1 (аксиома макросистемы). *Для управляемой системы S = S(u) при задании фиксированного детерминированного управления и её стохастическое состояние, характеризую-*

щееся векторным потоком, преобразуется в детерминированный вектор $v(u)$, называемый установившимся или стационарным состоянием, принадлежащим допустимому множеству $D(u)$.

Аксиома 2 (принцип максимизации энтропии — энтропийный подход к нахождению стационарного состояния). *При любом фиксированном векторе $u \in U$ существует вектор $p(u) = (p_1(u), \ldots, p_n(u))$ априорных вероятностей для распределения потоков в системе $S(u)$ такой, что стационарное состояние $v(u)$ макросистемы при данном фиксированном управлении и является оптимальным решением энтропийной задачи: $v(u) = z[u](p(u))$; таким образом, пара $\{p(u), v(u)\}$ даёт, причём одновременно, искомый вектор априорных вероятностей и искомый вектор стационарных состояний.*

Аксиома 2 сводит при данном фиксированном управлении u поиск стационарного состояния $v(u)$ к поиску оптимального решения энтропийной задачи с некоторым вектором $p(u)$ априорных вероятностей, о существовании которого говорит эта аксиома. Следует подчеркнуть, что:

- в конечном итоге нас интересует лишь стационарный вектор потоков $v(u)$, а вектор $p(u)$ априорных вероятностей для распределения потоков является лишь вспомогательным средством для нахождения стационарный вектора $v(u)$; однако природа этого «средства» такова, что его не удаётся найти независимо от искомого вектора $v(u)$ и использовать затем для поиска $v(u)$, путём вычисления энтропийного оператора $z[u](p(u))$, что, конечно же, сильно осложняет ситуацию;
- разным значениям вектора $p(u)$, который для энтропийной задачи является экзогенным векторным параметром, могут отвечать разные значения энтропийного оператора $z[u](p)$. Поэтому тех или иных эвристических соображений, вообще говоря, недостаточно для правильного задания вектора $p(u)$, т. е. такого, для которого значение $z[u](p(u))$ даёт стационарное состояние $v(u)$.

На первый взгляд кажется, что энтропийный подход для поиска стационарного состояния макросистемы мало конструктивен, ибо путём вычисления энтропийного оператора он фактически сводит нахождение вектора $v(u)$ к нахождению вектора $p(u)$, имеющего ту же самую размерность. Однако такой поверхностный взгляд справедлив лишь отчасти и не отражает самые сильные стороны энтропийного подхода.

Во-первых, для искомого стационарного состояния энтропийный подход позволяет получить параметрическое представление (как результат решения одной из выпуклых оптимизационных задач, принадлежащих параметрическому семейству таких задач). Во-вторых, если Аксиомы 1, 2 дополнить ещё одной, достаточно естественной, аксиомой, то появляется возможность «замкнуть» искомую систему соотношений для *одновременного* поиска векторов $p(u)$ и $v(u)$.

Прежде чем формулировать важнейшую и наиболее сложно проверяемую аксиому, декларирующую *существование обратной связи между переменными p и v* (*принцип замыкающих соотношений для этих переменных*), обсудим сначала некоторые содержательные вопросы.

При фиксированном управлении u энтропийный оператор $z[u](X)$ выражает прямую связь между переменными p и v; а именно, он выражает значение потока v как однозначно определённую функцию вектора p. Одним из важнейших понятий системного анализа и автоматического регулирования является так называемая *обратная связь* между изучаемыми переменными. В данном случае речь должна идти о зависимости вектора p от вектора потоков v.

Обратим внимание на то, что для одновременного определения $2n$ неизвестных — компонент пары $\{p(u), v(u)\}$ — энтропийный оператор, позволяющий выразить переменные v через переменные p, даёт n уравнений. Ещё одно соотношение даёт уравнение $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Поэтому не хватает ещё $(n - 1)$ соотношений.

Пусть при фиксированном управлении u заданы $(n - 1)$ функций $f_l[u](X)$ ($l = 1, 2, \ldots, n - 1$) от вектора v. Соотношения $p_l = f_l[u](v)$ будем называть *обратной связью между искомыми векторами $p(u)$* и *$v(u)$* или *замыкающими соотношениями для пары* $\{p(u), v(u)\}$. Теперь мы можем сформулировать Аксиому 3.

