

Адаптивные алгоритмы зеркального спуска в задачах выпуклой стохастической оптимизации*

А. В. НАЗИН

Аннотация. Рассматривается задача выпуклой стохастической оптимизации и метод зеркального спуска (МЗС) как в «классической», так и в «адаптивной» постановке, когда последовательность обобщенной температуры не определена априори и настраивается в процессе наблюдений градиента и итеративного оценивания оптимальной точки. Доказана соответствующая адаптивная верхняя граница ошибки (относительно оптимизируемой функции) в предположении известного ограничения нормы градиента с вероятностью 1. Это является своеобразной платой за адаптивность метода по сравнению с более слабым ограничением в среднем в неадаптивной постановке.

Ключевые слова: *методы выпуклой оптимизации, задачи стохастической оптимизации, адаптивные алгоритмы, зеркальный спуск, верхняя граница.*

Введение

Метод зеркального спуска (МЗС) [1] относится к прямо-двойственным методам выпуклой оптимизации градиентного типа [2, 3], в которых используется как прямое, так и двойственное пространство: текущие наблюдения градиента оптимизируемой функции формируют траекторию в двойственном пространстве, и эта траектория отображается в заданное множество исходного пространства, на котором и проводится оптимизация. Упомянутое отображение является функциональным параметром метода и, наряду с другими параметрами (например, сопряженные нормы исходного и двойственного пространств, масштабирующий и шаговый множители), позволяет не только контролировать, но и в какой-то степени минимизировать верхнюю границу ошибки МЗС относительно оптимизируемой функции. При этом обычно предполагается известным ограничение на норму вектора наблюдений градиента оптимизируемой функции. В частном случае, когда оба пространства евклидовы, а отображение двойственного пространства на заданный выпуклый компакт соответствует метрической проекции, МЗС совпадает со стандартным методом проекции градиента. В общем же случае МЗС обладает дополнительными степенями свободы, и их правильное использование может ино-

гда существенно расширить возможности метода даже в условиях большой размерности [4].

Отметим, что подавляющее большинство работ по МЗС относятся к получению гарантированной верхней границы ошибки на всем классе рассматриваемой задачи оптимизации, когда последовательности параметров метода определены априори и не меняются в процессе наблюдений градиента и итеративного оценивания оптимальной точки [1–4]. В [5, 6] получены адаптивные алгоритмы зеркального спуска (АЗС). В настоящей работе, следуя [6], для достаточно общей постановки представлены улучшенные адаптивные АЗС по сравнению с [5] (что, в частности, видно из доказательства верхней границы ошибки). Справедливости ради скажем, что условие на ограничение нормы вектора наблюдений градиента здесь более жесткое, чем это делается в неадаптивных работах по МЗС.

Структура данной работы следующая. В параграфе 2 излагаются предварительные определения и утверждения, известные из выпуклого анализа [6, 8]; здесь же рассматривается пример со стандартным симплексом. В следующем параграфе формулируется постановка задачи выпуклой стохастической минимизации; алгоритм ЗС описан в параграфе 4, и приводится (без доказательства) верхняя граница критериальной ошибки (теорема 2 из [9]); в последующем параграфе представлены адаптивный АЗС, верхняя граница критериальной ошибки и краткое доказательство. Наконец, сформулировано заключение и дан список литературы.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 12–08–01245) и при поддержке лаборатории ПреМо-Лаб (грант Правительства РФ № 11.G34.31.0073).

1. Предварительные определения и утверждения [9]

Введем ряд определений и напомним некоторые факты из выпуклого анализа [6, 8]. Пусть E — пространство R^N , оснащенное нормой $\|z\|$ (не обязательно евклидовой), где $z = (z^{(1)}, \dots, z^{(N)})^T$; тогда двойственное (или сопряженное) пространство E^* представляет собой R^N , оснащенное нормой

$$\|z\|_* = \max_{\|\theta\|=1} z^T \theta, \quad \forall z \in E^*.$$

Пусть Θ — выпуклое замкнутое подмножество E , параметр $\beta > 0$, а функция $V: \Theta \rightarrow R$ выпуклая. Назовем β -сопряженной функцией к V преобразование типа Лежандра—Фенхеля W_β от произведения βV :

$$W_\beta(z) = \sup_{\theta \in \Theta} \{-z^T \theta - \beta V(\theta)\}, \quad \forall z \in E^*.$$

Введем важное предположение, представляющее собой следующее условие Липшица в сопряженных нормах $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$.

