# Методы и модели системного анализа

## Минимизация стоимости проекта большой размерности при ограничении на его показатель надежности и линейных связях между переменными

В. В. Топка

**Аннотация.** В статье рассмотрена задача минимизации стоимости инновационного проекта при ограничениях на гарантированный показатель надежности детерминированного сетевого проекта с конъюнктивной логикой, в представлении работа — узел и директивный срок его выполнения. Дан теоретический вывод модели показателя надежности работы в виде 2-параметрического распределения Вейбулла, который подтвержден результатами статистического анализа. Для решения задачи большой размерности используется концепция релаксации — временного отбрасывания несущественных ограничений. В силу выпуклости задачи процедура релаксации сходится к решению задачи или показывает ее неразрешимость. Предложенная модель и метод ее решения могут быть использованы в библиотеке процедур разрабатываемой информационной системы планирования инновационных проектов.
**Ключевые слова**: *стоимость проекта, надежность работы проекта, надежность проекта, распределение Вейбулла, методы оптимизации.*

### Введение

Среди задач о минимизации стоимости проекта выделяются так называемые задачи «обмена времени на стоимость», т. е. [19, с. 137] когда для уменьшения времени продолжительности проекта при минимальном увеличении прямых затрат по проекту производится «покупка» времени вдоль критического пути(ей), там, где оно может быть получено по минимальной «цене». В [4] рассматривается задача минимизации стоимости проекта при заданном времени его завершения. Для каждого проекта заданы различные варианты выполнения, отличающиеся стоимостью и продолжительностью. Сокращение продолжительности работ, естественно, потребует увеличения затрат. Задача заключается в сокращении продолжительности работ таким образом, чтобы программа была реализована в требуемые сроки, а дополнительные затраты были минимальны. Предложенный в [6] метод дихотомического программирования в общем случае дает нижнюю оценку затрат, которая может быть использована в методе ветвей и границ решения исходной задачи. В [3] задача отыскания оптимального календарного плана выглядит в виде решения последовательности двух задач: 1) отыскания оптимальных продолжительностей $t_{ij}^*$ работ, минимизирующих стоимость проекта при заданной его продолжительности, 2) при заданных $t_{ij}^*$ найти оптимальное начало каждой работы, доставляющее минимум максимальному значению среди всех работ суммы удельных (ко времени) стоимостей работ. Идея решения состоит в выделении фрагментов сетевого графика и укрупнении данных задачи, и в дальнейшем использовании метода динамического программирования.

Для задачи «обмена времени на стоимость» в случае независимых операций, когда стоимостные характеристики являются невозрастающими дискретными функциями времени, в работе [19] предложена эвристическая процедура решения. Библиография по эвристическим методам оптимизации сетей по стоимости приведена в работах [8, 15]. В [19] дано сведение задачи к задаче линейного программирования, в [8] приведен алгоритм для построения оптимального безрезервного плана, менее громоздкий, чем алгоритм симплекс-метода, приведен алгоритм для решения двойственной задачи. Метод сетевого потока рассмотрен в работах [8, 11]. В статье [47] рассматривается календарное планирование стоимости проекта с «обменом времени на стоимость». Три модели, использующие традиционные назначения типов переменных, протестированы новой моделью целочисленного программирования. Эмпирические тесты показывают, что во многих случаях новая формализация дает наилучший результат и может решать задачи с количеством — до 90 работ за приемлемое время. Это обусловлено редуцированным количеством двоичных переменных, более компактной релаксацией в задачах линейного программирования, экономной и встроенной сетевой структурой матрицы ограничений в новой модели.

Задача минимизации стоимости при линейной непрерывной зависимости стоимости от времени была рассмотрена в [42], где предложен метод сведения двойственной задачи линейного параметрического программирования к задаче о максимальном потоке. Двойственный метод, основанный на структуре двойственной задачи и условиях дополняющей нежесткости задач линейного программирования, предложен в [39] и описан в книге [31]. Оба эти алгоритма одними из первых были основаны на методе критического пути. Метод критического пути используется также и в работе [9], примененный к предварительно построенному с помощью предложенного авторами алгоритма построения графа допустимых состояний комплекса операций.

Есть много факторов, которые являются источником неопределенности в проекте, что оказывает негативное влияние на продолжительность и стоимость работ. Поэтому важно разработать эффективный подход, для генерации робастных расписаний проекта, которые будут менее уязвимы к срывам из-за неконтролируемых факторов. В статье [40] предлагается двухэтапный робастный алгоритм составления расписания в качестве суррогатных мер, цель которых — обеспечение точной оценки робастности расписания. Данный подход может быть распространен для решения сложных робастных задач с тормозящими штрафами и своевременными доходами. В отличие от предыдущих результатов по «обмену времени на стоимость» в [35] разработана функция принадлежности нечеткого минимума общей затраченной стоимости, которая сконструирована на принципе расширения Заде и нечетких решениях. Такая модель сводится к паре задач математического программирования, чтобы получить оптимальные продолжительности работ. Предложенный подход на основе нечетких переменных позволяет получить приемлемое решение, подходящее для всех диапазонов — от пессимистического до оптимистического случая и обеспечивает большой объем информации для принятия решений по управлению проектами.

Сетевая задача оптимизации по стоимости с непрерывными строго выпуклыми дважды дифференцируемыми функциями стоимости рассмотрена в [34, 23]. В первой — предложен итеративный алгоритм просмотра всех (за исключением единственных начальной и конечной) вершин сети, в котором время, соответствующее данной вершине, находится из условия сохранения потока, а во второй — предлагается осуществить просмотр вершин сети в порядке монотонного изменения их ранга, при этом показано, что данная модификация алгоритма сходится не медленнее геометрической прогрессии со знаменателем меньше единицы.

В [12] предложена имитационная модель календарного планирования работ по критерию времени (минимаксная и взвешенная линейная критериальная функция) при заданных технологических и ресурсных ограничениях, которая позволяет решать методом статистических испытаний в режиме диалога задачи календарного планирования большой ($10^6$ операций) размерности. Задача о минимизации затрат на выполнение всех работ, сформулированная как задача параметрического программирования, приведена в [16]. Алгоритм ее решения состоит из конечного числа итераций, на каждой из которых решается задача о циркуляции минимальной стоимости. В [38] исходная модель была расширена путем введения крайних сроков для некоторых событий — «вех», и разработки модификации для используемого «в беспорядке» (out-of-kilter)-алгоритма [39]. В [43] рассмотрена задача календарного планирования «точно в срок», в которой путем выбора продолжительностей работ и времен осуществления событий находится минимальная общая стоимость проекта при сетевых ограничениях предшествования работ и двусторонних ограничениях на продолжительность их выполнения. Для решения данной задачи с кусочно-линейной, выпуклой (возможно, немонотонной) целевой функцией продолжительностей работ, а также времен начала/окончания работ предложена модификация, «в беспорядке» — алгоритма [39], имеющая псевдолинейную сложность. Отметим также работу [18], в которой рассмотрена задача определения объемов работ, заданных сетевой моделью, и предложен способ ее решения, основанный на методе линейного программирования. В [46] предложен новый алгоритм, представляющий собой гибридный метод, где начальное решение находится эвристически. Рассматриваемые *RCPSP* (Resource-Constrained Project Scheduling Problem) — задачи календарного планирования с ограниченными ресурсами решаются методом ветвей и границ, в которых ресурсы задачи *RACP* (Resource Availability Cost Problem) — стоимости наличных ресурсов — фиксированы. Знание ранее решенных *RCPSP* используется для того, чтобы произвести отсечения в дереве поиска. Установлена теорема выполнимости алгоритма. Данный алгоритм может быть использован для любой задачи минимизации стоимости наличных ресурсов, если есть поддерживающая задача с ограниченными ресурсами.

Приведенные алгоритмы предназначены для задач, имеющих детерминированную структуру сетевой модели, задающей технологические отношения непосредственного предшествования работ: для входящих работ реализована конъюнктивная логика (операция AND), выход — детерминированный, т. е. такую структуру, как и в моделях типа *PERT*. А сетевой проект изображался в пространстве переменных «продолжительность—стоимость».

Однако вышеизложенные работы никак не учитывают присущую планированию инновационных проектов неопределенность достигаемых при этом результатов. В [33] говорится, что: «В практике нередки случаи, когда запланированные затраты производства, трудовые и материальные ресурсы использованы, сроки истекли, а изделия с заданными техническими характеристиками так и не получены». Это связано с тем обстоятельством, что процессы создания образцов новой техники в значительной мере носят вероятностный характер как в смысле оценки времени завершения разработки, так и в части достижения заданных тактико-технических характеристик. Существуют различные методики для учета имеющейся при выполнении инновационных проектов неопределенности — это методы анализа и оценки риска [21, 25]. Среди них подходы на основе нечетких множеств [24], реальных опционов [41].

