О развитии неустойчивости Кельвина—Гельмгольца на начальной стадии ламинарно-турбулентного перехода в вязком газе*

Н. М. Евстигнеев, Н. А. Магницкий

Аннотация. В работе публикуется продолжение анализа результатов ламинарно-турбулентного перехода на ранней стадии развития неустойчивости в задаче Кельвина—Гельмгольца. Начально-краевая задача ставится в терминах уравнений вязкого идеального газа. Кратко показан численный метод решения уравнений высокого порядка, а также детально обсуждается вопрос постановки краевых неотражающих условий, позволяющих гарантировать отсутствие нефизических возмущений в области расчета. Приведены результаты численного расчета в виде скалярных полей газодинамических функций, а также фазовые портреты в трехмерных подпространствах. Показаны диапазоны бифуркационных параметров, при которых наблюдается каскад бифуркаций Фейгенбаума и Шарковского.

Ключевые слова: *нелинейная динамика, турбулентность, неустойчивость Кельвина—Гельмгольца, численное исследование уравнений в частных производных*.

Введение

В цикле работ сотрудников лаборатории № 11–3 ИСА РАН ([14–17, 19, 21] и др.) были проведены исследования некоторых начально-краевых задач (н. к. з.) для уравнений динамики несжимаемой вязкой жидкости (уравнения Навье—Стокса, гидродинамическое приближение уравнений Больцмана), магнитной гидродинамики слабо сжимаемой жидкости, а также исследованы особенности формирования фазового пространства для сверхзвукового режима течения сжимаемого газа [18]. Задачей работ было рассмотрение ламинарно-турбулентного перехода некоторых характерных н. к. з. для этих уравнений с точки зрения бифуркационной теории динамических систем. В работах показано, что наблюдается либо прямой, либо обратный сценарии Фейгенбаума—Шарковского—Магницкого (ФШМ) [15], в который может входить сценарий Ландау—Хопфа (бифуркации Андронова—Хопфа до тора периода N). Такой сценарий наблюдается во всех пробных точках фазового бесконечномерного пространства и не зависит от выбранной точки в конфигурационном пространстве. В работе [18] проводится исследование характерной н. к. з. для так называемой сжимаемой предельной турбулентности, где рассматриваются уравнения газовой динамики в сверхзвуковых режимах течений при стремлении числа Рейнольдса к бесконечности. Показано, что фазовое пространство распадается на независимые подпространства и в различных точках наблюдаются различные сценарии перехода к турбулентности. В работе [19] рассматривается динамика ламинарно-турбулентного перехода для задачи, в которой развивается неустойчивость Кельвина—Гельмгольца в сжимаемой вязкой газовой среде. В работе было отмечено наличие бифуркаций удвоения циклов и бифуркаций Андронова—Хопфа с образованием тора размерности два. Дальнейшее исследование усложнялось ввиду быстрого перехода к хаотическим решениям и невозможности выделить область устойчивости. Кратко были изложены методы численного моделирования, позволяющие получить представленные результаты. В настоящей работе рассматриваются результаты более подробного анализа диапазонов бифуркационных параметров, а также аспекты численной реализации граничных условий, обеспечивающие отсутствие нефизических возмущений, вызванных искусственной постановкой входных и выходных граничных условий. Процедура анализа получаемых данных для построения фазовых портретов решений аналогична выше перечисленным работам.

* Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 14–07–00123) и грантом ОНИТ РАН 1.4.

1. Исходные уравнения

Исходные уравнения — уравнения динамики вязкого сжимаемого газа. В дифференциальной форме рассматривается следующая система уравнений [1]:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho u_j\right]=0; \\
\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho u_i u_j+p\delta_{ij}-\tau_{ji}\right]=g_i, \quad i=1,2,3; \\
\frac{\partial}{\partial t}(\rho E)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho u_j E+u_j p-u_i\tau_{ij}\right]=0; \\
E=\frac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2+\rho e; \\
p=(\gamma-1)(E-1/2\rho\mathbf{u}^2).
\end{gathered} \tag{1}
$$

Здесь для замкнутой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ скалярная функция f определяется как $f: \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$, вектор-функция $\mathbf{f}$ определяется как $\mathbf{f}: \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^3$. Тогда E — скалярная функция полной энергии газа; e — скалярная функция внутренней энергии газа; γ — показатель адиабаты газа (1,4 для воздуха); p — скалярная функция давления; $\mathbf{u}$ — вектор-функция скорости газа; ρ — скалярная функция плотности газа; $\mathbf{g}$ — внешняя сила. Подразумевается суммирование по одинаковым индексам. Предполагается ньютоновский газ с тензором вязких напряжений:

$$\tau_{ij} = 2\nu S_{ij}; \tag{2}$$

где ν — динамическая вязкость газа, а тензор скоростей деформаций определяется как:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \tag{3}$$

Для проведения интегрирования произвольной н. к. з. (постановка которой обсуждается ниже) был построен численный метод. В связи с причинами, указанными в предыдущих работах авторов, необходимым условием проведения бифуркационного анализа является высокая точность результатов, получаемых в численных решениях н. к. з. для исходных уравнений. Так, для моделирования н. к. з. для уравнений Навье—Стокса в работах [14]– [16] применялся метод минимум пятого порядка (на больших градиентах функций) по пространству и четвертого по времени.

2. Численный метод интегрирования, реализация граничных условий

Детально численный метод, используемый в данной работе, описан в работе [19]. Для решения невязкой части уравнений применяется метод конечного объема, основанный на том, что пространственная аппроксимация проводится не в точке-центре сетки, а на гранях между двумя соседними элементами сетки. Расчет невязких потоков через грани сетки основан на решении задачи Римана на каждой грани. В данной работе итерационное аналитическое решение задачи о распаде произвольного разрыва проводится с помощью метода ADER, позволяющего решить задачу распада разрыва с заданной точностью, детально см. [3]. Для повышения точности расчета используется монотонизированный TVB вариант схемы WENO 9-го порядка [18], которая на разрывных и немонотонных решениях падает до пятого порядка. Сходимость для невязкой части уравнений доказывается теоремой Лакса—Вендрофа, а также методом замороженных коэффициентов. Более детально см. работы [14], [18]. Для доказательства сходимости вязкостной части уравнений достаточно, в связи с линейностью уравнений, доказать аппроксимацию и устойчивость схемы. В данной работе аппроксимация вязких членов уравнения выполняется методом конечного элемента с шестым порядком точности по пространству. Такая аппроксимация, в отличие от классической конечно-разностной аппроксимации шестого порядка, не имеет неустойчивых собственных значений линейного оператора, см. [14]. Устойчивость достигается применением неявной схемы интегрирования по времени. Таким образом, достигается сходимость вязкой части схемы. Метод интегрирования по времени — TVD многошаговый метод четвертого порядка точности [18] для невязких потоков и неявный для вязких потоков, т. е. указанные задачи (явный шаг вычисления невязких потоков и неявный шаг вычисления вязких потоков) решаются на каждом шаге многошагового метода, и ошибка, вносимая методом расщепления, нивелируется. Общая аппроксимация имеет порядок на немонотонных областях решения (при наличии разрывов) $\mathcal{O}(\Delta t^4, \max_i(\Delta x_i)^5)$ и на монотонных участках достигает $\mathcal{O}(\Delta t^4, \max_i(\Delta x_i)^6)$. Критерий устойчивости $\Delta t \leqslant \sum_j \frac{\Delta x_j}{||\mathbf{u}||+a}$, где $a = \sqrt{\gamma p/\rho}$. Таким образом, при соблюдении критерия устойчивости, достигается сходимость всей численной схемы.