Предположение (L). Выпуклая функция $V: \Theta \rightarrow R$ такова, что ее β -сопряженная W_β непрерывно дифференцируема на E^* с градиентом ∇W_β , удовлетворяющим неравенству

$$\|\nabla W_\beta(z) - \nabla W_\beta(\tilde{z})\| \leq \frac{1}{\alpha\beta} \|z - \tilde{z}\|_*, \quad \forall z, \tilde{z} \in E^*, \quad \beta > 0,$$

где α — положительная постоянная, не зависящая от β .

Сформулируем известные свойства β -сопряженных функций и, в частности, условие справедливости предположения (L).

Предложение 1. Пусть функция $V: \Theta \rightarrow R$ выпуклая, а параметр β положителен. Тогда β -сопряженная функция к V функция W_β обладает следующими свойствами:

1. Функция $W_\beta: E^* \rightarrow R$ выпуклая и имеет сопряженную βV , т. е.

$$\beta V(\theta) = \sup_{z \in E^*} \{-z^T \theta - W_\beta(z)\}, \quad \forall \theta \in \Theta.$$

2. Если функция V является α -сильно выпуклой относительно нормы $\|\cdot\|$, то есть при некотором $\alpha > 0$ справедливо условие

$$V(\lambda\theta + (1-\lambda)\theta') \leq \lambda V(\theta) + (1-\lambda)V(\theta') - \frac{\alpha}{2} \lambda(1-\lambda) \|\theta - \theta'\|^2,$$

$$\forall \theta, \theta' \in \Theta, \lambda \in [0, 1],$$

то

- (i) выполнено предположение (L);
- (ii) $\operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} \{-z^T \theta - \beta V(\theta)\} = -\nabla W_\beta(z) \in \Theta$,
 $\forall z \in E^*$.

Определение 1. Назовем $V: \Theta \rightarrow R_+$ прокси-функцией, если она выпуклая и

- (i) существует такая точка $\theta_* \in \Theta$, что

$$\min_{\theta \in \Theta} V(\theta) = V(\theta_*),$$

- (ii) выполнено предположение (L).

Пример. Пусть $\Theta = \Theta_N$ — стандартный симплекс в R^N , натуральное $N > 1$.

Рассмотрим $E = \ell_1^N$ как пространство R^N , оснащенное 1-нормой $\|z\|_1 = \sum_{j=1}^N |z^{(j)}|$, где вектор

$$z = (z^{(1)}, \dots, z^{(N)})^T;$$

тогда двойственное пространство $E^* = \ell_\infty^N$ представляет собой R^N , оснащенное супремум-нормой

$$\|z\|_\infty = \max_{\|\theta\|_1=1} z^T \theta = \max_{1 \leq j \leq N} |z^{(j)}|, \quad \forall z \in E^*.$$

Рассмотрим энтропийную прокси-функцию

$$(1) \quad V(\theta) = \ln N + \sum_{j=1}^N \theta^{(j)} \ln \theta^{(j)}, \quad \forall \theta \in \Theta_N,$$

(где $0 \ln 0 = 0$ по определению), имеющую единственную точку минимума в центре симплекса $\theta_* = (N^{-1}, \dots, N^{-1})^T$, и $V(\theta_*) = 0$. Нетрудно проверить, что эта функция является α -сильно выпуклая относительно нормы $\|\cdot\|_1$ с параметром $\alpha = 1$.