В имеющихся на рынке информационных системах управления проектами неопределенность параметров проекта учитывается посредством таких характеристик, как количественная оценка риска расписания (Risk of Schedule) и риска стоимости (Risk of Cost), которая производится на основе моделирования методом Монте-Карло. Для анализа параметра риска выполнения (Risk of Performance) работ и всего проекта, для которого аппарат его анализа не разработан, будем исходить из учета показателя надежности работ и проекта. Для этого разрабатывается сравнительно новый подход [27, 28] на основе понятий теории надежности технических систем [10, 30], в котором сетевой проект рассматривается как сложная техническая система, а для оценки неопределенности в выполнении работы применяется кумулятивная вероятность технического успеха работы — вероятность безотказной работы. Вероятность выполнения работы к некоторому времени характеризует возможность достижения определенных технических показателей результата работы при условии, что предшествующие работы, обеспечивающие ее начало, выполнены. Указанную вероятность безотказного исполнения при выполнении работ проекта примем за показатель их надежности.

## 1. Модель показателя надежности работы

В статье [37] изложены результаты вычислительного эксперимента по имитационному моделированию некоторого иллюстративного проекта. В ней дают 3 оценки для стоимости работы: наиболее вероятная, пессимистическая и оптимистическая, и выбирают распределение вероятностей: треугольное, Эрланга или их комбинацию. Генерируется случайное число от 0 до 1 и выбирают случайное значение стоимости каждой отдельной работы. Вычисляется значение суммарной стоимости. Процедуру повторяют 500 раз и получают относительную частоту появления соответствующей суммарной стоимости проекта, после чего строится кумулянта полученного распределения $p = p(U)$, *в* которой $p(u) = \Pr\left[U \le u\right]$ — вероятность того, что стоимость проекта не превзойдет величины $u$ (рис. 1).

Согласно центральной предельной теореме, если очень большое число взаимно независимых событий удовлетворяет условию Ляпунова (т. е. вклад каждого события ничтожно мал), то распределение их суммы близко к нормальному закону. При моделировании стоимости проекта, состоящего из некоторого ограниченного числа работ, по методу Монте-Карло, соблюдался последовательный принцип, согласно которому учитывались взаимные связи между событиями и взаимные риски [44]. Результаты статистического анализа результатов проведенного вычислительного эксперимента представлены на рисунках и в таблицах.

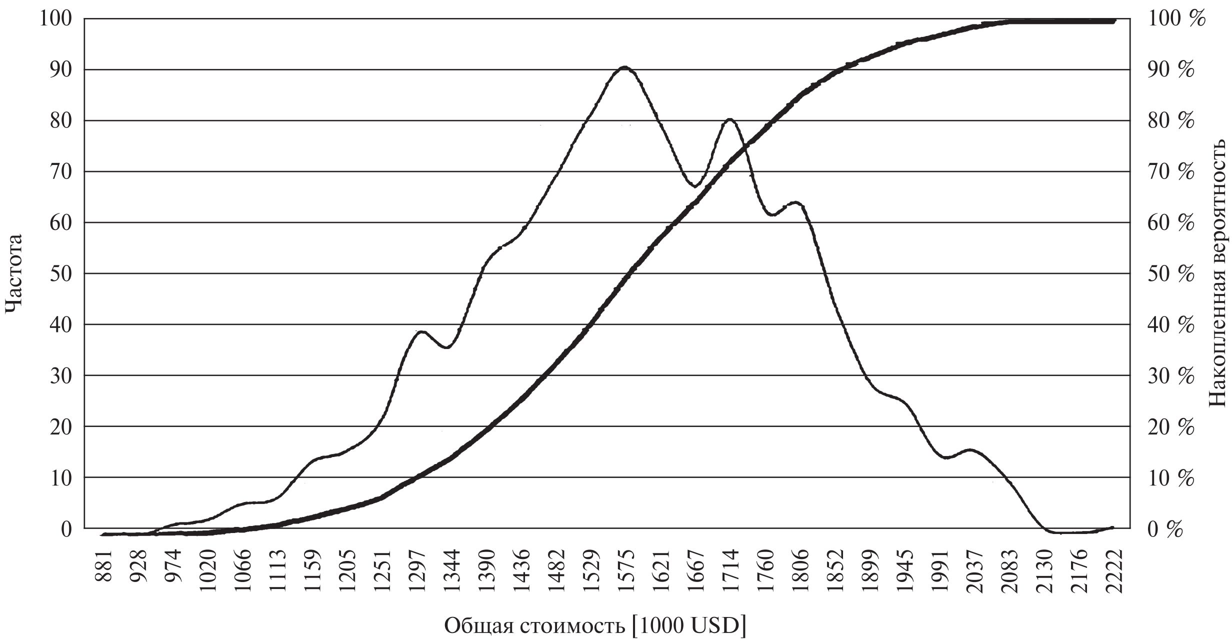


**Рис. 1.** Имитационное моделирование кумулятивной вероятности технического успеха работы

Прямая (*Probability Line*) теоретической функции нормального распределения
и точки экспериментальных данных (*Data Points*) на вероятностной бумаге нормальной

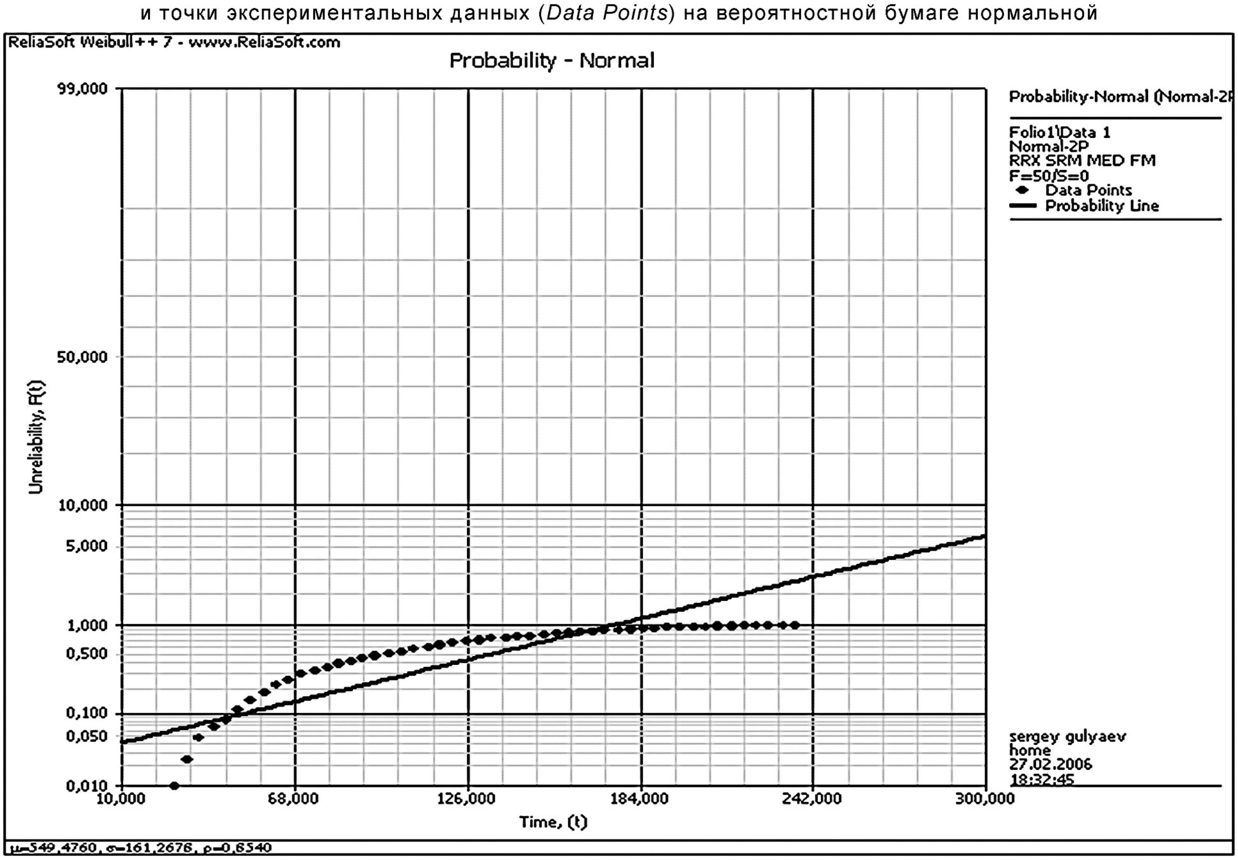


**Рис. 2.** Аппроксимация результатов вычислительного эксперимента функцией распределения нормальной случайной величины (Пакет WEIBULL ++7)

Для полученного результирующего кумулятивного распределения вероятности (*Data Points*) сравнение с функцией распределения нормальной случайной величины (*Probability Line*) представлено на рис. 2, а корреляция с функцией распределения нормальной случайной величины, полученная при помощи прикладного пакета STATISTICA v.6.0, была на уровне 0.98.