2.1. Реализация неотражающих граничных условий

Для постановки неотражающих граничных условий рассматриваются характеристики входных и выходных амплитуд волн [9]– [12]. Основную сложность вызывает гиперболическая часть системы уравнений (1), поскольку тензор вязких напряжений является демпфирующим для амплитуды волн и предполагает постановку физического граничного условия (например, условия Неймана). В данном разделе рассматривается постановка граничных условий, не вызывающих возмущений в основной области, при прохождении волн решения через границу. Здесь следуем идеям работ [9]– [11]. Вначале на примере двухмерного уравнения (1) (с целью уменьшения объема выкладок) показывается вывод характеристической формы уравнений для областей краевых условий. Далее показывается способ учета границы для трехмерной системы (1), используемой для получения результатов бифуркационного анализа. В конце приводятся расчеты характерных задач для определения качества полученных неотражающих краевых условий.

2.1.1. Анализ характеристик двухмерного уравнения течения вязкого газа

Рассматривается система уравнений в декартовой системе координат:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x}+\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial y}=\frac{\partial\mathbf{F_v}}{\partial x}+\frac{\partial\mathbf{G_v}}{\partial y};\\ \mathbf{U}=[\rho;\rho u_x;\rho u_y;E]^T;\\ \mathbf{F}=[\rho u_x;\rho u_x^2+p;\rho u_x u_y;(E+p)u_x]^T;\\ \mathbf{G}=[\rho u_y;\rho u_y u_x;\rho u_y^2+p;(E+p)u_y]^T.\\ \mathbf{F_v}=[0;\tau_{xx};\tau_{xy};u_x\tau_{xx}+u_y\tau_{xy}]^T;\\ \mathbf{G_v}=[0;\tau_{yx}=\tau_{xy};\tau_{yy};u_x\tau_{xy}+u_y\tau_{yy}]^T.\end{gathered} \tag{4}$$

Отбросим вязкие потоки и рассмотрим уравнения в характеристиках. Аналогичный подход был применен в [18] при доказательстве лемм. Перейдем к так называемым примитивным переменным и линеаризуем систему:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial t}+A\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial x}+B\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial y}=\mathbf{0};\\ \mathbf{W}=[\rho;u_x;u_y;p]^T;\end{gathered} \tag{5}$$

где $c^2=\dfrac{\gamma p}{\rho}$ — скорость звука; матрицы определяются как:

$$\begin{gathered}A=\begin{pmatrix}u_x&\rho&0&0\\0&u_x&0&1/\rho\\0&0&u_x&0\\0&c^2\rho&0&u_x\end{pmatrix};\\ B=\begin{pmatrix}u_y&\rho&0&0\\0&u_y&0&0\\0&0&u_y&1/\rho\\0&0&c^2\rho&u_y\end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{6}$$

В связи с гиперболичностью системы (4) все собственные числа матриц действительные. Будем рассматривать неотражающие граничные условия на отрезках $y\in[c;d]$ в точках $x=a$ и $x=b$. Тогда, диагонализируя матрицу $A=S^{-1}\Lambda S$, получим:

$$\begin{gathered}\Lambda=diag(\lambda_i)=diag(u_x-c;u;u;u_x+c);\\ S=\begin{pmatrix}\mathbf{I_1}\\ \mathbf{I_2}\\ \mathbf{I_3}\\ \mathbf{I_4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-\rho c&0&1\\c^2&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&\rho c&0&1\end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{7}$$

Здесь I_i — левые собственные вектора матрицы А. На границе можно упростить систему (5) как:

$$\mathbf{I}_i=\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial t}+L_i^{(x)}|_{x=a,b}; \tag{8}$$

где: $L_i^{(x)}=\lambda_i\mathbf{I}_i\dfrac{\partial\mathbf{W}}{\partial x}$, $i=1-4$ — характеристическое представление уравнения в направлении границы. Фактически значения L_i задают изменение амплитуды волн при прохождении через границу. Следовательно, можно построить условия при которых, например, для выходных граничных условий амплитуда волн на исходящих характеристиках ставится равной нулю, а входящие характеристики рассчитываются в соответствии с условием задачи. Двухмерное уравнение (без вязких потоков) на границе путем подстановки (7) в (8) переписывается как:

$$\begin{gathered}\frac{\partial p}{\partial t}-\rho c\frac{\partial u_x}{\partial t}+L_1^{(x)}=0;\\ c^2\frac{\partial\rho}{\partial t}-\frac{\partial p}{\partial t}+L_2^{(x)}=0;\\ \frac{\partial u_y}{\partial t}+L_3^{(x)}=0;\\ \frac{\partial p}{\partial t}+\rho c\frac{\partial u_x}{\partial t}+L_4^{(x)}=0.\end{gathered} \tag{9}$$

Значения амплитуд волн можно вычислить как:

$$\begin{gathered}L_1^{(x)}=\frac{\lambda_1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}-\rho c\frac{\partial u_x}{\partial x}\right);\\ L_2^{(x)}=\lambda_2\left(c^2\frac{\partial\rho}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial x}\right);\\ L_3^{(x)}=\lambda_3\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right);\\ L_4^{(x)}=\frac{\lambda_4}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\rho c\frac{\partial u_x}{\partial x}\right).\end{gathered} \tag{10}$$

