

Численные методы

Оценивание области устойчивости систем с кубическими нелинейностями

А. И. БАРКИН

Аннотация. Представлен алгоритм вычисления области притяжения нулевого решения системы дифференциальных уравнений, содержащих устойчивую линейную часть и нелинейные элементы третьей степени. Предложен новый метод решения: метод сканирования фазового пространства. Эффективность этого метода иллюстрируется примерами.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, устойчивость, область притяжения, степенное преобразование.

Введение

Рассматривается система вида

$$\dot{x} = Ax + Bx^{[3]}, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^{[n]}$, A — постоянная устойчивая (гурвицева) матрица размера $n \times n$. Вектор $x^{[3]}$ имеет размер $m \times 1$, где $m = n(n+1)(n+2)/6$, и состоит из лексикографически упорядоченных мономов вида $\alpha_{rst}x_r x_s x_t$. Соответственно размер постоянной матрицы B равен $n \times m$. В общем случае вектор $x^{[p]}$ является степенным преобразованием [4] вектора состояния x и имеет размер $m_p \times 1$, где

$$m_p = \binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}. \quad (2)$$

Компонентами $x^{[p]}$ являются лексикографически упорядоченные мономы вида

$$\sqrt{\binom{p}{p_1} \binom{p-p_1}{p_2} \dots \binom{p-p_1-\dots-p_{n-1}}{p_n}} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n} \quad (3)$$

причем $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n p_i = p$. Свойства степенных преобразований (СП) векторов и матриц изложены в [1, 2, 4]. Краткое описание алгебры степенных преобразований приведено в Приложении.

Уравнение (1) является первым нелинейным приближением для систем вида

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

в которых правая часть обладает симметрией:

$$f(-x) = -f(x).$$

Такая симметрия часто встречается в системах автоматического управления, где регулятор должен симметрично обрабатывать возмущения разных знаков.

Известно, что система (1) в общем случае не обладает свойством устойчивости в целом. Поставим задачу оценки области притяжения этой системы по начальным условиям x_0 . Этой задаче посвящена значительная журнальная литература [3, 5, 6, 7]. Имеются приложения к экономике, биологии и управлению движущимися объектами. Ниже предлагается новый относительно простой подход, позволяющий получить довольно точные оценки при минимальном количестве параметров поиска.

1. Сканирование фазового пространства

Возьмем функцию Ляпунова в виде квадратичной формы от координат вектора состояния

$$V = x'Lx. \tag{4}$$

Дифференцируя (4), в силу (1) получим

$$\dot{V} = x'(A'L + LA)x + 2x'LBx^{[3]}. \tag{5}$$

Определим область \mathfrak{Z} фазового пространства, в которой $\dot{V} \leq 0$. Для этого удобно ввести полярные координаты $x = rv(\phi)$. Конкретный вид преобразования координат связан с порядком n системы (1). Вектор v размерности n зависит от $n-1$ угловых координат, изменяющихся на интервале $[0, 2\pi]$. Например

$$v = \begin{cases} \begin{bmatrix} \cos \phi_1 \\ \sin \phi_1 \end{bmatrix}, & \text{если } n = 2; \\ \begin{bmatrix} \cos \phi_1 \cos \phi_2 \\ \cos \phi_1 \sin \phi_2 \\ \sin \phi_1 \end{bmatrix}, & \text{если } n = 3. \end{cases} \tag{6}$$

Предлагаемый метод состоит в сканировании (просмотре) фазового пространства по угловым координатам. При малых r правая часть (5) будет отрицательной независимо от угловых координат, если взять в качестве $L = L > 0$ решение уравнения Ляпунова

$$A'L + LA = -P, \tag{7}$$

где $P = P' > 0$. Такое решение существует в силу устойчивости матрицы A . В полярных координатах имеем

$$\dot{V} = -r^2 v' P v + 2r^4 v' L B_3 v^{[3]}. \tag{8}$$

Из (8) получаем описание области \mathfrak{Z} в виде неравенства:

$$-G_0 + G_2 r^2 \leq 0, \tag{9}$$

где коэффициенты

$$G_0 = v' P v, \quad G_2 = 2v' L B_3 v^{[3]} \tag{10}$$

зависят от угловых координат и не зависят от r . Величина G_0 всегда положительна, в то время как G_2 может быть знакопеременной. Если $G_2 < 0$, то (9) удовлетворяется при любой длине радиус-вектора r . Зададим оценку границы области \mathfrak{Z} соотношением

$$r = \left(\frac{G_0}{G_2} \right)^{0,5}, \text{ если } G_2 > \Delta > 0, \text{ иначе } r = \left(\frac{G_0}{\Delta} \right)^{0,5}. \tag{11}$$