Следовательно, в силу предложения 1 выполняется предположение (L) (прямое доказательство см., например, в [9]). Отметим важную особенность: в данном примере задача оптимизации в пункте 2(ii) предложения 1 решается явно, а $W_\beta(z)$ и $\nabla W_\beta(z)$ задаются формулами

$$\forall z \in E^*, \quad W_\beta(z) = \beta \ln \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{-z^{(k)}/\beta} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z^{(j)}} W_\beta(z) = -e^{-z^{(j)}/\beta} \left(\sum_{k=1}^N e^{-z^{(k)}/\beta} \right)^{-1}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Напомним, что прокси-функция (1) равна информационному расхождению Кульбака между равномерным распределением на множестве $\{1, \dots, N\}$ и распределением на этом множестве, заданным вероятностями $\theta^{(j)}$, $j = 1, \dots, N$; компоненты градиента $\nabla W_\beta(z)$ задают на координатах вектора z распределение Гиббса, в котором β играет роль температуры.

Замечание. В общем случае, для произвольной прокси-функции V на заданном выпуклом компакте Θ не удастся вычислить явно β -сопряженную функцию $W_\beta(z)$ и ее градиент $\nabla W_\beta(z)$, и придется пользоваться приближенными вычислениями, решая при каждом векторе z и данном параметре $\beta > 0$ дополнительную выпуклую задачу минимизации

$$z^T \theta + \beta V(\theta) \rightarrow \min_{\theta \in \Theta}.$$

Найденное решение представляет собой приближенную величину искомого градиента $\nabla W_\beta(z)$, взятый со знаком минус (в соответствии с пунктом 2(ii) Предложения 1). Ясно, что этот подход возможен лишь для «совсем простых» компактов Θ , например, для прямых параллелепипедов вида

$$\Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^N : a_i \leq \theta^{(i)} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, N\},$$

где $-\infty < a^i < b^i < +\infty$, $i = 1, \dots, N$.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу стохастической минимизации неизвестной функции [9]

$$F(\theta) = \mathbf{E}Q(\theta, Z), \quad \theta \in \Theta,$$

где Θ — заданное выпуклое замкнутое множество в $\mathbb{R}^N$, натуральное число $N > 1$, Z — случайная величина, принимающая значения в некотором множестве Z^1 , функция потерь $Q: \Theta \times Z \rightarrow \mathbb{R}_+$ такова, что случайная функция $Q(\cdot, Z): \Theta \rightarrow \mathbb{R}_+$ выпукла для почти всех Z , $\mathbf{E}$ — математическое ожидание. Пусть обучающая выборка $(Z_1, \dots, Z_{t-1})$ представляет собой последовательность независимых случайных величин Z_i с одним и тем же распределением, что и Z . Цель состоит в критериальной минимизации функции $F(\theta)$ на Θ [10]. Это означает, что качест-

во любой допустимой оценки $\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_t(Z_1, \dots, Z_{t-1}) \in \Theta$, $t \geq 1$, характеризуется разностью

$$(2) \quad \mathbf{E}F(\hat{\theta}_t) - \min_{\theta \in \Theta} F(\theta)$$

в предположении, что минимум в (2) достигается; кроме того, формирование конкретной оценки $\hat{\theta}_t$ должно гарантировать по возможности «малую» величину разности (2) на заданном классе функций F . По сути, речь идет о гарантируемой критериальной скорости сходимости на классе рассматриваемых задач оптимизации. Отметим, что предложенный в [9] АЗС обеспечивает верхнюю оценку, которая сформулирована ниже.

Далее, пусть определены стохастические субградиенты

$$(3) \quad u_i(\theta) = \nabla_\theta Q(\theta, Z_i), \quad i = 1, 2, \dots,$$

— такие измеримые функции на Θ , что при каждом $\theta \in \Theta$ математическое ожидание $\mathbf{E}u_i(\theta)$ принадлежит субдифференциалу функции $F(\theta)$. Наконец, будем предполагать, что на каждом шаге $k = 1, 2, \dots$ при любом значении $\theta_{k-1} \in \Theta$ наблюдается субградиент $u_k(\theta_{k-1})$ в силу (3); иначе говоря, рассматриваемая задача стохастической минимизации решается при наличии оракула градиентного типа.