Здесь амплитуды отвечают за различный процесс в уравнении и на основании физического представления расщепления на примитивные переменные могут быть описаны как: $L_1^{(x)}$ и $L_4^{(x)}$ — акустические волны, $L_2^{(x)}$ — волны энтропии, $L_3^{(x)}$ — конвективные (вихревые) волны. Используя полученные выражения (10), после некоторых тождественных преобразований, запишем значения консервативных переменных для уравнения течения вязкого газа на границе:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} &= \frac{1}{c^2}\left(L_2^{(x)} + 1/2(L_4^{(x)} + L_2^{(x)})\right);\\
\frac{\partial(\rho u_x^2 + p)}{\partial x} &= \frac{u_x}{c^2}\left(L_2^{(x)} + 1/2(L_4^{(x)} + L_2^{(x)})\right) + \frac{1}{c}(L_4^{(x)} - L_1^{(x)});\\
\frac{\partial(\rho u_x u_y)}{\partial x} &= \frac{u_y}{c^2}\left(L_2^{(x)} + 1/2(L_4^{(x)} + L_2^{(x)})\right) + \rho L_3^{(x)};\\
\frac{\partial(E+p)u_x}{\partial x} &= \frac{1/2(L_4^{(x)} + L_1^{(x)})}{\gamma - 1} + \frac{1}{2c^2}(u_x^2 + u_y^2)\left(L_2^{(x)} + 1/2(L_4^{(x)} + L_2^{(x)})\right) + u_y\rho L_3^{(x)} + \frac{u_x\rho}{c}(L_4^{(x)} - L_1^{(x)}).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Подставляя (11) в (4), получаем уравнения для течения вязкого газа в граничной области:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{F_v}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G_v}}{\partial y};\\
\mathbf{U} = [\rho; \rho u_x; \rho u_y; E]^T;\\
\mathcal{F} = \begin{pmatrix}
\frac{1}{c^2}\left(L_2^{(x)} + 1/2(L_4^{(x)} + L_2^{(x)})\right)\\
\frac{u_x}{c^2}\left(L_2^{(x)} + 1/2(L_4^{(x)} + L_2^{(x)})\right) + \frac{1}{c}(L_4^{(x)} - L_1^{(x)})\\
\frac{u_y}{c^2}\left(L_2^{(x)} + 1/2(L_4^{(x)} + L_2^{(x)})\right) + \rho L_3^{(x)}\\
\frac{1/2(L_4^{(x)} + L_1^{(x)})}{\gamma - 1} + \frac{1}{2c^2}(u_x^2 + u_y^2)\left(L_2^{(x)} + 1/2(L_4^{(x)} + L_2^{(x)})\right) + u_y\rho L_3^{(x)} + \frac{u_x\rho}{c}(L_4^{(x)} - L_1^{(x)})
\end{pmatrix}\\
\mathbf{G} = [\rho u_y; \rho u_y u_x; \rho u_y^2 + p; (E+p)u_y]^T.\\
\mathbf{F_v} = [0; \tau_{xx}; \tau_{xy}; u_x\tau_{xx} + u_y\tau_{xy}]^T;\\
\mathbf{G_v} = [0; \tau_{yx} = \tau_{xy}; \tau_{yy}; u_x\tau_{xy} + u_y\tau_{yy}]^T.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

2.1.2. Трехмерные уравнения течения вязкого газа — постановка неотражающих краевых условий

Используя указанную выше операцию, приведем уравнения (1) к примитивным переменным в граничной области:

$$
\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ u_x\\ u_y\\ u_z\\ p\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_2 + \frac{1}{c^2}(L_5 + L_1)\\ \frac{1}{\rho c}(L_5 - L_1)\\ L_3\\ L_4\\ L_5 + L_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{u}_\tau \cdot \nabla_\tau \rho + \rho \nabla_\tau \cdot \mathbf{u}_\tau\\ \mathbf{u}_\tau \cdot \nabla_\tau u_x\\ \mathbf{u}_\tau \cdot \nabla_\tau u_y + (1/\rho)\frac{\partial p}{\partial y}\\ \mathbf{u}_\tau \cdot \nabla_\tau u_z + (1/\rho)\frac{\partial p}{\partial z}\\ \mathbf{u}_\tau \cdot \nabla_\tau p + \gamma p \nabla_\tau \cdot \mathbf{u}_\tau\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ (1/\rho)\nabla_j \cdot \tau_{jx}\\ (1/\rho)\nabla_j \cdot \tau_{jy}\\ (1/\rho)\nabla_j \cdot \tau_{jz}\\ (\gamma - 1)u_k\tau_{jk}\end{pmatrix}. \tag{13}
$$

Здесь амплитуды L_i дополняются еще одним значением, отвечающим вихревой компоненте по направлению z. Индексы тензора j, k — суммирование по повторяющимся индексам. Переменные вида $_\tau$ есть проекция вектора в касательном направлении к плоскости краевого условия (в данном случае $_\tau = y, z$). Теперь рассмотрим условия, при которых нефизические волны демпфируются и, таким образом, реализуется эффект неотражения. В данной работе, в отличие от работ [9], [10], вводится буферная зона в направлении x со стороны входа и выхода. Во-первых, она играет роль PML (perfectly matched layer) [11], поскольку позволяет демпфировать ненужные волны, не внося возмущения в основную расчетную область. Во-вторых, в виду выбора схемы WENO-9 с шаблоном шириной в 7 точек в каждом направлении, требуется область, в которой расчет должен быть достроен. Следовательно, каждая буферная зона выбирается размером в 14 элементов по направлению x, т. е. буфер со стороны входных граничных условий и буфер со стороны выходных. Пусть $x \in [a; b]$, и при $x = a$ мы имеем входную границу, а при $x = b$ — выходную. Введем потоки на границах — касательные невязкие потоки:

$$
\begin{aligned}
T_1^{(x)} &= -\frac{1}{2}\left(\mathbf{u}_\tau \cdot \nabla_\tau p + \gamma p \nabla_\tau \cdot \mathbf{u}_\tau - \rho c \mathbf{u}_\tau \nabla_\tau u_x\right);\\
T_2^{(x)} &= -\nabla_\tau \cdot (\rho \mathbf{u}_\tau) + c^{-2}(\mathbf{u}_\tau \cdot \nabla_\tau p + \gamma p \nabla_\tau \cdot \mathbf{u}_\tau);\\
T_3^{(x)} &= -\left(\mathbf{u}_\tau \cdot \nabla u_y + \rho^{-1}\partial p/\partial y\right);\\
T_4^{(x)} &= -\left(\mathbf{u}_\tau \cdot \nabla u_z + \rho^{-1}\partial p/\partial z\right);\\
T_5^{(x)} &= -\frac{1}{2}\left(\mathbf{u}_\tau \cdot \nabla_\tau p + \gamma p \nabla_\tau \cdot \mathbf{u}_\tau + \rho c \mathbf{u}_\tau \nabla_\tau u_x\right);
\end{aligned} \tag{14}
$$

и вязкие потоки:

$$
\begin{aligned}
V_1^{(x)} &= \frac{1}{2}\left((\gamma-1)u_k\tau_{jk} - c\nabla_j \cdot \tau_{jx}\right);\\
V_2^{(x)} &= -\frac{(\gamma-1)}{c^2}u_k\tau_{jk};\\
V_3^{(x)} &= (1/\rho)\nabla_j \cdot \tau_{jy};\\
V_4^{(x)} &= (1/\rho)\nabla_j \cdot \tau_{jz};\\
V_5^{(x)} &= \frac{1}{2}\left((\gamma-1)u_k\tau_{jk} + c\nabla_j \cdot \tau_{jx}\right).
\end{aligned} \tag{15}
$$

Используя полученные выражения (14), (15), определяются амплитуды демпфирования для отдельных волн на границах $x = a, x = b$. Результаты сведены в табл. 1, 2. Параметры демпфирования α, β_i и параметр настройки схемы a выбираются аналогично работе [9].