Аксиома 3 (существование обратной связи или принцип замыкающих соотношений для пары {p(u), v(u)}). *Существует обратная связь $p_l = f_l[u](v)$ ($l = 1, 2, \ldots, n - 1$) такая, что искомая пара $\{p(u), v(u)\}$ является **единственным решением** системы соотношений:*

$$p_l > 0, p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1, v = z[u](p),$$
$$p_l = f_l[u](v) \ (l = 1, 2, \ldots, n - 1). \quad (6)$$

Формулируемое ниже утверждение тривиально следует из Аксиом 1 – 3.

Предложение 1. *Пусть выполнены Аксиомы 1–3 с известной обратной связью, а вектор $p(u)$ удовлетворяет соотношениям (6). Тогда пара $\{p(u), v(u)\}$, где $v(u) = z[u](p(u))$, является искомой.*

Замечания.

1. Пусть при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$ симплекс $\Pi_\varepsilon = \{ p \in R^n : p_l \geq \varepsilon, p_1 + \ldots + p_n = 1\}$.

Далее, пусть задана n-мерная вектор-функция $\Psi[u](X)$, действующая из Π_ε в Π_ε, где

$$\Psi_l[u](p) = \mathrm{f}_l[u](z[u](p)) \text{ при } l = 1, 2, \ldots, n-1$$
$$\text{и } \Psi_n[u](p) = 1 - (p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}),$$

причём эта функция удовлетворяет условию Липшица с константой $\gamma < 1$:

$$\|\Psi[u](p'') - \Psi[u](p')\| \# \gamma\| p'' - p' \| \ \forall\, p', p'' \in \Pi_\varepsilon, \quad (7)$$

т. е. на симплексе Π_ε вектор-функция $\Psi[u](X)$ является сжимающим оператором с константой γ. Тогда, как хорошо известно, в силу принципа неподвижной точки для сжимающего оператора, для вектор-функции $\Psi[u](X)$ на симплексе Π_ε существует и притом единственная неподвижная точка $p(u)$, причём к этой неподвижной точке при любом начальном приближении из симплекса Π_ε со скоростью геометрической прогрессии сходится итеративный процесс $p^{(n+1)} = \Psi[u](p^{(n)})$. Заметим, что реализация этого итеративного процесса требует лишь последовательного вычисления сначала — энтропийного оператора, а затем — функций $f_l[u](v)$ обратной связи.

2. Условие (7) заведомо выполнено, если при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$ на симплексе Π_ε энтропийный оператор $z[u](X)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $N = N(u)$, а функция $\mathrm{f}[u](X)$ на множестве $D(u)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $r = r(u)$, причём $\gamma = r\,N < 1$.

Из Предложения 1 и Замечания к нему вытекает, что если верны Аксиомы 1–3, то для нахождения искомой пары $\{p(u), v(u)\}$ требуется правильно найти такую обратную связь, которая обеспечивает единственность неподвижной точки для вектор-функции $\Psi[u](X)$ на симплексе Π_ε; это заведомо так, если правильно найденная обратная связь приводит к сжимающему оператору. Однако могут быть и другие типы обратной связи, для которых верна Аксиома 3.

Усиленная Аксиома 3 (существование аффинной обратной связи или принцип замыкающих аффинных соотношений для пары $\{p(u), v(u)\}$): *при любом фиксированном управлении и существует такая аффинная обратная связь* (*т. е. вектор-функция* $\mathrm{f}[u](X)$, *имеющая вид* $\mathrm{f}\,[u](v) = \Theta(u)v + \xi(u)$, *где* $\Theta(u)$ — *прямоугольная матрица* $(n-1) \times n$, а $\xi(u)$ — *вектор размерности* $(n-1)$), *что выполнена Аксиома* 2.