Подход, лежащий в основе изображения представленных на рис. 2 графиков, пригоден и для вероятностных распределений, являющихся обобщением нормального распределения. Пример такого обобщения — это класс распределений Кэптейна [Kapteyn]:

Пусть $\boldsymbol{x}$ есть случайная величина и $\boldsymbol{y} = G(\boldsymbol{x})$ — функция, для которой $-\infty < y < \infty$, $a \le x \le b$ $(-\infty \le a,\ b \le \infty)$ и $G^{/}(x) \le 0$ или $G^{/}(x) \ge 0$ для всех $x$ в области определения. Предположим, что величина $\boldsymbol{y}$ распределена нормально, тогда величина $\boldsymbol{x}$ имеет распределение

$$\mathrm{d}\Phi_x(t) = \mathrm{d}\Psi\left[\frac{\mathrm{G(t)}-\mu}{\sigma}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left[-\frac{\left(\mathrm{G(t)}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right]\left|\frac{\mathrm{G(t)}}{\mathrm{dt}}\right|\mathrm{dt},$$

$$\mathrm{M}\{G(x)\} = \mu,\ \sigma^2\{G(x)\} = \sigma^2.$$

Если $G(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, то приведенное распределение сводится к обычному нормальному распределению.

Для таких распределений существует простой метод сравнения экспериментальных данных с теорией. Поскольку $u = \Psi(t)$ есть функция, всюду возрастающая при $-\infty < t < \infty$, то можно определить $t$ как функцию от $u$. $t = \Psi^{-1}(u)$. Значения этой функции протабулированы в статистических таблицах. Для нормального распределения общего вида $u = \Psi\big((t-\mu)/\sigma\big)$ получим $(t-\mu)/\sigma = \Psi^{-1}(u)$. Подставляя сюда $u = \Psi(v_1)$, получим функцию

$$\frac{t-\mu}{\sigma} = \Psi^{-1}\left[\Psi(v_1)\right],\ \text{равную}\ v_1 = \frac{t-\mu}{\sigma}.$$

Если, далее, образовать $v_2 = \Psi^{-1}\left[F(t)\right]$, где $F(t) = N(t)/n$, а $N(t)$ есть число наблюдений, результаты которых суть числа, не превосходящие $t$. $F(t)$ называется также накопленной гистограммой, эмпирической или наблюденной функцией распределения. Для функции $v_2$ можно ожидать, что она будет очень близка к прямой $v_1 = (t-\mu)/\sigma$, проходящей через точку $(\mu,\ 0)$ и имеющей наклон $1/\sigma$. Изложенный метод [1, с. 140], который можно назвать методом выпрямленной диаграммы, удобен на практике. Для того чтобы осуществлять указанное преобразование графически, существует так называемая вероятностная бумага нормальная, на которой изображены графики на рис. 2 и где график функции нормального распределения изображается прямой линией. На свойстве «выпрямления» основан простой способ проверки гипотезы о принадлежности данной выборки к нормальной совокупности: если построенная на вероятностной бумаге эмпирическая функция распределения хорошо приближается прямой линией, то можно с основанием полагать, что совокупность, из которой взята выборка, является приближенно нормальной. Поскольку нормальное распределение протабулировано лишь для значений $\mu = 0$ и $\sigma = 1$, описанный метод значительно сокращает вычисления.

Сравнение экспериментальных данных (*Adj Points*) с 2-параметрическим распределением Вейбулла (*Adjusted Line*) представлено на рис. 3, а прикладной пакет STATISTICA v.6.0 показал корреляцию результирующего кумулятивного распределения вероятности с 2-параметрическим распределением Вейбулла на уровне 1.00.

Параметры ожидаемой функции распределения нормальной случайной величины (пакет STATISTICA v.6.0)

Показатели ожидаемого нормального распределения. Оценки максимального правдоподобия для нормального распределения и матрица корреляций. Отмеченные корреляции значимы при p < 0,05000 N = 50

| | **Наблюдаемое кумулятивное распределение** | **Ожидаемое кумулятивное распределение** | **Наблюдаемое среднее** | **Наблюдаемая дисперсия** |
|---|---|---|---|---|
| Наблюдаемое кумулятивное распределение | 1.00 | 0.98 | 0.28842 | 7.44967 |
| Ожидаемое кумулятивное распределение | 0.98 | 1.00 | | |

Оценку параметров распределения Вейбулла можно выполнить, например, методом наименьших квадратов [20]. Для этого, если два раза прологарифмировать плотность распределения Вейбулла

$$f(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}\right],$$

то получим линейную зависимость. Этот метод позволяет находить параметры распределения Вейбулла

Прямая теоретического распределения Вейбулла (*Adjusted Line*),
к которой подгоняются экспериментальные данные (*Adj Points*) на вероятностной бумаге Вейбулла

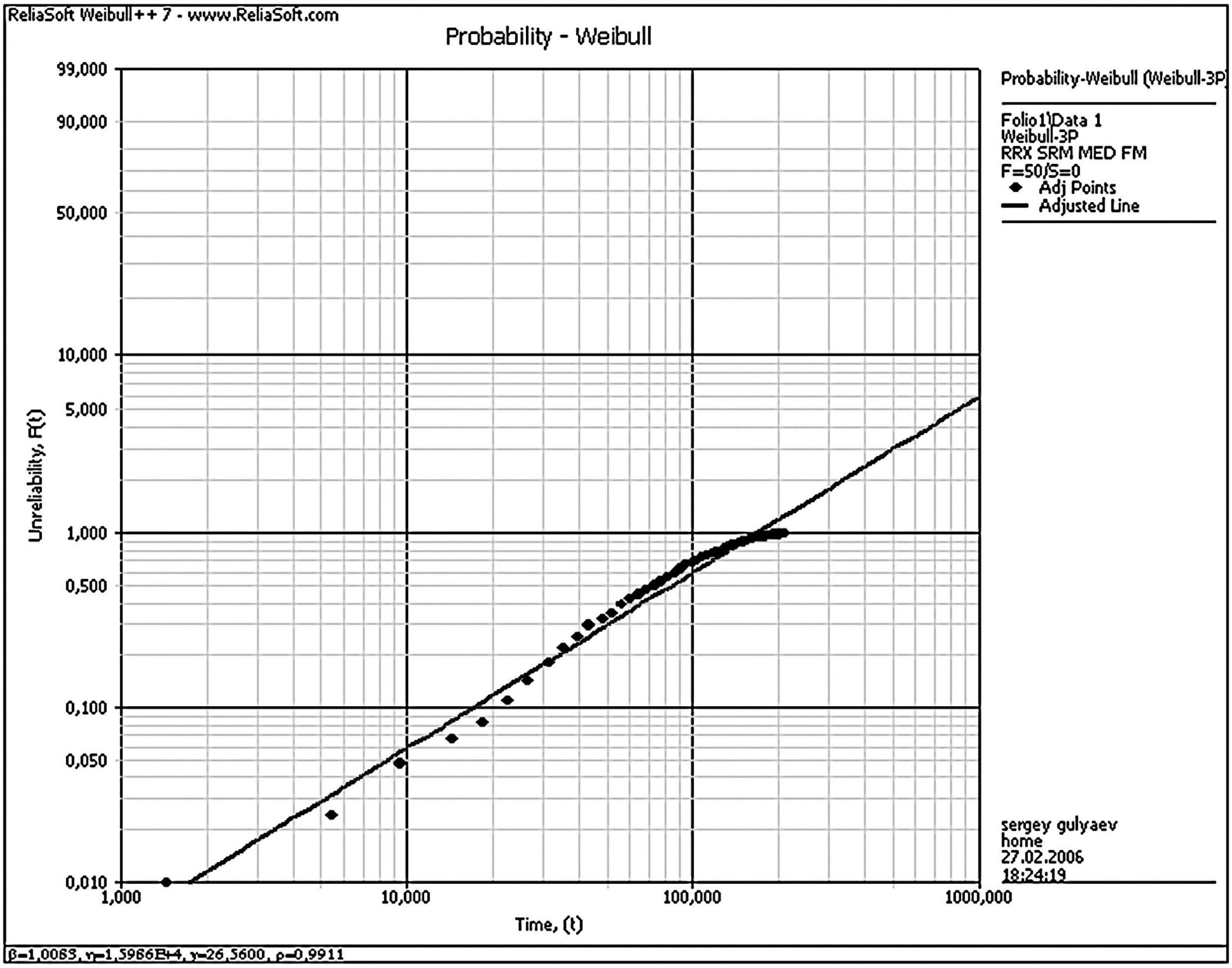


**Рис. 3.** Аппроксимация результатов вычислительного эксперимента распределением Вейбулла. (Пакет WEIBULL ++7)

непосредственно по статистической гистограмме, не затрачивая время на вычисление его параметров по выборке. В основе графического метода лежит графическая линеаризация функции распределения Вейбулла путем введения логарифмической шкалы аргумента и двойной логарифмической шкалы функции:

$$\ln\ln\frac{1}{F(x_i)} = \alpha\ln x_i - \alpha\ln\beta, \text{ где } F(x_i) = \frac{1}{n+1},$$

$n$ — число разбиений выборочной гистограммы. Угловой коэффициент такой прямой является оценкой $\hat{\alpha}$ .