Если Δ достаточно мало, то его конкретная величина никак не влияет на окончательный результат. Перебирая угловые координаты в указанных пределах, получаем явное описание области \mathfrak{Z} .

Для отыскания области притяжения начала координат нужно вписать поверхность уровня

$$V_2 = x'Lx = \mu \tag{12}$$

в область \mathfrak{Z} . Поскольку матрица L уже определена в (7), то это можно сделать выбором μ . Вводя для (12) полярные координаты с радиус-вектором ρ , получаем

$$\rho = (\mu / v' L v)^{0,5}. \tag{13}$$

Поверхность (13) будет вписана в (11), если $\rho \leq r$ при одинаковых угловых координатах. Отсюда получаем

$$\mu = \min_{\phi} (r^2 v' L v), \tag{14}$$

где минимум берется по всем угловым координатам. При невысоком порядке уравнения (1) для нахождения минимума можно использовать простой перебор. Окончательная оценка области притяжения определяется неравенством

$$x'Lx \leq \mu. \tag{15}$$

Как видим, решение задачи зависит от выбора матрицы P , которая имеет $n(n+1)/2$ свободных параметров. Поскольку важно получить возможно больший объем эллипсоида (15), то возникает задача оптимизации:

$$tr L / \mu \rightarrow \min \tag{16}$$

при ограничении $P = P' > 0$. Эту задачу можно решить одним из вариантов симплекс-метода (метода деформируемого многогранника).

Пример 1. Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_1^2 x_2. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Область устойчивости ограничена эллипсом:

$$3.351x_1^2 - 2.172x_1x_2 + 2.354x_2^2 \leq 5.465.$$

Результаты расчетов показаны на рис. 1, где кривая 1 ограничивает область \mathfrak{Z} , а эллипс 2 является оценкой области устойчивости.

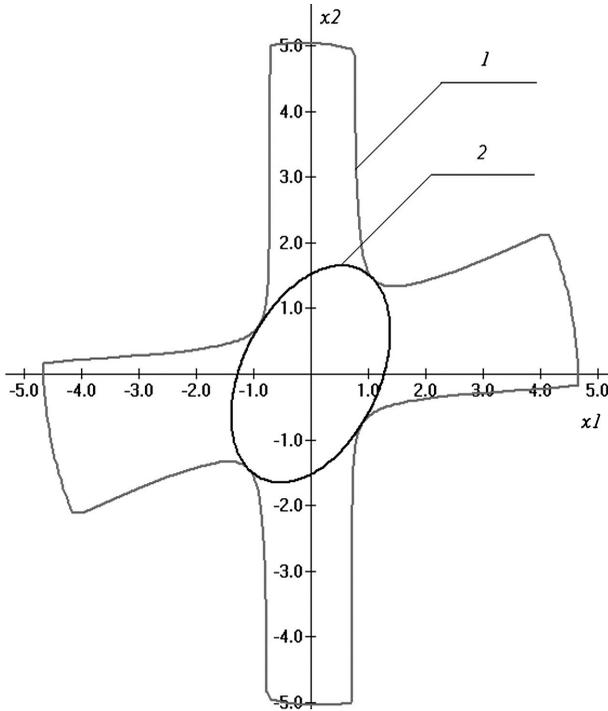


Рис. 1

Пример 2. Рассмотрим уравнение третьего порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - 3x_2 - x_3 + x_1x_3^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$

Число μ находится минимизацией по двум углам ϕ_1, ϕ_2 (в данном случае использовался двумерный перебор на интервале $[0, \pi]$). Область устойчивости описывается эллипсоидом

$$\begin{aligned} 7.5022x_1^2 + 7.669x_1x_2 + 3.076x_1x_3 + \\ + 5.794x_2^2 + 2.958x_2x_3 + 1.663x_3^2 \leq 13.943. \end{aligned}$$

На рис. 2 и рис. 3 показаны сечения области \mathfrak{S} (кривая 1) и эллипсоида устойчивости (кривая 2) плоскостями x_1, x_2 и x_1, x_3 .