3. Алгоритм зеркального спуска (АЗС) и его верхняя граница

Рассмотрим сначала АЗС [9]. Он представляет собой рекуррентную процедуру оптимизации, которая осуществляет градиентный спуск в двойственном пространстве E^* с отображением траектории в исходное пространство E и дополнительным усреднением результатов отображения. На каждом шаге i рассматривается двойственная переменная ζ_i , определяемая стохастическими субградиентами $u_k(\theta_{k-1})$, $k = 1, \dots, i$, а исходная переменная представляет собой «зеркальное изображение» ζ_i в E . Для настройки алгоритма используется две положительные последовательности: $\{\gamma_i\}_{i \geq 1}$ — «размер шага», и $\{\beta_i\}_{i \geq 0}$ — «температура», причем $\beta_i \geq \beta_{i-1}$, $\forall i \geq 1$. Алгоритм определяется следующим образом:

1) при $i = 0$ задаются начальные значения $\zeta_0 = 0$ и $\theta_0 = -\nabla W_{\beta_0}(\zeta_0)$;

¹ Не стоит путать прописную греческую букву Z , обозначающую выборочное множество, с аналогичной буквой Z латинского алфавита, обозначающую случайную величину.

2) для $i = 1, \dots, t$ выполняется рекуррентный пересчет

$$(4) \quad \zeta_i = \zeta_{i-1} + \gamma_i u_i(\theta_{i-1}),$$

$$(5) \quad \theta_i = -\nabla W_{\beta_i}(\zeta_i);$$

3) выходом t -го шага является выпуклая комбинация (усреднение по Чезаро)

$$(6) \quad \hat{\theta}_t = \frac{\sum_{i=1}^t \gamma_i \theta_{i-1}}{\sum_{i=1}^t \gamma_i}.$$

Выберем последовательности $\{\gamma_i\}$ и $\{\beta_i\}$, независимые от наблюдений градиента, а именно:

$$(7) \quad \gamma_i \equiv 1, \quad \beta_i = \beta_0 \sqrt{1+i}, \quad i \geq 1;$$

параметр $\beta_0 = L_{\Theta, Q}(\alpha \bar{V})^{-1/2}$ выбирается с целью максимизации верхней границы в доказательстве теоремы 1 [9]. При этом АЗС упрощается и становится полностью рекуррентным:

$$(8) \quad \zeta_i = \zeta_{i-1} + u_i(\theta_{i-1}),$$

$$(9) \quad \theta_i = -\nabla W_{\beta_i}(\zeta_i),$$

$$(10) \quad \hat{\theta}_i = \hat{\theta}_{i-1} - \frac{1}{i}(\hat{\theta}_{i-1} - \theta_i), \quad i \geq 1.$$

Теорема 1 [9]. Пусть Θ — выпуклое замкнутое множество в R^N , а функция потерь $Q(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет приведенным выше условиям, причем

$$(11) \quad \sup_{\theta \in \Theta} \mathbf{E} \|\nabla_{\theta} Q(\theta, Z)\|_*^2 \leq L_{\Theta, Q}^2,$$

где $L_{\Theta, Q}$ — конечная постоянная, зависящая только от Θ и Q . Пусть V — прокси-функция на Θ с параметром $\alpha > 0$ из предложения (L), и пусть существует $\theta_F^* \in \text{Argmin}_{\theta \in \Theta} F(\theta)$. Тогда для любого целого $t \geq 1$ оценка ЗС $\hat{\theta}_t$, определенная формулами (7)–(10) со стохастическими субградиентами, сформированными в силу (3), удовлетворяет неравенству

$$(12) \quad \mathbf{E} F(\hat{\theta}_t) - \min_{\theta \in \Theta} F(\theta) \leq 2L_{\Theta, Q} (\alpha^{-1} \bar{V})^{1/2} \frac{\sqrt{t+1}}{t},$$

где $\bar{V} \geq V(\theta_F^*)$; так, если Θ — выпуклый компакт, то можно положить $\bar{V} = \max_{\theta \in \Theta} V(\theta)$.