Такая же картина наблюдается при статистическом анализе гистограмм из [36] и графиков распределения кумулятивной вероятности успеха проекта из [45].

Оценки максимального правдоподобия для параметров 2-параметрического распределения Вейбулла (пакет STATISTICA v.6.0)

| | | (Вейбулла) Var1; Цензурирование: нет N = 50 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Параметры** | **Значение параметра** | **Асимптотическая стандартная ошибка** | **−95.0 % Нижний контрольный предел** | **95.0 % Верхний контрольный предел** | **Ковариация форма / масштаб** |
| Расположение | 0.000000 | | | | |
| Форма | 1.753901 | 0.221217 | 1.369759 | 2.245772 | |
| Масштаб | 0.684576 | 0.057088 | 0.581351 | 0.80630 | 0.003222 |

Крупную работу всегда можно представить состоящей из некоторого числа более мелких, элементарных работ, поэтому используя метод аналогий, Корреляции для распределения Вейбулла. Отмеченные корреляции значимы при p < 0,05000 N = 50 (несопоставимое удаление пропущенных данных)

| | **Матрица корреляций** | |
|---|---|---|
| | **Наблюдаемое кумулятивное распределение** | **Ожидаемое кумулятивное распределение** |
| Наблюдаемое кумулятивное распределение | 1.00 | 1.00 |
| Ожидаемое кумулятивное распределение | 1.00 | 1.00 |

будем предполагать, что как ведет себя рассматриваемый показатель «в большом» — на уровне проекта, такими же (свойство масштабируемости) характеристиками он обладает и в «малом» — на уровне отдельной работы проекта.

Сформулируем модель надежности работы проекта, которая обобщает модель Рэлея из [26, 48]. Отношение изменения вероятности технического успеха работы к изменению прямых затрат невозобновимого (складируемого) ресурса к некоторому конечному моменту времени $T$ пропорционально объему этого ресурса с некоторым ненулевым показателем степени и разности между максимально достижимой для данной работы вероятностью и достигнутой при текущем уровне расхода ресурса:

$$\frac{dp}{du} = b\alpha u^{\alpha-1}\left[\overline{p} - p(u)\right].$$

Решаем данное линейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\alpha,\ b > 0,\quad \alpha \neq 1,\ \ p(0) = 0\,,$$

$$\int \frac{dp}{\overline{p} - p(u)} = \int b\alpha u^{\alpha-1}\mathrm{d}u\,,$$

$$\text{-}\ln\left[\overline{p} - p(u)\right] = bu^{\alpha} + C\ .$$

Чтобы не загромождать модель, положим максимально достижимую вероятность $\overline{p} = 1$ и тогда получим 2-параметрическое распределение Вейбулла

$$p(u) = 1 - exp(-bu^{\alpha}), \qquad (1)$$

где $\alpha$ — параметр формы, $b$ — параметр масштаба.

В англоязычной литературе (*IEEE Transactions on EM*) подобная функция служит как *Subjective Probability of Technical Success*, в [22] — это степень достижения цели операции, в [5] — *Physical %Complete.* Можно также говорить о ней как о технической надежности $p(u) = \overline{p}\cdot[1 - exp(-bu^{\alpha})]$ — произведении собственной и эксплуатационной надежностей.

В системе MS Project 2003 [5], например, при отслеживании реализации календарного плана проекта или его бюджета учитываются такие показатели, как процент выполнения, фактическая длительность задачи, фактические трудозатраты или повременные трудозатраты. С помощью панели инструментов редактируются значения в специальных полях *% Complete* (по длительности), *% Work Complete* (по трудозатратам), а когда важно опираться на реальные данные, то используется поле *Physical% Complete.* Последний показатель также используется для определения приобретенной стоимости или освоенного объема (*Earned Value*) − запланированной по базовому плану стоимости фактически выполненных работ (*Budgeted Cost of Work Performed*).

При решении задач по планированию комплекса работ не будем учитывать зависимости вероятности и расходования невозобновимого ресурса от времени. При построении математической модели с использованием понятия надежности элемента, работающего до первого отказа, нужно остановиться на какой-нибудь характеристике надежности, чтобы получить полезный для практики количественный результат. Можно попытаться построить эмпирическую функцию надежности, либо построить модель надежности проекта исходя из среднего времени безотказной работы, или взять дисперсию времени жизни, или остановиться на такой характеристике, как опасность отказа, либо взять время жизни элемента. В [10, с. 90] говорится: «Наряду с ней и не менее часто употребляется и другая функция — вероятность безотказной работы элемента». Вероятность успеха работы — это вероятность того, что в процессе осуществления проекта при выполнении данной работы не произойдет отказ, а вероятность безотказного выполнения работы примем за показатель надежности ее выполнения. Поэтому будем просто говорить о $p(u)$ (1) как о показателе надежности работы.

В большинстве практических случаев зависимость прямых затрат невозобновимого ресурса на выполнение работы сетевого комплекса от времени на ее осуществление имеет вид выпуклой (вниз) функции (см. рис. 4 [14, с. 29]).

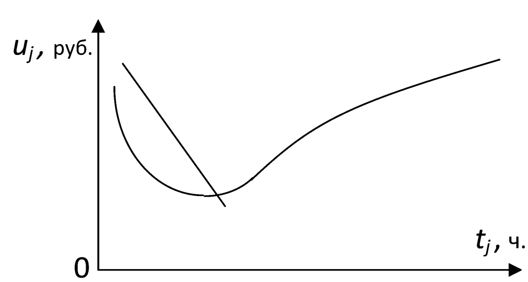


**Рис. 4.** Зависимость прямых затрат невозобновимого ресурса на работу, (под)проект от времени его выполнения [22, с. 29]

Чтобы выполнить работу быстрее — это дороже обойдется, а затем с увеличением продолжительности — затраты уменьшаются, достигая критического значения, после чего наблюдается рост затрат. Поскольку имеющаяся информация не обладает достаточной точностью, становится оправданным использование в рабочей области изменения аргумента, ближе к началу координат, линейной аппроксимации реальной зависимости прямых затрат невозобновимого ресурса от продолжительности работы. Эта задача представляется достаточно сложной и нуждается в дальнейшем исследовании. В статье принимаем простейшую линейную гипотезу, которая в ряде случаев достаточно хорошо описывает реальную ситуацию.

Итак, для зависимости прямых затрат ресурса на работу от ее продолжительности выбирается достаточно апробированная [31] линейная аппроксимация

$$s_j u_j = -r_j t_j + h_j, \tag{2}$$

где $t_j > 0$ — время, $u_j > 0$ — невозобновимый (складируемый) ресурс; $s_j, r_j \in R^1_+$; $h_j \in R^1$ — параметры линейной аппроксимации; $s_j$ — «цена» за единицу ресурса $u_j$, $r_j$ — «цена» за единицу времени $t_j$. Эти параметры вводятся еще и для того, чтобы левая и правая части (2) выражались в одних единицах измерения.

Предлагаемый в статье подход направлен на разработку формальных количественных методов не только оценки, но и оптимизации параметров проекта с учетом показателя надежности.

## 2. Оценка показателя надежности проекта

Пусть задан ациклический ориентированный граф $G(E, \Gamma)$, где $E$ − множество вершин, соответствующих работам проекта (представление *Activity-on-Node*), а $\Gamma \subseteq E \times E$ — множество дуг, задающих отношения частичного порядка непосредственного технологического предшествования работ. Сеть $G(E, \Gamma)$ имеет одну конечную и несколько начальных вершин; $n$ — конечная вершина — последний номер среди всех вершин. Путь на сети содержит некоторое подмножество из всех вершин, так что первая вершина пути не имеет предшествующих, а последняя не имеет последующих.