К сожалению, элементы матрицы Θ и компоненты вектора ξ, задающие аффинную обратную связь, могут существенно зависеть от макросистемы, а потому и от управления u, изменяющего её свойства. Поэтому стандартными регрессионными методами эту обратную связь не найти. Тем не менее, если верны Аксиомы 1, 2 и усиленная Аксиома 3, то и без предварительного нахождения аффинной обратной связи наличие замыкающих аффинных соотношений позволяет при любом фиксированном управлении u поставить и решать (с помощью методов глобальной оптимизации) некоторую задачу, дающую весь искомый набор $\{\Theta(u), \xi(u), p(u), v(u)\}$. Этой задаче посвящён следующий раздел.

Нахождение при данном управлении u стационарного состояния $v(u)$ макросистемы (в условиях Аксиомы 1, 2 и усиленной Аксиомы 3) путём одновременного поиска всего набора $\{\Theta(u), \xi(u), p(u), v(u)\}$ будем называть ***аксиоматическим энтропийным подходом для идентификации стационарного состояния $v(u)$ макросистемы***, в отличие от эвристического энтропийного подхода, основанного на эвристических способах задания априорных вероятностей**.**

3. Две основные вычислительные задачи теории макросистем и их обсуждение

В теории макросистем имеются следующие две основные задачи.

Задача I (идентификация стационарного состояния макросистемы при фиксированном значении детерминированного вектора u): *для заданного значения детерминированного вектора и, определяющего определённый вариант развития и/или функционирования макросистемы, и в предположении, что выполнены Аксиомы* 1, 2 *и усиленная Аксиома* 3, *требуется найти аффинную функцию обратной связи, вектор априорных вероятностей и стационарное состояние макросистемы.*

Математическая постановка этой задачи имеет, очевидно, следующий вид:
при заданном управлении u найти набор

$$\{p, v, \Theta, \xi\}, \text{ где } p = p(u),\ v = v(u),\ \Theta = \Theta(u),\ \xi = \xi\,(u),$$

удовлетворяющий системе соотношений:

$$p_l > 0\ (l \in L),\ p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1,\ \boldsymbol{v} \in D(u),$$
$$[-H(p, v)] \le h[u](p),\ p = \Theta v + \xi. \quad (8)$$

Очевидно, что если ввести дополнительную неотрицательную переменную w, то решение системы (8) будет эквивалентно следующей невыпуклой оптимизационной задаче в пространстве переменных p, v, w, Θ и ξ:

$$w \to \min \quad (9)$$

при наличии ограничений

$$p_l > 0\ (l \in L),\ p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1,\ v \in D(u),\ w \ge 0, \quad (10)$$

$$[-H(p, v)] \le h[u](p) + w, \ p = \Theta v + \xi. \qquad (11)$$

Заметим, что при совместности системы (8) оптимальное значение в задаче (9)–(11), т. е. оптимальное значение дополнительной переменной w, очевидно, равно нулю.

Задача II (оптимальное управление макросистемой): *оптимизировать развитие и/или функционирование макросистемы по всем допустимым управлениям.*

Для строгой постановки Задачи II предположим, что задана некоторая целевая функция F от векторов u и v, которую требуется оптимизировать по всем парам $\{u, v(u)\}$, где u — допустимое управление макросистемой, а $v(u)$ — стационарное состояние при данном детерминированном векторе u. Таким образом, требуется минимизировать функцию $f(u) = F(u, v(u))$ по всем допустимым детерминированным векторам u.

Задача IIa (выбор наилучшего решения при конечности множества управлений макросистемой). Предположим, что можно ограничиться лишь конечным числом вариантов развития и/или функционирования макросистемы. Тогда умение при каждом допустимом управлении u сравнительно эффективно находить стационарное состояние $v(u)$ макросистемы (посредством реализации аксиоматического энтропийного подхода) позволит решить Задачу II по оптимизации функции f с помощью простого перебора всех имеющихся вариантов выбора управления u.

4. Редукция Задачи I к базовой оптимизационной задаче

В заключение статьи покажем, как свести Задачу I к так называемой *базовой оптимизационной задаче*, введённой Е. С. Левитиным в [9]. Сначала заметим, что при фиксированном управлении u в задаче (9)–(11) целевая функция и условия (9) являются выпуклыми относительно пары $\{p, v\}$.