4. Адаптивный АЗС и основной результат

В отличие от предыдущего алгоритма добавляется рекуррентный пересчет последовательности $\{\beta_i\}$, использующий на каждом шаге $\|\cdot\|_*$ -норму наблюдаемого субградиента:

$$(13) \quad \zeta_i = \zeta_{i-1} + u_i(\theta_{i-1}),$$

$$(14) \quad \theta_i = -\nabla W_{\beta_i}(\zeta_i),$$

$$(15) \quad \beta_i = \sqrt{\beta_{i-1}^2 + (\alpha \bar{V})^{-1} \|u_i(\theta_{i-1})\|_*^2},$$

$$(16) \quad \hat{\theta}_i = \hat{\theta}_{i-1} - \frac{1}{i}(\hat{\theta}_{i-1} - \theta_i), \quad i \geq 1.$$

Начальные значения $\zeta_0 = 0$ и $\theta_0 = -\nabla W_{\beta_0}(\zeta_0)$ выбираются теми же, что и в неадаптивном АЗС, а $\beta_0 > 0$ указывается ниже, в условиях теоремы 2.

Теорема 2. Пусть в условиях теоремы 1 выполняется более сильное предположение

$$(17) \quad \sup_{\theta \in \Theta} \|\nabla_{\theta} Q(\theta, Z)\|_* \leq L_{\Theta, Q} \quad \text{п.н.,}$$

а используется оценка $\hat{\theta}_t$, формируемая алгоритмом (13)–(16) со стохастическими субградиентами из (3), и $\beta_0 = L_{\Theta, Q} (2\alpha \bar{V})^{-1/2}$. Тогда для любого целого $t \geq 1$ выполняется неравенство

$$(18) \quad \begin{aligned} \mathbf{E} F(\hat{\theta}_t) - \min_{\theta \in \Theta} F(\theta) &\leq \\ &\leq \frac{1}{t} (2\alpha^{-1} \bar{V})^{1/2} \mathbf{E} \sqrt{L_{\Theta, Q}^2 + \sum_{i=1}^t \|u_i(\theta_{i-1})\|_*^2} \leq \\ (19) \quad &\leq L_{\Theta, Q} (2\alpha^{-1} \bar{V})^{1/2} \frac{\sqrt{t+1}}{t}, \end{aligned}$$

где $\bar{V} \geq V(\theta_F^*)$; если Θ — выпуклый компакт, то можно положить $\bar{V} = \max_{\theta \in \Theta} V(\theta)$.

Краткое доказательство. Сначала доказываем аналогичные утверждения из [9] (см. предложения 2 и 3 из § 4 в [9]); получаем, что для любого $t \geq 1$ выполняется

$$\mathbf{E} F(\hat{\theta}_t) - \min_{\theta \in \Theta} F(\theta) \leq \frac{\bar{V}}{t} \mathbf{E} \left(\beta_t + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t \frac{\|u_i(\theta_{i-1})\|_*^2}{\alpha \bar{V} \beta_{i-1}} \right).$$

Обозначим $c_i \doteq (\alpha \bar{V})^{-1} \|u_i(\theta_{i-1})\|_*^2 \leq (\alpha \bar{V})^{-1} L_{\Theta, Q}^2$ п.н., и в силу (15) имеем $\beta_t = \sqrt{\beta_0^2 + \sum_{i=1}^t c_i}$. Суммируя по