2.1.3. Тестовые расчеты для неотражающих граничных условий

В качестве тестовой задачи рассматривается перенос завихренности в направлении x потоком газа

Таблица 1

Входные граничные условия для дозвукового потока в направлении $x > a$. β_i — коэффициенты демпфирования для i-ой волны

Скорость волны	L_i при $x = a$
$u_x - c < 0$	L_1 — рассчитывается извне.
$u_x > 0$	$L_2 = \beta_2(e - e_0) + T_2 + V_2$
$u_x > 0$	$L_3 = \beta_3(u_y - u_y(0)) + T_3 + V_3$
$u_x > 0$	$L_4 = \beta_4(u_z - u_z(0)) + T_4 + V_4$
$u_x + c > 0$	$L_5 = \beta_5(u_x - u_x(0)) + T_5 + V_5$

Таблица 2

Выходные граничные условия для дозвукового потока в направлении $x > a$. α — коэффициент демпфирования для исходящей волны. $T_{1(exect)}$ определяется путем проектирования консервативного потока на плоскость

Скорость волны	L_i при $x = b$
$u_x - c < 0$	$L_1 = \alpha(p - p_\infty + (1-a)T_1 + aT_{1(exect)} + V_1$
$u_x > 0$	L_2 — рассчитывается извне.
$u_x > 0$	L_3 — рассчитывается извне.
$u_x > 0$	L_4 — рассчитывается извне.
$u_x + c > 0$	L_5 — рассчитывается извне.

в двухмерной постановке. Данная задача рассматривается в [9]. При рассмотрении задачи выбираются следующие параметры: $\alpha = 0{,}05$, параметры β взяты равными 1,0. Завихренность в начальный момент описывается выражением для функции тока:

$$
\begin{aligned}
\Psi(x, y, 0) &= C \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2R_c}\right);\\
u_x &= u_{x\infty} + \frac{\partial \Psi}{\rho \partial y};\\
u_y &= -\frac{\partial \Psi}{\rho \partial x}.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Начальное распределение давления определяется как:

$$
p(x, y, 0) = p_\infty - \rho\frac{C^2}{R_c^2} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2R_c}\right); \tag{17}
$$

а условия проведения расчета задаются следующим образом:

$$
M = \frac{u_{x\infty}}{c} = 0{,}05; \frac{R_c}{b-a} = 0{,}1. \tag{18}
$$

Данный тест проводит верификацию как входных условий (не отражение возмущений, возникших от вихря), так и выходных. Для вязких потоков на границе $x = a, x = b$ ставятся условия $\partial\tau_{xx}/\partial x = 0$.

Результаты движения завихренности и значения скоростей u_x, u_y показаны в табл. 3. Отмечено, что не наблюдается возникновение нефизических осцилляций при прохождении завихренности через неотражающую границу. Максимальное отклонение значения завихренности в удаленной точке $x = 0{,}1$; $y = 0{,}9$ по норме $\mathbb{L}_2$ составляет $3{,}45 \cdot 10^{-14}$. Аналогичные тесты проведены на поглощение акустической волны краевыми условиями от источника, расположенного в центре области расчета (задача не приводится ввиду громоздкости). Результаты показали отсутствие переотражения акустических волн, что подтверждает высокую эффективность предложенных краевых условий.

3. Постановка начально-краевой задачи

В продолжении работы [19], будем рассматривать задачу течения вязкого газа в прямоугольной области, см. рис. 1. В данной области ставятся условия для возникновения и развития неустойчивости Кельвина—Гельмгольца. Неустойчивость Кельвина—Гельмгольца возникает при наличии сдвига между слоями сплошной среды. Впервые была описана еще Гельмгольцем [4] и Кельвином [5] в середине XIX века. Детально обзор особенностей задачи представлен в работе [19]. Критерием устойчивости течения является число Ричардсона, определяющееся как:

$$Ri = \frac{\Delta\rho g h}{\rho_A \Delta U^2}, \tag{19}$$

где g — ускорение свободного падения, h — высота слоя смешения, ΔU — разница скоростей сдвигового слоя, ρ_A — средняя плотность жидкости (газа), $\Delta\rho$ — разница плотностей сдвиговых слоев. В работе [6] на основе линейного анализа устойчивости отмечается, что турбулентное перемешивание наступает при $Ri < \dfrac{1}{4}$.

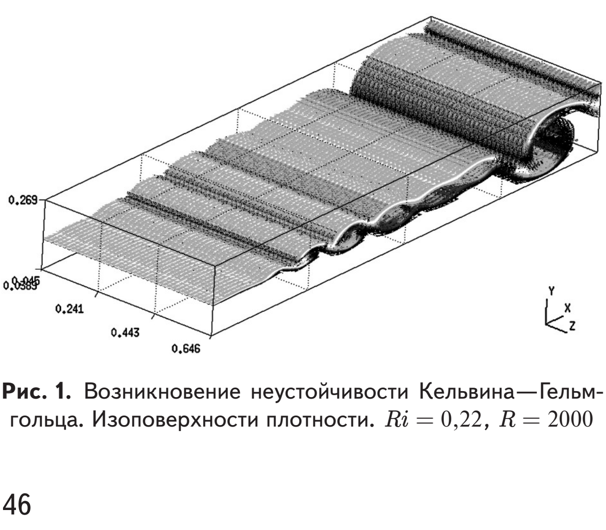


Рис. 1. Возникновение неустойчивости Кельвина—Гельмгольца. Изоповерхности плотности. $Ri = 0{,}22$, $R = 2000$

Область Ω — прямоугольная, размером $X = 1{,}8$ см, $Y = 0{,}3$ см, $Z = 0{,}7$ см, сила гравитации направлена по направлению оси $-Y$. Граничные условия: условия симметрии по оси Y при $y = 0$ и $y = 0{,}3$, условия периодичности по оси Z, условия свободного истечения из области по оси X при $x = 1{,}8$. При $x = 0{,}0$ задаются невозмущенные условия потока. Все нефизические граничные условия определяются как указано выше. Плотность потока, расположенного снизу, на 40% ниже плотности потока газа, расположенного выше. Скорость нижнего потока на 50% выше, чем скорость верхнего потока, что создает неустойчивый сдвиговой слой. Сила гравитации подбирается так, чтобы обеспечить неустойчивость по критерию Ричардсона. Начальное условие — невозмущенное течение газа во всей области с характеристиками, определяемыми граничными условиями на входе при $x = 0$. Давление задается так, чтобы максимальное число Маха составляло 0,8. Расчет числа Ричардсона выполняется по формуле (19). Здесь $h = 0{,}15$, $\Delta\rho = 0{,}4$, $\rho_A = 0{,}8$. Параметр ΔU в отличии от работы [19] меняется. Для учета вязкости вводится единственное число Рейнольдса, определяемое как:

$$R = \frac{\Delta U h \rho_A}{\nu}. \tag{20}$$

Как и в работе [19], формируется двухпараметрическая задача, где бифуркационными параметрами являются Ri и R. Здесь число Ричардсона будет задавать «жесткость» отклика на изменение числа Рейнольдса, аналогично неустойчивости Рэлея—Бенара, см. [15].

Для анализа фазового портрета, получаемого при расчете задачи, вводится 10 контрольных точек, в которых записывается пять параметров системы — вектор $\mathbf{U}$. По аналогии с [19] рассматривались точки с координатами, указанными в табл. 4.