Проанализируем теперь тип неравенства

$$[-H(p, v)] \le h[u](p).$$

Из соотношения

$$[-H(p, v)] = \sum_{l=1}^{n} v_l \mathbf{ln} \frac{v_l}{p_l e} = \sum_{l=1}^{n} \{\Phi_l(v_l) + v_l(\mathbf{-\,ln}\, p_l)\},$$

где $\Phi_l(v_l) = v_l[(\ln v_l) - 1]$ — выпуклая функция от неотрицательной[1] переменной v_l, и из того, что при $0 < p_l \le 1$ функция $(-\ln p_l)$ является неотрицательной выпуклой функцией, можно сделать следующие выводы. Функция $[-H(p, v)]$ является суммой выпуклой функции $\Phi(X)$, где $\Phi(v) = \sum_{l=1}^{n} \Phi_l(v_l)$, и суммой по $l \in L$ произведений $v_l(-\ln p_l)$; каждое из этих произведений $v_l(-\ln p_l)$ на плоскости $\{p_l, v_l\}$ является произведением неотрицательной переменной v_l и выпуклой неотрицательной функции $(-\ln p_l)$.

Далее, будем на отрезке $[\varepsilon, 1]$ аппроксимировать неотрицательную функцию $(-\ln p)$ аффинной функцией $g_\varepsilon(p) = [(\ln \varepsilon)/(1-\varepsilon)]p + [-(\ln \varepsilon)/(1-\varepsilon)]$, т. е. отрезком прямой, проходящей через точки плоскости с координатами $(\varepsilon, -\ln p_l)$ и $(1, 0)$; эта аппроксимация является достаточно хорошей для наших дальнейших целей. Тогда при любом фиксированном векторе $v \in D(u)$ функция $[-H(p, v)]$ будет аппроксимирована аффинной относительно вектора p функцией $\Phi(v) + \sum_{l=1}^{n} v_l\, g_\varepsilon(p_l)$. Но тогда, в силу (4) функция $h[u](p)$ будет аппроксимирована функцией $\min\{\Phi(v) + \sum_{l=1}^{n} v_l\, g_\varepsilon(p_l) \colon v \in D(u)\}$, которая является вогнутой от вектора p функцией как минимум по параметру $v \in D(u)$ семейства аффинных относительно вектора p функций $\Phi(v) + \sum_{l=1}^{n} v_l\, g_\varepsilon(p_l)$. Отсюда следует, что неравенство (11) можно аппроксимировать неравенством $\Phi(v) + (-h[u](p)) + \sum_{l=1}^{n} v_l\, g_\varepsilon(p_l) \le 0$, с выпуклой функцией $(-h[u](X))$.

Наконец, ограничение $p = \Theta v + \xi$ на совокупность координат векторов p, v, ξ и элементов матрицы Θ является билинейным, а билинейные ограничения типа равенств не выводят из класса базовых задач (фактически это было показано ещё в 1996 г. в статье [7]). Поэтому невыпуклая оптимизационная задача (9)–(11), эквивалентная нахождению решения системы (8), достаточно хорошо аппроксимируется базовой задачей. В заключение данного раздела отметим, что введение самого термин «базовая задача» вызвано следующими причинами. С одной стороны, задача глобальной оптимизации, названная в [9] «базовой», включает в себя очень многие сложные задачи глобальной оптимизации, возникающие в приложениях. С другой стороны, с помощью одного из важнейших численных методов глобальной оптимизации — метода ветвей и границ — базовая

[1] при $v_l = 0$ функцию $v_l(\ln v_l)$ можно доопределить по непрерывности, полагая её равной нулю.

задача сводится к системе задач выпуклого программирования.

Более подробно вычислительные аспекты для решения Задачи I будут рассмотрены в отдельной статье.

Заключение

Подчеркнём принципиальное отличие предложенного в статье подхода от ранее применявшихся методов в теории макросистем: вектор так называемых априорных вероятностей должен искаться одновременно с векторами установившихся (стационарных) потоков.

Это позволит в большей степени избежать ошибок, вызванных не вполне правильным заданием априорных вероятностей, исходя из различных эвристических соображений.