частям, получаем, с учетом не убывания последовательности $\{\beta_i\}$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^t \frac{\|u_i(\theta_{i-1})\|_*^2}{\alpha \bar{V} \beta_{i-1}} &= \sum_{i=1}^t \frac{c_i}{\beta_{i-1}} = \sum_{i=1}^t \frac{c_i}{\beta_i} + \\ &+ \sum_{i=1}^t c_i \left(\frac{1}{\beta_{i-1}} - \frac{1}{\beta_i} \right) \leq \sum_{k=1}^t \frac{c_k}{\sqrt{\beta_0^2 + \sum_{i=1}^k c_i}} + \frac{\sup c_k}{\beta_0} \leq \\ &\leq \int_0^{\sum_{i=1}^t c_i} \frac{dv}{\sqrt{\beta_0^2 + v}} + \frac{L_{\Theta, Q}^2}{\alpha \bar{V} \beta_0} = 2\beta_t - 2\beta_0 + \frac{L_{\Theta, Q}^2}{\alpha \bar{V} \beta_0}. \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку сверху, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} F(\hat{\theta}_t) - \min_{\theta \in \Theta} F(\theta) &\leq \frac{\bar{V}}{t} \mathbf{E} \left(2\beta_t - \beta_0 + \frac{L_{\Theta, Q}^2}{2\alpha \bar{V} \beta_0} \right) = \\ &= \frac{1}{t} (2\alpha^{-1} \bar{V})^{1/2} \mathbf{E} \sqrt{L_{\Theta, Q}^2 + \sum_{i=1}^t \|u_i(\theta_{i-1})\|_*^2} \leq \\ &\leq L_{\Theta, Q} (2\alpha^{-1} \bar{V})^{1/2} \frac{\sqrt{t+1}}{t}. \end{aligned}$$

В последних соотношениях использованы выражение доказываемой теоремы для β_0 и известная лемма Иенсена. Теорема доказана. ■

Пример (продолжение, начало в параграфе 2).

Пусть в задаче стохастической минимизации, описанной в параграфе 3, требуется минимизировать неизвестную функцию $F(\theta) = \mathbf{E} Q(\theta, Z)$, $\theta \in \Theta_N$, причем Θ_N — стандартный симплекс в R^N . Оракул выдает значения стохастического субградиента (3) в указанных точках. Тогда, применяя прокси-функцию энтропийного типа (1), исходную норму $\|\bullet\|_1$ и двойственную $\|\bullet\|_\infty$, получаем параметр сильной выпуклости $\alpha = 1$ и верхнюю грань $\bar{V} := \max_{\theta \in \Theta} V(\theta) = \ln N$. Следовательно, применение алгоритма ЗС (7)–(10) в условиях теоремы 1 с параметром $\beta_0 = L_{\Theta, Q} (\ln N)^{-1/2}$ приводит в (12) к неравенству

$$(20) \quad \mathbf{E} F(\hat{\theta}_t) - \min_{\theta \in \Theta} F(\theta) \leq 2L_{\Theta, Q} \sqrt{\ln N} \frac{\sqrt{t+1}}{t}, \quad t \geq 1,$$

а применение алгоритма АЗС (13)–(16) в условиях теоремы 2 с параметром $\beta_0 = L_{\Theta, Q} (2 \ln N)^{-1/2}$ приводит в (18)–(19) к неравенствам

$$(21) \quad \begin{aligned} \mathbf{E} F(\hat{\theta}_t) - \min_{\theta \in \Theta} F(\theta) &\leq \\ &\leq \frac{1}{t} \sqrt{2 \ln N} \mathbf{E} \sqrt{L_{\Theta, Q}^2 + \sum_{i=1}^t \|u_i(\theta_{i-1})\|_*^2} \leq \end{aligned}$$

$$(22) \quad \leq L_{\Theta, Q} \sqrt{2 \ln N} \frac{\sqrt{t+1}}{t}, \quad t \geq 1.$$

Таким образом, верхняя граница (22) меньше в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем (20). В случае, если в условии (17) константа Липшица $L_{\Theta, Q}$ несколько завышена для данной неизвестной функции $F(\cdot)$, то есть в реальности выполняется

$$(23) \quad \sup_{\theta \in \Theta} \|\nabla_{\theta} Q(\theta, Z)\|_* \leq \mu L_{\Theta, Q}$$