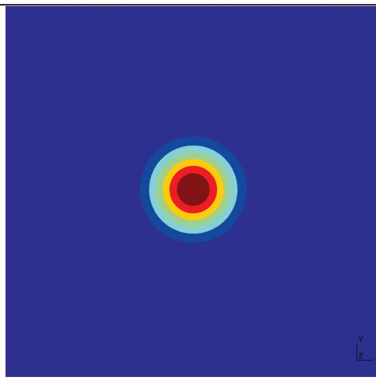
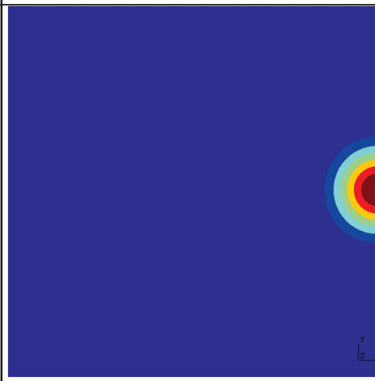
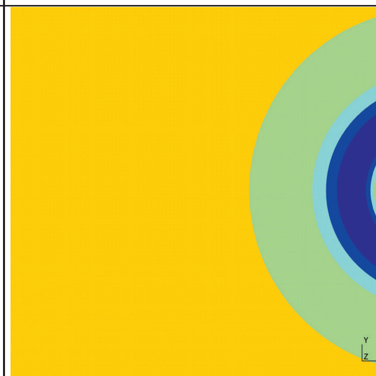
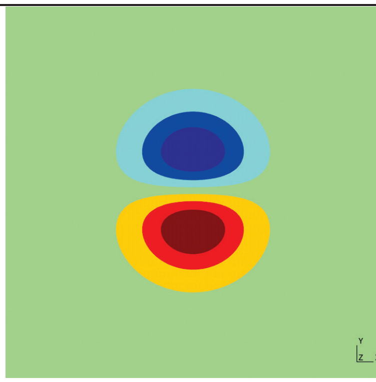
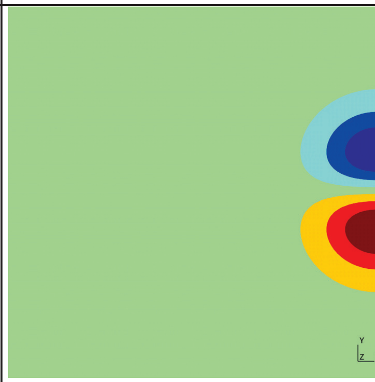
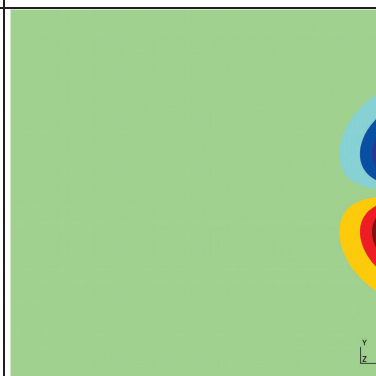
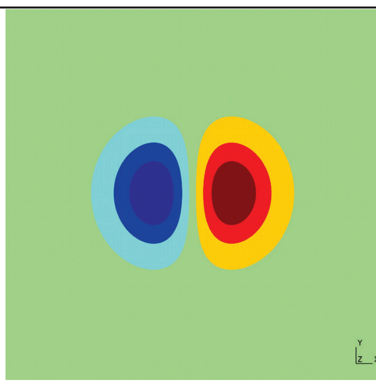
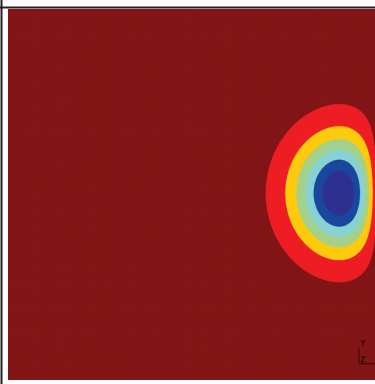
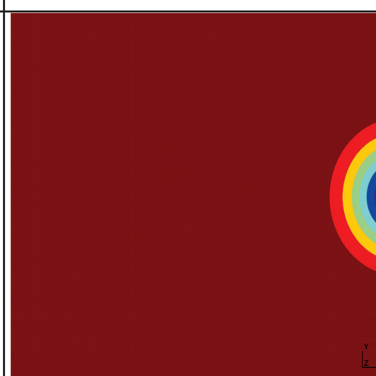
Размер сетки составляет $(800 \times 500 \times 350)$, таким образом, прямое численное моделирование обеспечивается до $R \leqslant 4170$ (об оценке размера сетки по R для DNS см. [20]). Расчет ведется на графических процессорах NVIDIA K20c и C2075, все переменные заданы с двойной точностью.

4. Результаты расчета

Рассмотрим результаты некоторых расчетов поставленной начально-краевой задачи. Для анализа бифуркационной картины в различных точках об-

Таблица 3

Задача переноса завихренности через неотражающую границу. Изолинии $\nabla \times \mathbf{u}$, u_x, u_y. Показано отсутствие не физических волн при прохождении вихря через выходную границу, расположенную справа в различные моменты времени

	$t = 0{,}0$	$t = 95ms$	$t = 117ms$
$\nabla \times \mathbf{u}$			
$u - x$			
$u - y$			

ласти расчета записывались переменные, входящие в $\mathbf{U}$, после чего по ним строились фазовые портреты поведения системы после выхода решения системы (1) на квазистационарный режим.

Всего рассматривалось 6 серий расчетов при разном числе Ri, определяемом как по значению модуля вектора гравитации, так и по перепаду разнице скорости. Для ускорения анализа применялся следующий метод: каждые сто тысяч шагов по времени проводилось преобразование Фурье значений скорости с целью поиска выраженных частот (амплитуда выше, чем заданное значение). Если такой режим находился, то он записывался как удачный, и дальше менялся параметр (в данном случае перепад скорости) и расчет продолжался. При фиксированных числах Рейнольдса (шаг 250 начиная с $R = 1000$) были найдены области, в которых имеет смысл искать решение по числу Ричардсона. Были получены значения $Ri = \{1/6; 1/8; 1/11\}$. Дальше приведем результаты только для числа $Ri = 1/6$, так как при этом результат был получен наиболее точный. Аналогично работе [19] вначале при $R < 1000{-}1700$