Обозначим через $\mu_i$ — путь с № $i = 1, ..., m$ на сети из начальных вершин в конечную вершину $n$, а через $\mu^j$ — путь из начальных вершин в некоторую (не конечную) вершину $j \in E \setminus n$ сети.

Введем индикаторную функцию работ $j = 1, ..., n$ сетевого проекта $G(E, \Gamma)$

$$x(j) = \begin{cases} 1, \text{ если работа } j \text{ выполнена}, \\ 0, \text{ если работа } j \text{ не выполнена}, \end{cases}$$

и индикаторную функцию технологической цепочки (пути) $\mu^j$ из начальных вершин v, таких что множество предшествующих вершин пусто — $\Gamma_v^{-1} = \varnothing$, в конечную вершину $j \neq n$ цепочки, соответствующую выполнению $\mu^j$:

$$x\left(\mu^j\right) = \begin{cases} 1, \text{ если последовательность} \\ \quad \text{работ } \mu^j \text{ выполнена}, \\ 0, \text{ если последовательность} \\ \quad \text{работ } \mu^j \text{ не выполнена}. \end{cases}$$

Для детерминированной сетевой модели с конъюнктивной логикой AND по формуле полной вероятности вероятность выполнения $i$-й работы, когда $j, \ldots, k$ — ее технологические предшественники, $j \in \Gamma_i^{-1}, ..., k \in \Gamma_i^{-1}$, будет:

$$\begin{aligned} P_i = {} & p\left(x(i) = 1 \middle| x\left(\mu^j\right) \wedge ... \wedge x\left(\mu^k\right) = 1\right) \cdot \\ & \cdot P\left(x\left(\mu^j\right) \wedge ... \wedge x\left(\mu^k\right) = 1\right) + \\ & + p\left(x(i) = 1 \middle| x\left(\mu^j\right) \wedge ... \wedge x\left(\mu^k\right) = 0\right) \cdot \\ & \cdot P\left(x\left(\mu^j\right) \wedge ... \wedge x\left(\mu^k\right) = 0\right), \end{aligned}$$

где $P_i$ — вероятность события, состоящего в безотказном выполнении работы $i$. Поскольку в данном случае для выполнения работы необходимо выполнение всех предшествующих ей работ, то второе слагаемое равно нулю. В случае, если пути $\mu^j, ..., \mu^k$ независимы, то

$$\begin{aligned} & P\left(x\left(\mu^j\right) \wedge ... \wedge x\left(\mu^k\right) = 1\right) = \\ & = P\left(x\left(\mu^j\right) = 1\right) \cdots P\left(x\left(\mu^k\right) = 1\right) \end{aligned}$$

и тогда

$$P_i = p_i P\left(\mu^j\right) \cdots P\left(\mu^k\right),$$

где $p_i$ — условная вероятность

$$p_i = p\left(x(i) = 1 \middle| x\left(\mu^j\right) \wedge ... \wedge x\left(\mu^k\right) = 1\right)$$
$$j \in \Gamma_i^{-1}, ..., k \in \Gamma_i^{-1}, \tag{3}$$

$P\left(\mu^k\right)$ — вероятность события, состоящего в безотказном выполнении последовательности работ $\mu^k$.

В телекоммуникационных, транспортных, энергетических и некоторых других технических системах вида двухполюсника с сетевой структурой их надежность (вероятность связности) обеспечивается за счет работоспособности (хотя бы одного) из составляющих минимальных путей. Для анализа их надежности применяется метод минимальных путей и минимальных сечений, различные граничные оценки надежности [30]. В сетевой модели детерминированного проекта с конъюнктивной логикой AND для его надежного выполнения (безотказной работы) необходимо выполнение всех входящих элементов — работ.

Если технологические цепочки, скажем, $\mu^j$ и $\mu^k$ не являются независимыми, значит,

$$\exists s \in E : s \in \mu^j \cap \mu^k,$$

а в этом случае отказ работы $s$ $\left(x(s)=0\right)$ приводит к ухудшению показателей $x\left(\mu^j\right)$ и $x\left(\mu^k\right)$ одновременно, а это означает, что данные величины положительно коррелированны:

$$\operatorname{cov}\left(x\left(\mu^j\right), x\left(\mu^k\right)\right) > 0.$$

В этом случае для произвольных $j \in \Gamma_i^{-1}$ и $k \in \Gamma_i^{-1}$, для которых технологические цепочки $\mu^j$ и $\mu^k$ не являются независимыми, выполняется неравенство:

$$P\left(x\left(\mu^j\right) \wedge x\left(\mu^k\right)=1\right) > P\left(x\left(\mu^j\right)=1\right) \cdot P\left(x\left(\mu^k\right)=1\right).$$

В любом случае как для независимых, так и для положительно коррелированных технологических цепочек при произвольной детерминированной структуре сети $G(E, \Gamma)$ с конъюнктивной логикой AND выполняется неравенство:

$$P_i \geq p_i P\left(\mu^j\right) \cdots P\left(\mu^k\right), \quad (j, \ldots, k) \in \Gamma_i^{-1}.$$

Если раскрывать это выражение дальше для получения вероятности $P_n$ безотказного выполнения всего комплекса работ, то в произведение вероятностей войдут все вершины $j = 1, \ldots, n$, а отдельные условные вероятности $p_s$, входящие в дальнейшее разложение по вершинам указанного выражения для отличающихся цепочек, имеющих хотя бы одну общую вершину $s \in \mu^j \cap \mu^k$, входящую для выполнения работ в некоторые отличающиеся цепочки $\mu^j$ и $\mu^k$, $j \neq k$, $j, k \in E$ могут встречаться более одного раза:

$$P_i = p_i \cdot P\left(\mu^{i_j}\right) \cdots P\left(\mu^{i_k}\right) \geq p_i p\left(x(j)=\right.$$
$$\left.=1 \middle| x\left(\mu^{j_s}\right) \wedge \ldots \wedge x\left(\mu^{j_t}\right)=1\right) \cdot P\left(\mu^{j_s}\right) \cdots P\left(\mu^{j_t}\right)$$
$$\cdots p\left(x(k)=1 \middle| x\left(\mu^{k_v}\right) \wedge \ldots\right.$$
$$\left.\wedge x\left(\mu^{k_w}\right)=1\right) \cdot P\left(\mu^{k_v}\right) \cdots P\left(\mu^{k_w}\right) \geq \ldots,$$
$$j, \ldots, k \in \Gamma_i^{-1}, \quad s, \ldots, t \in \Gamma_j^{-1}, \quad v, \ldots, w \in \Gamma_k^{-1}.$$

В таком разложении примут участие все дуги сети и, тем самым, будет реализовано все множество путей, проход по которым будет осуществляться от конечной вершины $n$ до каждой отдельной вершины $j$ и, в конечном итоге, до исходных начальных вершин. В этом разложении некоторые вершины из конечного множества вершин $E$ могут совпадать: $j_s = k_{v,} = r$, т. е. встречаться столько раз $d_r$, сколько имеется различных путей на графе $G(E, \Gamma)$ из конечной вершины $n$ по ориентированным дугам в обратном направлении в данную вершину $r \in E$. Таким образом, в разложение для детерминированной сети с конъюнктивной логикой (AND) войдут все вершины $r = 1{:}\ n$, каждая в количестве $d_r$ раз.

Будем называть сеть $G(E, \Gamma)$ правильно занумерованной, если

$$j \underset{\Gamma}{\prec} k \Rightarrow j < k.$$

Тогда все такие вершины $k$ в строках матрицы путей (по вершинам) будут находиться справа от столбца $j$. Рассмотрим строки, в которых на $j$-том месте стоит 1. Количество различных «хвостов» (подмножеств строки) от столбца $j$ до $n$, которое нетрудно сосчитать, соответствует числу путей из $j$-той вершины в конечную $n$, т. е. параметру $d_r = 1, 2, \ldots$ $r = 1{:}\ n$. Поэтому будем считать этот параметр $d_r$ известным для данной правильно занумерованной сети $G(E, \Gamma)$. Тогда для вероятности безотказного выполнения (показателя надежности) всего комплекса работ получим в случае конъюнктивных входящих дуг гарантированную оценку снизу показателя надежности проекта:

$$P_n \geq \prod_{j=1}^{n} p_j^{d_j} \geq P, \tag{4}$$

где $P \in [\varepsilon, 1\text{-}\varepsilon]$, $\varepsilon \to +0$ — заданное ограничение, $d_j = 1, 2, \ldots$ некоторые известные величины.