п.н. при некотором $\mu \in (0, 1)$, то (21) автоматически (то есть для того же алгоритма и с теми же параметрами) приводит к более точной верхней границе в (22):

$$(24) \quad \begin{aligned} \mathbf{E} F(\hat{\theta}_t) - \min_{\theta \in \Theta} F(\theta) &\leq \\ &\leq \frac{1}{t} \sqrt{2 \ln N} \mathbf{E} \sqrt{L_{\Theta, Q}^2 + \sum_{i=1}^t \|u_i(\theta_{i-1})\|_*^2} \leq \end{aligned}$$

$$(25) \quad \leq L_{\Theta, Q} \sqrt{2 \ln N} \frac{\sqrt{\mu^2 t + 1}}{t}, \quad t \geq 1.$$

Замечание. Видно, что верхние границы рассмотренных алгоритмов ЗС зависят от размерности N через логарифм. Применение стандартного метода градиента привело бы к полиномиальной зависимости от N . Это показывает расширение возможностей алгоритмов градиентного типа за счет использования метода ЗС при большой размерности.

5. Заключение

АЗС (13)–(16) отличается от алгоритма (7)–(10) тем, что последовательность $\{\beta_t\}$ в нем не определена априори, как в (7)–(10), а формируется в соответствии с рекуррентной формулой (15) при некотором начальном условии на β_0 ; для каждого алгоритма величина β_0 доставляет минимум верхней границы (19) или (12) соответственно. При этом верхняя граница (19) в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем граница (12).

Кроме того, видно, что если правая часть неравенства (17) сильно завышена, то правая часть первого неравенства (18) (т. е. адаптивная верхняя граница) будет соответственно меньше, чем это гарантирует правая часть второго неравенства в (18). Таким образом, адаптивный АЗС (13)–(16), гарантируя ту же верхнюю границу ошибки (2) на всем классе рассматриваемых задач оптимизации, обеспечивает улучшенную верхнюю границу еще и за счет адаптивности. Некоторой платой за эту адаптивность является более жесткое условие (17) по сравнению с (11).

Литература

1. *Немировский А. С., Юдин Д. Б.* Сложность задач и эффективность методов оптимизации — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. — 384 с.
2. *Beck A., Teboulle M.* Mirror descent and nonlinear projected subgradient methods for convex optimization // *Oper. Res. Lett.*, 2003. V. 31. No. 3. P. 167–175.
3. *Nesterov Yu.* Primal-dual subgradient methods for convex problems // *Mathematical Programming*, 2009. V. 120. No. 1. P. 221–259.
4. *Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A.* The Ordered Subsets Mirror Descent Optimization Method with Applications to Tomography // *SIAM J. Optim.* 2001. V. 12. No. 1. P. 79–108.
5. *Claire Tauvel.* Optimisation stochastique à grande échelle. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Décembre 2008.
6. *Nazin A., Polyak B.* Adaptive Randomized Algorithm for Finding Eigenvector of Stochastic Matrix with Application to PageRank // *Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*, Shanghai, P. R. China, December 16–18, 2009.
7. *Ben-Tal A., Nemirovski A. S.* The Conjugate Barrier Mirror Descent Method for Non-Smooth Convex Optimization, MINERVA Optim. Center Report., Haifa: Faculty of Industrial Engineering and Management, Technion — Israel Institute of Technology, 1999.
8. *Rockafellar R. T., Wets R. J. B.* Variational Analysis, New York: Springer, 1998.
9. *Юдицкий А. Б., Назин А. В., Цыбаков А. Б., Ваятис Н.* Рекуррентное агрегирование оценок методом зеркального спуска с усреднением // *Проблемы передачи информации*. 2005. № 4. С. 78–96.
10. *Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З.* Критериальные алгоритмы стохастической оптимизации // *АиТ*. 1984. № 6. С. 95–104.

Назин Александр Викторович. В.н.с. ИПУ РАН. Д.ф.-м.н., проф. Окончил в 1974 г. МФТИ. Количество печатных работ: более 110. Область научных интересов: идентификация и адаптивное управление, управление техническими системами, стохастические системы, статистическое оценивание и методы оптимизации. E-mail: nazine@ipu.ru