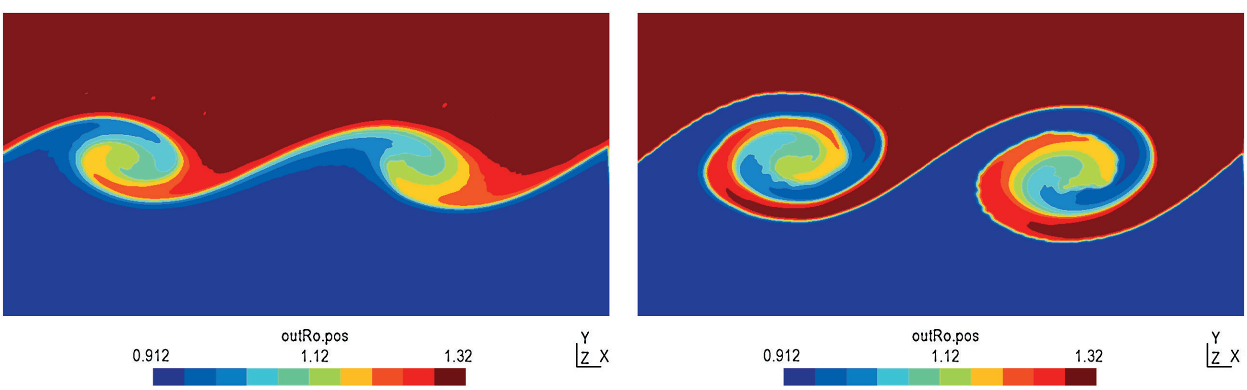
Таблица 4

Координаты точек в области расчета, по которым выполняется анализ фазового портрета решения

№ точки	x	y	z
0	0.18	0.21	0.35
1	0.36	0.09	0.35
2	0.54	0.09	0.35
3	0.9	0.09	0.35
4	1.62	0.09	0.35
5	1.08	0.27	0.35
6	1.08	0.24	0.35
7	1.08	0.21	0.35
8	1.08	0.18	0.35
9	1.08	0.15	0.35

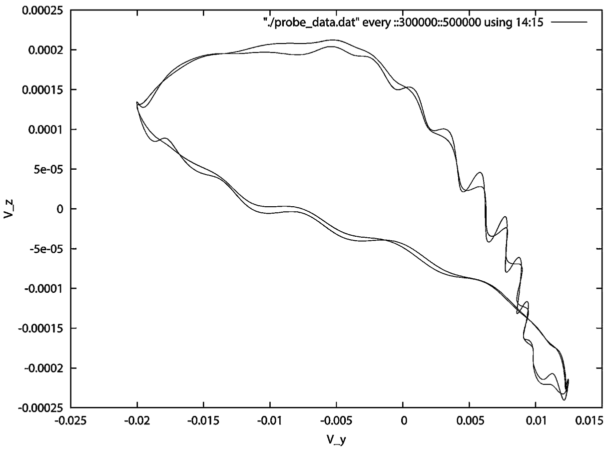
(в зависимости от числа Ri) в фазовом подпространстве наблюдается устойчивая точка, что соответствует стационарному течению. При этом, благодаря вязкости, слой смешения смазывается и представляет из себя равномерно распределенный переход по плотности и по скорости. Начиная с $R = 1500$ образуется начальный «валец», похожий на неустойчивость, изображенную на рис. 1. Образование такого «вальца» приводит к потере устойчивости стационарной точкой и рождению цикла во всех рассматриваемых трехмерных подпространствах. Образуемые циклы в различных точках качественно аналогичны циклам, полученным в работе [19]. Полученные данные соответствуют квазистационарному решению и построены по 500 000 точкам. Важно отметить, что структура неустойчивости достаточно сложная. Так, на рис. 2 (a), (b) показано сечение течения плоскостью xy при $z = 0{,}0$ и увеличенная область вальца. Видно значительное усложнение структуры вальца при переходе от $R = 1700$ до $R = 5000$. Преобразование Фурье при $R = 5000$ уже полностью хаотическое, несмотря на все еще начальный режим развития неустойчивости.

При дальнейшем увеличении бифуркационного параметра от $R = 1700$ происходит потеря устойчивости через каскады бифуркаций Фейгенбаума. На рис. 3 (a)–(c) показана бифуркация цикла с рождением цикла периода два, а на рис. 4–6 показан цикл периода четыре при увеличении числа Рейнольдса до $R = 1754$. Важно отметить, что в отличие от работы [19] при $Ri = 1/6$ не наблюдается бифуркации Андронова—Хопфа. Аналогичная картина наблюдалась и при выборе режима по числу Рэлея в задаче конвекции Рэлея—Бенара [15]. Данный режим очень тонкий, поскольку при $Ri < 1/6$ происходит резкий срыв в хаотическое поведение при больших значениях R. А при $Ri = 1/8$, как уже отмечалась в [19], наблюдается бифуркация Андронова—Хопфа. Далее обнаружен каскад бифуркаций с рождением цикла Фейгенбаума, вплоть до значения $R = 2400$. При $R = 2417$ обнаружен цикл периода три, что свидетельствует о прохождении каскада Шарковского. Результаты показаны на рис. 7–9. Отклонение от значения $R = 2417$ не дало возможности обнаружить четкие циклы. Вероятно, начиная с $R > 2500$, наблюдается уже имевшая место картина — бифуркация Андронова—Хопфа по всем частотам циклов, что отмечено в работе [20].

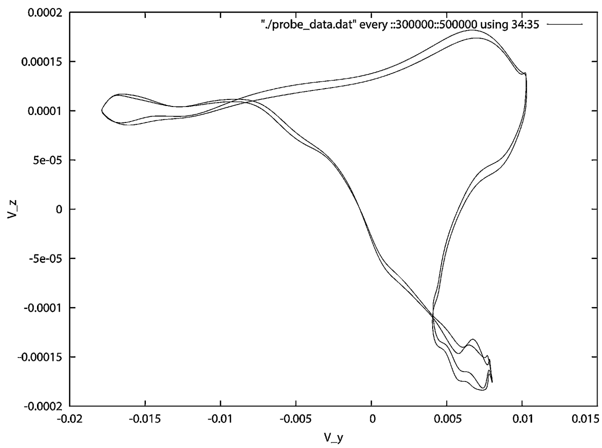


(a) $R = 1700$, $Ri = 1/6$ (b) $R = 5000$, $Ri = 1/6$

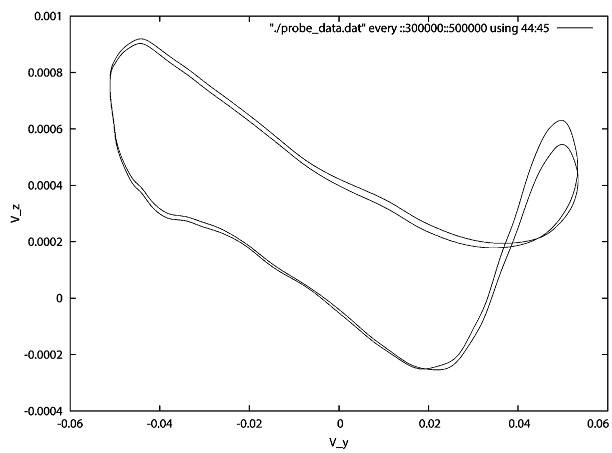
Рис. 2. Сечение течения плоскостью xy при $z = 0{,}0$, $R = 1700$, $R = 5000$. Время (не шаги по времени) выравнены



(a) Точка 1, $R = 1700{,}5$, $Ri = 1/6$.



(b) Точка 3, $R = 1700{,}5$, $Ri = 1/6$.



(c) Точка 4, $R = 1700{,}5$, $Ri = 1/6$.