2. Функция Ляпунова в виде формы четной степени

Полученные выше оценки могут оказаться недостаточно точными. Для лучшего описания области устойчивости можно использовать в качестве функций Ляпунова формы четвертой, шестой и т. д.

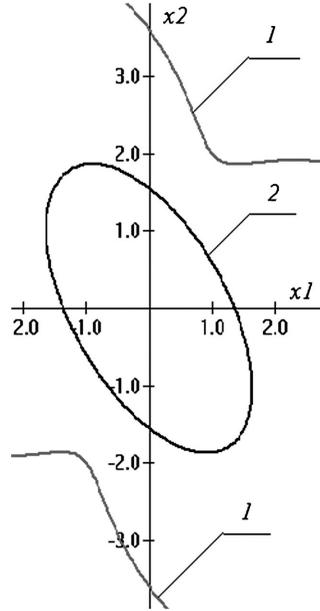


Рис. 2

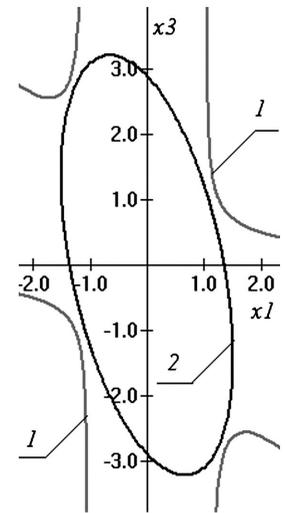


Рис. 3

степеней. Покажем, как используется метод сканирования фазового пространства на примере функции Ляпунова четвертой степени вида

$$V = x^{[2]} H x^{[2]}. \quad (19)$$

Специфика работы с формами (19) состоит в том, что произвольный вектор $y \in \mathfrak{R}^m$ не является квадратичным преобразованием от какого-нибудь вектора $x \in \mathfrak{R}^n$.

Поэтому из тождества $x^{[2]} H x^{[2]} \equiv x^{[2]} M x^{[2]}$ не следует равенство $H = M$. Но можно ввести матрицу N_m такую, что $x^{[2]} N_m x^{[2]} \equiv 0$, так что $H = M + N_m$.

Для квадратичного преобразования все матрицы N_m можно описать через кососимметричные матрицы $S = -S'$ размера $n \times n$. По свойствам степенного преобразования $(x' S x)^2 = x'^{[2]} S^{[2]} x^{[2]}$, причем $S^{[2]} = (S^{[2]})' \neq 0$.

Пусть, например, $n=2$. Тогда любая кососимметричная матрица имеет вид

$$S = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

а ее квадратичное преобразование

$$S^{[2]} = \alpha^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В данном случае все матрицы N_3 совпадают с точностью до произвольного коэффициента:

$$N_3 = \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если $n = 3$, то

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{bmatrix},$$

$$S^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha^2 & \alpha\beta\sqrt{2} & \beta^2 \\ 0 & -\alpha^2 & -\alpha\beta & 0 & \alpha\gamma & \beta\gamma \\ 0 & -\alpha\beta & -\beta^2 & -\alpha\gamma & -\beta\gamma & 0 \\ \alpha^2 & 0 & -\alpha\gamma & 0 & 0 & \gamma^2 \\ \alpha\beta\sqrt{2} & \alpha\gamma & -\beta\gamma & 0 & -\gamma^2 & 0 \\ \beta^2 & \beta\gamma & 0 & \gamma^2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и, следовательно, $N_6 = \delta S^{[2]}$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — произвольные действительные числа.

В [2, 3] показано, что применяя квадратичное преобразование к (1), получим

$$\frac{dx^{[2]}}{dt} = A_{[2]}x^{[2]} + (Bx^{[3]})_{[2]}x. \quad (19)$$

Известно свойство нижнеиндексных преобразований (см. Приложение): $a_{[2]}b = b_{[2]}a$.