В модели для представления сетевых ограничений будем использовать в качестве характеристической функции системы ограничений матрицу путей (по вершинам) сети (ациклического ориентированного графа) $G$ $(E, \Gamma)$: $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right)$, $\left(j \in \mu_i\right)$. В сетевой модели проекта $G(E, \Gamma)$, где $E$ — множество вершин, соответствующих работам, а $\Gamma \subseteq E \times E$ — множество дуг, задающих технологические отношения частичного порядка непосредственного предшествования работ, каждый путь $\mu_i = (v, ..., j, k, ..., n)$ из начальных вершин *v*, таких что $\Gamma_v^{-1} = \varnothing$, в конечную *n* однозначно представляется строкой

$$\mu_i = \left\{a_{i1},\ a_{i2}, ...,\ a_{ij},\ a_{ik}, ...,\ a_{in}\ \right\},$$

$$(j, k) \in E\ ,\ i = 1{:}m, j = 1{:}n$$

специально построенной матрицы путей $A = \left(a_{ij}\right)$, в которой ее элементы — единицы стоят в *i*-й строке на *j*-м месте только в том случае, когда *j*-я вершина принадлежит *i*-му пути: $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow j \in \mu_i$. Всем остальным случаям, когда $j \notin \mu_i$ соответствуют пустые клетки.

Рассматриваемая задача — это задача планирования невозобновимых ресурсов для выполнения работ проекта с учетом показателя его надежности, а не управления динамикой его реализации, когда есть фронт работ, выполненных и ожидающих выполнения работы. Эти вопросы рассматриваются в рамках задач по управлению ходом реализации проекта — задач составления расписания работ проекта при ограничениях на ресурсы — возобновимые и/или невозобновимые.

## 3. Минимизация стоимости проекта большой размерности методом релаксации ограничений

Рассмотрим ациклический ориентированный граф *G*(*E, Γ*), в вершинах которого задана функция вероятности технического успеха разработки (показатель надежности работы проекта) (1), удовлетворяющая соотношению (4) (показатель надежности проекта).

Формализованная постановка задачи планирования стоимости инновационного проекта большой размерности при временных и надежностных ограничениях и линейных соотношениях между переменными имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j u_j \to \inf_{(u,t)\in U_1},$$

$$\prod_{j=1}^{n} \left[1 - \exp\left(-b_j u_j^{\alpha_j}\right)\right]^{d_j} \geq P,$$

$$\sum_{j\in\mu_i} a_{ij} t_j \leq T, \quad i = 1:m,$$

$$s_j u_j = -r_j t_j + h_j, \quad j = 1:n,$$

где $U_1$ — допустимое множество, задаваемое ограничениями задачи.

Функция $g(u_j) = 1 - \exp\left(-b_j u_j^{\alpha_j}\right)$ справа от точки перегиба

$$u_j \geq \left(\frac{\alpha_j - 1}{\alpha_j} \cdot \frac{1}{b_j}\right)^{1/\alpha_j},$$

как видно (рис. 1), является вогнутой на отрезке (выпуклом множестве)

$$U_0 = \left[\left(\frac{\alpha_j - 1}{\alpha_j} \cdot \frac{1}{b_j}\right)^{1/\alpha_j}, N\right], \tag{5}$$

где *N* — достаточно большое число. Из практических соображений нас будут интересовать значения функции Вейбулла больше

$$p_{\text{перегиба}} = 1 - \exp\left((1-\alpha)/\alpha\right).$$

Если записать функцию $f(u) = -\ln\left[1 - \exp\left(-bu^{\alpha}\right)\right]$, $g(u) = 1 - \exp\left(-bu^{\alpha}\right)$, $\varphi(z) = -\ln z$, тогда

$$f(u) = \varphi\left(g(u)\right).$$

Пусть $a = 0$, $b = \mathrm{N}$, тогда на отрезке $[a,\ b]$ функция $\varphi(z)$ выпукла и не возрастает. Область значений функции $g(u)$ при $u \in U_0$ — это отрезок $\left[p_{\text{перегиба}},\ 1-\varepsilon\right]$, который принадлежит отрезку $[a,\ b]$. Тогда справедлива следующая теорема:

> **Теорема [7, с. 193].** Если функция $\varphi(z)$ выпукла и не возрастает на отрезке [*a*, *b*], а $g(u)$ вогнута на выпуклом множестве $U_0 \subseteq R^n$, $g(u) \in [a,b]$ при $u \in U_0$, то функция $f(u) = \varphi\left(g(u)\right)$ выпукла на $U_0$.

Таким образом, имеем выпуклую задачу на выпуклом допустимом множестве $U_1 \cap U_0$.

Переменные задачи: $u_j > 0$ — невозобновимый (складируемый) ресурс, выделяемый на выполнение *j*-й работы (сюда относятся: затраченное рабочее время ресурса, материалы, комплектующие, израсходованные финансовые ресурсы, израсходованная электроэнергия). $t_j > 0$ — время (из модели выражается через независимую переменную $u_j$), *j* = 1:*n*. Размерность $\left[u_j\right] = \text{чел}_\text{j} \times \text{час}$.

Параметры задачи: $c_j > 0$ — цена единицы невозобновимого (складируемого) ресурса $u_j$ на $j$-й работе (сюда относятся: величина оклада затраченного ресурса $u_j$; расценки при сдельной работе ресурса данного разряда согласно тарифной сетке; приоритетность, важность ресурса $u$ в зависимости от работы $j$; характеристика дефицита ресурса). Показывает, что стоимость потраченного ресурса зависит еще от того, на какой из работ он потрачен. Если $c_j > 1$, то возможен перерасход средств (большие накладные расходы), в случае $c_j < 1$ – стремление к их экономии (возможен % скидки от номинальной стоимости). Размерность $\left[c_j\right] = \dfrac{\text{руб.}}{\text{чел}_\text{j} \times \text{час}}$. Таким образом, $c_j u_j$ — соответствует кумулятивной плановой стоимости запланированной работы $j = 1:n$ (Budgeted Cost of Work Scheduled — *BCWS*). Размерность $\left[c_j u_j\right] = \text{руб.}$ Безразмерные величины: параметр формы — $\alpha_j$ и показатель количества путей исходящих из вершины $j$ в конечную вершину $n$ — $d_j$. $s_j, r_j \in R_+^1$; $h_j \in R^1$ — параметры линейной аппроксимации; $s_j$ — «цена» за единицу ресурса $u_j - \left[s_j\right] = \dfrac{\text{руб.}}{\text{чел}_\text{j} \times \text{час}}$; $r_j$ — «цена» за единицу времени $t_j - \left[r_j\right] = \dfrac{\text{руб.}}{\text{час}}$. Эти параметры вводятся еще и для того, чтобы левая и правая части (2) выражались в одних единицах измерения. $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right)$ — матрица путей по вершинам сети $G(E, \Gamma)$, состоящая из единиц: $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow j \in \mu_i$. $P \in [\varepsilon,\ 1-\varepsilon]$, $\varepsilon \to +0$ заданное ограничение на показатель надежности проекта, $T > 0$ директивная продолжительность проекта. Выразив переменную $t$ через $u$:

$$t_j = \frac{-s_j}{r_j} u_j + \frac{h_j}{r_j}, \quad j = 1:n, \text{ получим задачу } \mathcal{P}.$$

$$f(u) = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j \to \inf_{u \in U}, \tag{6}$$

$$g_i(u) = \sum_{j \in \mu_i} a_{ij} \left( \frac{-s_j}{r_j} u_j + \frac{h_j}{r_j} \right) \le T, \quad i = 1:m, \tag{7}$$

$$g_{m+1}(u) = \ln P - \sum_{j=1}^{n} d_j \ln\left[1 - \exp\left(-b_j u_j^{\alpha_j}\right)\right] \le 0, \tag{8}$$

$$U = \left\{u \in U_0 :\ g_i(u) \le 0,\ i = 1:m,\ g_{m+1}(u) \le 0\right\},$$

где $P,\ T > 0$ — заданные ограничения;

$$\alpha_j,\ b_j,\ c_j,\ r_j,\ s_j \in R_+^1,\ h_j \in R^1 \quad \alpha_j \ne 1;$$

— известные коэффициенты; единицы характеристической функции системы ограничений задаются матрицей **A**=( $a_{ij}$ ); $d_j$ — натуральные числа; допустимое множество задачи $U \subset R^n$, определяемое системой ограничений (5), (7), (8) является ограниченным замкнутым выпуклым множеством из $R^n$.