Рис. 3. Цикл периода два. Фазовый портрет в подпространстве (V_z, V_y)

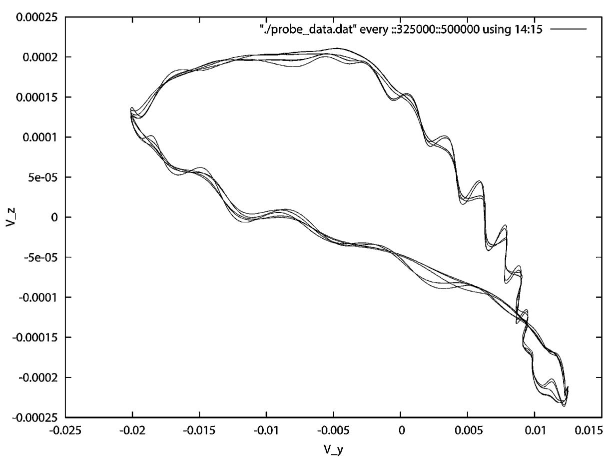


Рис. 4. Точка 1, цикл периода четыре, фазовый портрет в подпространстве V_z, V_y, $R = 1754$, $Ri = 1/6$

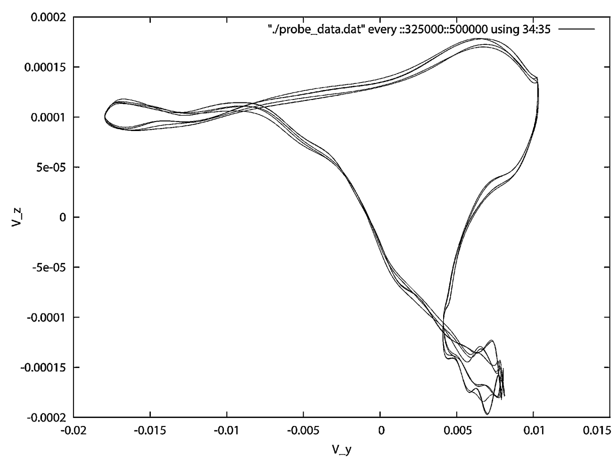


Рис. 5. Точка 3, цикл периода четыре, фазовый портрет в подпространстве V_z, V_y, $R = 1754$, $Ri = 1/6$

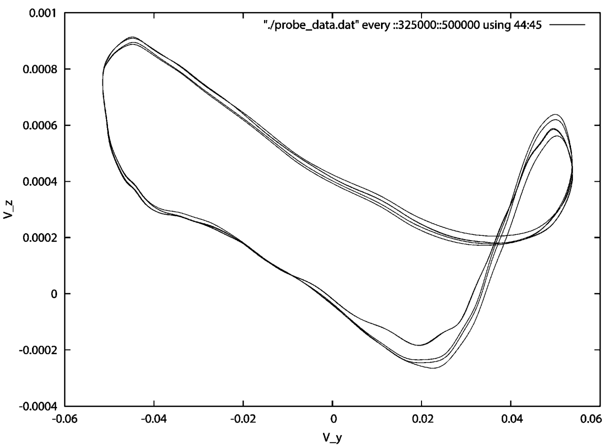


Рис. 6. Точка 4, цикл периода четыре, фазовый портрет в подпространстве V_z, V_y, $R = 1754$, $Ri = 1/6$

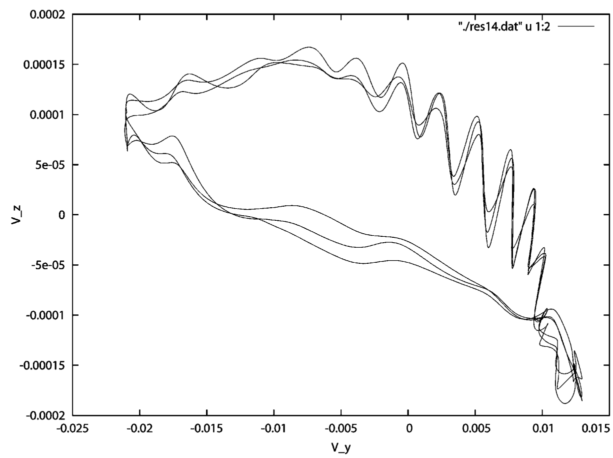


Рис. 7. Точка 1, цикл периода три, фазовый портрет в подпространстве V_z, V_y, $R = 2417$, $Ri = 1/6$

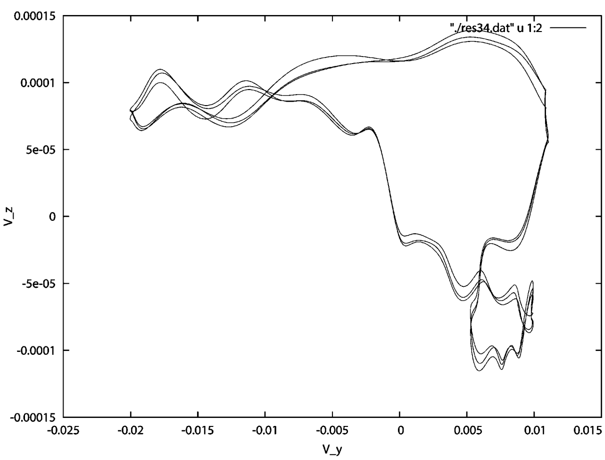


Рис. 8. Точка 3, цикл периода три, фазовый портрет в подпространстве V_z, V_y, $R = 2417$, $Ri = 1/6$

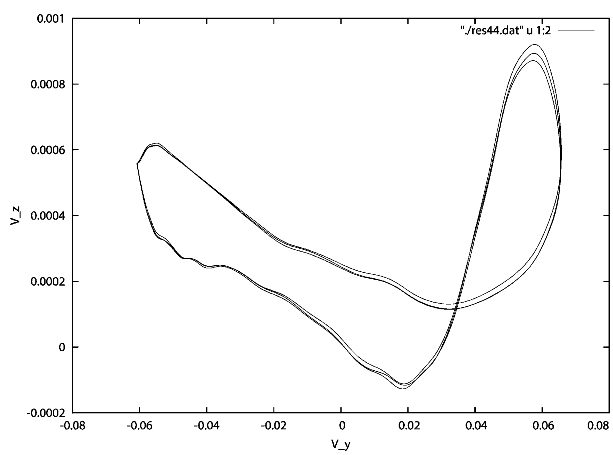


Рис. 9. Точка 4, цикл периода три, фазовый портрет в подпространстве V_z, V_y, $R = 2417$, $Ri = 1/6$.

Заключение

В данной работе проводится дальнейшее исследование ламинарно-турбулентного перехода в задаче возникновения неустойчивости Кельвина—Гельмгольца для течения вязкого газа, начатое в работах [18], [19]. Показан способ учета нефизических неотражающих граничных условий, что позволяет избавиться от паразитных численных осцилляций. При определенных параметрах был обнаружен сценарий ФШМ [14] для начальной стадии ламинарно-турбулентного перехода. Результаты численного моделирования при $Ri = 1/6$ показали, что, в отличие от работы [19], вплоть до цикла периода три не наблюдается бифуркации Андронова—Хопфа. Скорее всего, как и в задаче конвекции Рэлея—Бенара [15], при определенных стабилизирующих условиях (в данном случае уменьшении сдвиговой скорости слоя смешения) на начальном этапе блокируется сценарий Ландау (рождение торов большой размерности).