Наконец, отметим место рассмотренной выше Задачи I, включающей в себя вычисление энтропийного оператора при заданном векторе априорных вероятностей, с точки зрения прогнозно-оптимизационных моделей, которые рассматривались в нашей статье [10]. С этой точки зрения Задача I, посвящённая нахождению при фиксированном управлении установившихся потоков в макросистеме при помощи одновременного с потоками поиска априорных вероятностей, на основе решения энтропийных оптимизационных задач, есть не что иное, как прогнозный блок, формализация которого базируется на строгом энтропийном подходе, а говоря точнее — на Аксиомах 1–3. Используя понятие «решение прогнозно-оптимизационной задачи», рассмотренное в [10], управление макросистемой можно рассматривать как поиск согласованной пары {оптимальное управление, прогноз (расчёт) установившегося состояния макросистемы} [11].

Литература

1. *Вильсон А. Дж.* Энтропийные методы моделирования сложных систем. М.: Наука, 1978.
2. *Попков Ю. С.* Теория макросистем. М.: URSS, 1999.
3. *Попков Ю. С.* Макросистемные модели пространственной экономики. М.: КомКнига/URSS, 2007, 2013.
4. *Попков Ю. С.* Робастное энтропийное оценивание и фильтрация (обзор и синтез). Пленарная лекция // Труды Четвёртой Международной конференции «Системный анализ и информационные технологии» (Абзаково, Россия, 17–23 августа 2011 г.). Том 1. С. 27–34. Челябинск, Изд.-во Челябинского Гос. Университета.
5. *Horst R.*, *Tuy H.* (1996). Global Optimization — Deterministic Approaches. Springer, Berlin / Heidelberg / New York, 3rd edition.
6. *Handbook of Global Optimization* (Nonconvex Optimization and Its Applications). 1-st Edition, Editors: *R. Horst, Panos M. Pardalos*. Springer, 1994. 900 pp.
7. *Левитин Е. С., Хранович И. Л.* Поиск глобального минимума в задачах невыпуклого программирования с зависимостями — бисепарабельными суперпозициями выпуклых функций // Доклады академии наук. 1996. Т. 350. № 2. С. 166–169.
8. *Левитин Е. С.* О приближённой глобальной минимизации с заданной точностью для задач оптимизации с DC-функциями // Труды IV Международной конференции «Системный анализ и информационные технологии». Абзаково, Россия 17–23 августа 2011. Изд.-во Челябинского государственного университета. Том 1. С. 190, 191.
9. *Левитин Е. С.* О базовой задаче и важнейших редукциях к ней при приближённом поиске глобального минимума методом ветвей и границ // IX Всероссийская школа-семинар «Прикладные проблемы управления макросистемами» (материалы докладов). Апатиты: Кольский научный центр РАН, Институт информатики и математического моделирования технологических процессов. Апатиты, март 2012. С. 33–34.
10. *Левитин Е. С.* О совместном прогнозировании и оптимизации при наличии вероятностной неопределённости в системном анализе (общая абстрактная схема) // Труды V Международной конференции «Системный анализ и информационные технологии» (САИТ-2013). Красноярск, Россия, 19–25 сентября 2013 г. Том 1. С. 112–121. Красноярск: Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2013.
11. *Левитин Е. С.*, *Попков Ю. С.* Управление макросистемой: статическая модель прогнозирования и оптимизации с энтропийным оператором для прогноза стационарных состояний. Там же. С. 122–128.

Левитин Евгений Соломонович. Гл. н. с. ИСА РАН. Д. ф.-м. н. Окончил в 1965 г. МГУ. Количество печатных работ: свыше 105, в том числе 6 монографий. Область научных интересов: модели, теория и численные методы оптимизации; математические модели и методы системного анализа. E-mail: e.s.levitin @gmail.com

Попков Юрий Соломонович. Директор ИСА РАН. Д. т. н., член.-корр., проф. Окончил в 1960 г. МЭИ. Кол-во печатных работ: 178, в том числе 11 монографий. Область научных интересов: системный анализ, математическое моделирование. E-mail: popkov@isa.ru