Задача (5)–(8) представляет собой задачу выпуклого программирования с количеством ограничений большой размерности. Для построения глобального оптимального решения задачи с произвольной топологией сети используем концепцию релаксации (временного отбрасывания несущественных ограничений) Джоффриона [17; 32]. Изучаемая схема выглядит следующим образом [32]. Сначала решается релаксированная задача (5)–(8) с небольшим числом ограничений. Если эта задача не имеет решения, то неразрешима также исходная задача. В противном случае, если полученное оптимальное решение удовлетворяет всем оставшимся ограничениям, то имеем оптимальное решение исходной задачи. Если же какие-либо условия не выполняются, то вводятся одно или более оставшихся ограничений и процедура повторяется. Релаксация является эффективной стратегией, если известно, что относительно малое число ограничений является существенным в оптимальной точке и проявляется даже более сильно в нелинейных задачах.

## 4. Декомпозиционная процедура релаксации ограничений Джоффриона для выпуклых задач большой размерности

0. Положим $\overline{f} = -\infty$ и выберем начальное множество $R \subseteq M = \left\{i \middle| i = 1:m\right\}$ такое, что $f$ ограничено на ограничениях $P^R$.
1. Решим $P^R$. Если $P^R$ неразрешима, то неразрешима $P$. В противном случае получаем оптимальное решение $x$.
2. Если $g_i(x^R) \ge 0,\ i \in M \setminus R,\ x^R$ оптимально для исходной задачи $\mathcal{P}$.
3. В противном случае, пусть $V$ — подмножество $M \backslash R$, содержащее индексы по крайней мере одного из невыполненных ограничений. Положим $D = \left\{i \middle| g_i > 0,\ i \in R\right\}$.
4. Если $f(R) = \overline{f}$, то заменим $R$ на $R' = R \bigcup V$, вводим невыполненные ограничения $V \subseteq M \setminus R$ и возвращаемся к шагу 1.

5. Если $f(R) > \overline{f}$, то заменим $R$ на $R' = R \bigcup V \setminus D$, вводим невыполненные ограничения $V \subseteq M \setminus R$, а неактивные $D$ — выводим, заменим $\overline{f}$ на $f(x^R)$ и перейдем к шагу 1.

**Теорема [17, с. 192].** Процедура релаксации заканчивается после решения конечного числа задач $P^R$ и приводит к оптимальному решению $\mathcal{P}$, либо к построению такого множества ограничений, что текущая задача $P^R$ окажется неразрешимой.

Множество, задаваемое системой ограничений задачи $\mathcal{P}$, является ограниченным и замкнутым множеством, а целевая функция непрерывна. Поэтому задача $\mathcal{P}$ всегда разрешима. Если полученное решение удовлетворяет релаксированным ограничениям, то оно оптимально и для исходной задачи. Если ограничение нарушено, то вводится одно или более из опущенных ограничений, и процедура повторяется. В качестве начального множества $R$ можно взять непересекающиеся пути из нижних начальных вершин в верхнюю конечную узловую вершину.

## 5. Метод решения задачи $P^R$

Из (5)–(8) наглядно видно, что целевая функция и ограничения задачи представлены в виде суммы функций, каждая из которых зависит только от одной переменной. Такая задача называется задачей сепарабельного программирования [2, с. 466]. При этом в рассматриваемой задаче $\mathcal{P}$ все функции, за исключением одной — приведенной к выпуклой, являются линейными. Это выпуклое ограничение подвергается кусочно-линейной аппроксимации и мы получаем задачу ЛП. Для применения метода сепарабельного программирования требуется, чтобы в дополнение к выпуклости ограничений целевая функция была строго выпуклой [2, с. 470]. Чтобы соответствовать данному требованию, будем рассматривать в качестве целевой функции проксимальный оператор $\varphi(z,u,\alpha) = \frac{1}{2}|z-u|^2 + \alpha f(z)$, где $u$ и $\alpha$ — фиксированы, который является сильно выпуклым, а значит и строго выпуклым и также сепарабельным. Таким образом, задача решается проксимальным методом, а для решения внутренней задачи минимизации проксимального оператора на заданном допустимом выпуклом множестве, в силу указанной его специфики используется метод сепарабельного программирования.

*Проксимальный метод* используется для решения выпуклых задач минимизации:

$$f(u) \to \inf_{u \in U},$$

когда $U$ — выпуклое множество из $R^n$, функция $f(u)$ выпукла на $U$. В его основе лежит понятие проксимального оператора, который определяется следующим образом. Фиксируются точка $u \in R^n$ и число $\alpha > 0$, определяется функция

$$\varphi(z,u,\alpha) = \frac{1}{2}|z-u|^2 + \alpha f(z)$$

переменной $z \in U$, и рассматривается задача минимизации

$$\varphi(z,u,\alpha) \to \inf_{z \in U}. \tag{9}$$

Так как функция $\varphi(z,u,\alpha)$ сильно выпукла на $U$ с постоянной сильной выпуклости $\kappa = 1$, то согласно обобщению теоремы Вейерштрасса для сильно выпуклых функций [7, с. 207] задача (9) имеет — притом единственное — решение $z_* = z_*(u,\alpha)$. Тем самым определен оператор, который каждой точке $u \in R^n$ и числу $\alpha > 0$ ставит в соответствие решение $z_*$ задачи (9). Этот оператор называется проксимальным, его обозначают символом $\mathrm{pr}$. Таким образом, $\mathrm{pr}\,(u,\alpha) = z_* \in U$ — решение задачи (9).

Проксимальный метод заключается в построении последовательности $\{u_k\}$ по следующему правилу:

$$u_{k+1} = \mathrm{pr}\,(u_k, \alpha_k), \quad k = 0,\ 1,..., \tag{10}$$

где начальная точка $u_0$ и последовательность $\{\alpha_k\} > 0$ предполагаются заданными. Итерационный процесс (10) основан на известном из анализа [13] методе поиска неподвижных точек сжимающих операторов. В соответствии с определением проксимального оператора на $k$-м шаге процесса (10) для определения очередного приближения $u_{k+1}$ нужно решить задачу минимизации $P^R$ вида (9) при $u = u_k$, $\alpha = \alpha_k$:

$$\varphi(z,u,\alpha) = \frac{1}{2}|z-u|^2 + \alpha f(z) \to \inf_{z \in U^R},\ k = 0,\ 1,..., \tag{11}$$

$$U^R = \begin{cases} u \in U_0 :\ g_{i(r)}(u) \le 0,\ i(r) \in R \subseteq M = \{i \,|\, i = 1:m\}, \\ g_{m+1}(u) \le 0. \end{cases}$$

Необходимые и достаточные условия оптимальности минимума гладких функций на выпуклом множестве дает критерий оптимальности для выпуклых функций:

$$\left\langle f^{/}(u_*),\ u-u_*\right\rangle \geq 0 \quad \forall u \in U.$$

Как видно из (5), (7), (8), ограничения $U^R$ задачи (11) представлены в виде суммы функций, каждая из которых зависит только от одной переменной и при этом они являются выпуклыми. Целевая функция $\varphi(z,u,\alpha)$ задачи (11) также представлена в виде суммы функций, каждая из которых зависит только от одной переменной и при этом она является строго выпуклой. Тогда рассматриваемая задача является задачей *сепарабельного программирования*, и в [2, с. 470] доказано, что для нее можно построить аппроксимирующую задачу, которая является задачей линейного программирования, разрешимой симплекс-методом.

## Заключение

Задачи минимизации стоимости проекта и «обмена времени на стоимость» рассматриваются в пространстве переменных: «время—стоимость». Однако при этом для инновационных проектов не учитывается неопределенность получаемого результата — степени достижения заданных ТТХ разработки, которая моделируется кумулятивной вероятностью ее технического успеха. Данная вероятность безотказного исполнения работы принимается за показатель надежности работы проекта. В статье дается теоретический вывод модели показателя надежности работы в виде 2-параметрического распределения Вейбулла, который подтвержден результатами статистического анализа эмпирических данных в виде вычислительного эксперимента по имитационному моделированию ряда иллюстративных проектов. Приводится гарантированная оценка снизу для показателя надежности детерминированного проекта с конъюнктивной логикой в представлении «*Activity-on-Node*». Это дает возможность сформулировать задачу минимизации стоимости проекта большой размерности при ограничениях на показатель гарантированной надежности проекта и директивный срок его выполнения.

Метод решения полученной выпуклой задачи большой размерности состоит в использовании концепции релаксации — временного отбрасывания несущественных ограничений. То обстоятельство, что рассматриваемая задача минимизации стоимости является выпуклой, обеспечивает сходимость процедуры релаксации Джоффриона. Внутренняя релаксированная задача $P^R$ может быть решена подходящим методом выпуклой оптимизации. В статье для этого используется проксимальный метод, в котором внутренняя задача минимизации проксимального оператора является задачей сепарабельного программирования, и в [2, с. 470] доказано, что для нее можно построить аппроксимирующую задачу, которая является задачей линейного программирования, разрешимой симплекс-методом.