В заключение надо отметить, что в отличии от работ по решению задачи течения несжимаемой жидкости, например [20], численный анализ течения вязкого газа значительно сложнее. Делать выводы об адекватности численной модели описываемым уравнениям можно только на основе асимптотических теорем (аппроксимация, устойчивость, сходимость), которые в данной работе выполняются. Но формально можно показать [13], что существуют такие условия, при которых решение системы (1) испытывает blow-up для течений при конечном времени. Именно поэтому во всех исследованиях [18], [19] введены нефизические граничные условия (выход из области расчета) с тем, чтобы избавиться от накопления численных ошибок (в отличие от задач с везде периодическими краевыми условиями).

Литература

1. *Белоцерковский О. М.*, *Опарин А. М.* Численный эксперимент в турбулентности. От порядка к хаосу. М.: Наука, 2001.
2. *Toro E. F.* Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Springer-Verlag, 1999.
3. *Titarev V. A. and Toro E. F.* ADER: arbitrary high order Godunov approach // J. Sci. Comput. 2002. 17: 609–618.
4. *Hermann von Helmholtz.* Uber discontinuierliche Flussigkeits-Bewegungen // Monatsberichte der Koniglichen Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1868. 23: 215–228.
5. *Lord Kelvin* (*William Thomson*). Hydrokinetic solutions and observations // Philosophical Magazine. 1871. 42: 362–377.
6. *Линь Цзя-Цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностранной литературы, 1958.
7. *Amerstorfer U.*, *Erkaev N. V.*, *Taubenschuss U.*, *Biernat H. K.* Influence of a density increase on the evolution of the Kelvin—Helmholtz instability and vortices // Physics of Plasmas. 2007. V. 7. P. 072901–8.
8. *E. C. Harding*, *J. F. Hansen*, *O. A. Hurricane*, *R. P. Drake*, *H. F. Robey*, *C. C. Kuranz*, *B. A. Remington*, *Bono M. J.*, *Grosskopf M. J.*, *Gillespie R. S.* Observation of a Kelvin—Helmholtz Instability in a High-Energy-Density Plasma on the Omega Laser // Physical Review Letters. LLNL-JRNL–410680. February 18, 2009.
9. *Chen Lin and Tang Dengbin*. Navier—Stokes Characteristic Boundary Conditions for Simulations of Some Typical Flows // Applied Mathematical Sciences. 2010. V. 4. № 18. P. 879–893.
10. *Chun Sang Yoo and Hong G. Im.* Characteristic boundary conditions for simulations of compressible reacting flows with multi-dimensional, viscous, and reaction effects // Combustion Theory and Modelling. 2007. Vol. 11, issue 2. P. 259–286.
11. *Yoo C.*, *Wang Y.*, *Trouve A.*, *Im*, *H.* Characteristic boundary conditions for direct simulations of turbulent counter flows // Combust. Theor. Model. 2005. 9 (4). P. 617–646.
12. *Дородницын Л. В.* Неотражающие граничные условия и численное моделирование задач обтекания // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 1. С. 152–169.
13. *Ronghua Pan*, *Kun Zhao*. The 3D compressible Euler equations with damping in a bounded domain // Journal of Differential Equations. 15 January, 2009. V. 246. Issue 2. P. 581–596.
14. *Evstigneev N. M.*, *Magnitskii N. A.*, *Sidorov S. V.* Nonlinear dynamics of laminar-turbulent transition in three dimensional Rayleigh—Benard convection // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. October, 2010. V. 15. Issue 10. P. 2851–2859.
15. *Евстигнеев Н. М.*, *Магницкий Н. А.* О возможных сценариях перехода к турбулентности в конвекции Рэлея—Бенара // Доклады РАН. 2010. Т. 433, 1. С. 318–322.
16. *Евстигнеев Н. М.*, *Магницкий Н. А.* Нелинейная динамика в начально-краевой задаче течения жидкости с уступа для гидродинамического приближения уравнений Больцмана // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 12. С. 1794–1798.
17. *Evstigneev N. M.*, *Magnitskii N. A.* Nonlinear Dynamics of Laminar-Turbulent Transition in Back Facing Step Problem for Bolzmann Equations in Hydrodynamic Limit // Proc. of AIP (American Institute of Physics)/ 2010. V. 1281 . P. 896–900.
18. *Евстигнеев Н. М.*, *Магницкий Н. А.* Особенности фазового пространства уравнений динамики газа для трансзвуковой начально-краевой задачи // Труды ИСА РАН. 2012. Т. 62, 4. С. 85–102.
19. *Евстигнеев Н. М.*, *Магницкий Н. А.* Нелинейная динамика начальной стадии ламинарно-турбулентного перехода в задаче развития неустойчивости Кельвина—

Гельмгольца // Труды ИСА РАН. 2013. Т. 63, 3. С. 45–52.
20. *Evstigneev N. M. and Magnitskii N. A.* FSM Scenarios of Laminar-Turbulent Transition in Incompressible Fluids, Nonlinearity, Bifurcation and Chaos — Theory and Applications / Prof. Jan Awrejcewicz (Ed.). 2012. ISBN: 978–953–51–0816–0, InTech, DOI: 10.5772/48811.
21. *Евстигнеев Н. М.*, *Магницкий Н. А.*, *Рябков О. И.* Численное исследование перехода к турбулентности в задаче о двумерном течении вязкой сжимаемой проводящей жидкости в канале с симметричным расширением // Труды ИСА РАН. 2012. Т. 62. Вып. 1. С. 55–62.
22. *Евстигнеев Н. М.* Интегрирование трехмерных уравнений невязкого газа на неструктурированной сетке с применением распределенных вычислений // Вычислительные методы и программирование. НИВЦ МГУ, 2007. Т. 8. С. 252–264.

Евстигнеев Николай Михайлович. С. н. с. ИСА РАН. К. т. н. Окончил в 2001 г. МГУ. Количество печатных работ: 21, в т.ч. 1 монография. Область научных интересов: гидродинамика (уравнения Навье-Стокса), аэродинамика, теоретическая механика, теория аппроксимации, численные методы, параллельные вычисления на графических процессорах, искусственный интеллект. E-mail: evstigneevnm@yandex.ru

Магницкий Николай Александрович. Зав. лаб. ИСА РАН. Окончил в 1974 г. МГУ. Д. ф.-м. н., профессор, акад. РАЕН. Количество печатных работ: более 200, 6 монографий. Область научных интересов: нелинейные дифференциальные уравнения, теория управления, хаотические динамические системы, искусственные нейронные сети и экономико-математическое моделирование. E-mail: nmag@isa.ru, E-mail: nikmagn@gmail.com