Предложенная модель, постановка задачи и метод ее решения могут быть использованы в библиотеке процедур разрабатываемой информационной системы планирования инновационных проектов — диалоговой интегрированной системы управления и проектирования исследований и разработок (ДИСУПИР) [29].

## Литература


1. *Арлей Н., Бух К. Р.* Введение в теорию вероятностей и математическую статистику / Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1951.
2. *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы / Пер. с англ. М.: Мир, 1982.
3. *Баркалов С. А., Бурков В. Н., Голенко-Гинзбург Д. И., Сидоренко Е. А.* Алгоритм оптимального распределения ресурсов внутри проекта // Вестник Воронежского гос. техн. ун-та. 2010. Т. 6. № 10. С. 65–67.
4. *Баркалов С. А., Бурков В. Н., Курносов В. Б., Стеганцев Д. Н.* О задаче минимизации стоимости проекта // Вестник Воронежского гос. техн. ун-та. 2010. Т. 6. № 10. С. 183–185.
5. *Богданов В. В.* Управление проектами в Microsoft Project 2003. Уч. курс. (+CD). СПб.: Питер, 2004. 604 с.
6. *Бурков В. Н., Буркова И. В.* Метод дихотомического программирования. — Теория активных систем / Труды межд. научн.-практич. конф. (17–19 ноября 2003 г., Москва, Россия) / Общ. ред. Бурков В. Н., Новиков Д. А. Том 1. С. 25–26. М.: ИПУ РАН, 2003.
7. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации: В 2 кн. Новое изд., перераб. и доп. Кн.1. М.: МЦНМО, 2011. 620 с.
8. *Воронов А. А.* Задача оптимизации по стоимости в сетевом планировании // Материалы для участников Всесоюзного семинара по большим системам. М.: Институт проблем управления, 1967.
9. *Голиков А. И., Деменчук В. М.* Оптимальное распределение ресурсов в планировании комплексов операций // А и Т. 1969. № 2.
10. *Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д.* Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965; 2-е изд., испр. и доп. М.: Книжный дом «Либроком»/ URSS, 2013.
11. *Зуховицкий С. Н., Радчик И. А.* Математические методы сетевого планирования. М.: Наука, 1965. 296 с.
12. *Калюжный Б. И., Солдатов В. С., Столяров Л. Н.* Использование человеко-машинных процедур для решения задач календарного планирования серийного производства. // В сб.: Человеко-машинные процедуры решения оперативных задач в АСУ. М.: МДНТП, 1974.
13. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004.
14. *Колосова Е. В., Новиков Д. А., Цветков А. В.* Методика освоенного объема в оперативном управлении проектами. М.: ООО «НИЦ «Апостроф», 2000. 156 с.

15. *Кофман А., Дебазей Г.* Сетевые методы планирования и их применения / Пер. с франц. М.: Прогресс, 1968.
16. *Левнер Е. В.* Параметрическая модель сетевого планирования // В кн.: Исследования по дискретной оптимизации. М.: Наука, 1976. 445 с.
17. *Лэсдон Л. С.* Оптимизация больших систем / Пер. с англ. М.: Наука, 1975. 431 с.
18. *Матулис В., Пешков В., Сурин В.* Общая схема формирования оптимизированных пятилетних планов опытно-конструкторских работ отрасли на ЭВМ // Автоматизация процессов планирования и управления. Вильнюс, 1979. № 7. С. 85–101.
19. *Модер Дж., Филипс С.* Метод сетевого планирования в организации работ. / Пер. с англ. М.; Л.: Энергия, 1966. 303 с.
20. *Один И. М.* Определение параметров распределения Вейбулла методом наименьших квадратов // Надежность и контроль качества. 1975. № 7. С. 45–48.
21. *Орлова Е. Р.* Методическое пособие по курсу «Системный анализ и управление проектами». М.: Ленанд/URSS, 2007.
22. *Поспелов Г. С., Ириков В. А.* Программно-целевое планирование и управление (Введение). М.: Сов. радио, 1976.
23. *Рубинштейн М. И.* Сетевая задача оптимизации по стоимости // А и Т. 1979. № 3.
24. *Слепцов А. И., Тыщук Т. А.* Метод нечеткого критического пути сетевого планирования и управления проектами на основе мягких вычислений // Кибернетика и системный анализ. 1999. № 3. С. 158–170.
25. *Смоляк С. А.* Оценка эффективности инвестиционных проектов в условиях риска и неопределенности. М.: Наука, 2008.
26. *Топка В. В.* Вероятностная модель планирования исследований и разработок с линейными ограничениями // А и Т. 1997. № 4. С. 232–237.
27. *Топка В. В.* Минимизация времени и стоимости при ограничении на показатель надежности в дизъюнктивной модели проекта // А и Т. 2012. № 7. С. 78–88.
28. *Топка В. В.* Планирование по критерию квадратичного отклонения при заданной оценке надежности проекта // Труды ИСА РАН. 2011. № 2. С. 12–18.
29. *Топка В. В., Воронежцев С. А.* Автоматизированная информационная система ДИСУПИР 3.1 (концепция, описание, руководство пользователя). М.: «11-й формат». 2008. 145 с.
30. *Ушаков И. А.* Курс теории надежности систем. М.: Дрофа, 2008. 240 с.
31. *Филипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей / Пер. с англ. М.: Мир, 1984.
32. *Цурков В. И.* Декомпозиция в задачах большой размерности. М.: Наука, 1983. 351 с.
33. *Чебаненко В. М.* Система тематического планирования НИОКР. М.: Экономика, 1980.
34. *Berman E. B.* Resource Allocation in a PERT Network under Continuous Activity Time Cost Functions // Manag. Sci. 1964. V. 10. № 4.
35. *Chen S.-P., Tsai M.-J.* Time-cost trade-off analysis of project networks in fuzzy environments // Europ. J. Operational Res. 2011. V. 212. P. 386–397.
36. *Dawson R. J., Dawson C. W.* Practical proposals for managing uncertainty and risk in project planning // Int. J. Project Manag. 1998. V.16, №. 5. P. 299–310.
37. *Elkjaer M.* Stochastic Budget Simulation. // Int. J. Project Manag. 2000. V. 18. №. 2. P. 139–147.
38. *Elmaghraby S. E., Pulat P. S.* Optimal project compression with due-date events // Naval Res. Logistics Quarterly. 1979. №.2. P. 331–348.
39. *Fulkerson D. R.* A Network Flow Computation for Project Cost Curves // Manag. Sci. 1961, January.
40. *Hazir Ö., Haouari M., Erel E.* Robust scheduling and robustness measures for the discrete time-cost trade-off problem // Europ. J. Operational Res. 2010. V. 207. Is. 2. P. 663–643.
41. *Huchzermeier A., Loch C. H.* Project management under risk: using the real option approach to evaluate flexibility in R&D // Manag. Sci. 2001. V. 47. № 1. P. 85–101
42. *Kelly J. E., Walker M. R.* Critical Path Planning and Scheduling, Mathematical Basis // Operations Res. 1961. May–June.
43. *Levner E. V., Nemirovsky A. S.* A network flow algorithm for just-in-time project scheduling // Europ. J. Operational Res. 1994. V.79. P. 167–175.
44. *Lichtenberg S.* New project management principles for the conception stage. Proceedings, INTERNET 88 and // J. of Project Manag. 1989. V. 7. № 1. P. 46–51.
45. *Merna T., von Storch D.* Risk management of agricultural investment in a developing country utilizing the CASPAR programme // Int. J. Project Manag. 2000. V.18. № 5. P. 349–360.
46. *Rodrigues S. B., Yamashita D. S.* An exact algorithm for resource availability costs in project scheduling // Europ. J. Operational Res. 2010. V. 206. Is. 3. P. 562–568.
47. *Szmerekovsky J. G., Venkateshan P.* An integer programming formulation for the project scheduling problem with irregular time-cost tradeoffs // Comp. & Operat. Res. 2012. V. 39. P. 1402–1410.
48. *Topka V. V.* A New Critical Path Method — Linear Relations // Proc. 17th World Congr. on Project Management, Moscow, Russia, 2003.

**Топка Владимир Владимирович.** С. н. с. ИПУ РАН. К. т. н. Окончил ФУПМ МФТИ в 1978 г. Количество печатных работ: 75. Область научных интересов: управление проектами, методы оптимизации, теория надежности. E-mail: topka3@mail.ru, topka@ipu.ru