Отсюда следует

$$\frac{dx^{[2]}}{dt} = A_{[2]}x^{[2]} + x_{[2]}Bx^{[3]}. \quad (20)$$

Дифференцируя функцию Ляпунова по времени в силу (20), получим

$$\frac{dV}{dt} = x'^{[2]}(A'_{[2]}H + HA_{[2]})x^{[2]} + 2x'^{[2]}Hx_{[2]}Bx^{[3]}. \quad (21)$$

Дальнейшие рассуждения повторяют изложенную выше методику сканирования фазового пространства с учетом специфики квадратичного преобразования. Выберем H как решение уравнения

$$A'_{[2]}H + HA_{[2]} + N_m + P = 0, \quad (22)$$

где $P = P' > 0$. Из-за наличия в (22) матрицы N_m это решение не обязано быть положительно определенным, однако легко показать, что $x'^{[2]}Hx^{[2]} > 0$, если $x \neq 0$.

Учитывая (22) имеем

$$\frac{dV}{dt} = -x'^{[2]}Px^{[2]} + 2x'^{[2]}Hx_{[2]}Bx^{[3]}. \quad (23)$$

Область \mathfrak{I} , в которой $dV/dt \leq 0$ определим, как и раньше, при помощи перехода к полярным коор-

динатам $x = rv(\phi)$. Граница этой области имеет вид (11), где теперь, однако,

$$G_0 = v'^{[2]}Pv^{[2]}, \quad G_2 = 2v'^{[2]}Hv_{[2]}Bv^{[3]}. \quad (24)$$

Граница области устойчивости определяется формулой

$$\rho = (\mu / v'^{[2]}Hv^{[2]})^{0.5}, \quad (25)$$

где
$$\mu = \min_{\phi} (r^2 v'^{[2]}Hv^{[2]}). \quad (26)$$

Выбор критерия оптимизации по свободным параметрам: матрице P ($m(m+1)/2$ элементов) и параметрам, входящим в N_m , не так однозначен, как ранее, поскольку в общем случае матрица H не обязана быть положительно определенной. Разумеется, можно взять $N_m = 0$ и использовать критерий $trH / \mu \rightarrow \min$ с некоторым огрублением оценок. Хорошие результаты дает применение критерия в виде отношения суммы диагональных элементов матрицы H , соответствующих четвертым степеням координат, к числу μ .

Для $n = 2$ это $(h_{11} + h_{33}) / \mu \rightarrow \min$, для $n = 3$ это $(h_{11} + h_{44} + h_{66}) / \mu \rightarrow \min$.

Пример 3. Рассмотрим использование функции Ляпунова $V = x'^{[2]}Hx^{[2]}$ к исследованию устойчивости уравнения Ван-дер-Поля (17) из примера 1.

На рис. 4 показана область фазового пространства, в которой $dV/dt \leq 0$ (кривая 1). Кривая 2 показывает оценку области притяжения, полученную по изложенному здесь методу. Область устойчивости дается неравенством:

$$1.992x_1^4 - 2.791x_1^3x_2 + 6.741x_1^2x_2^2 - 5.209x_1x_2^3 + 0.962x_2^4 \leq 13.826.$$

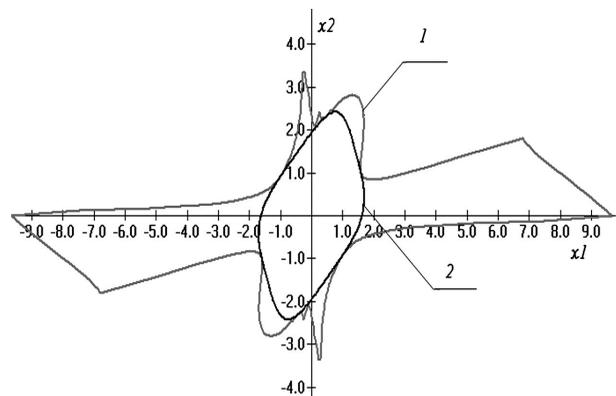


Рис. 4

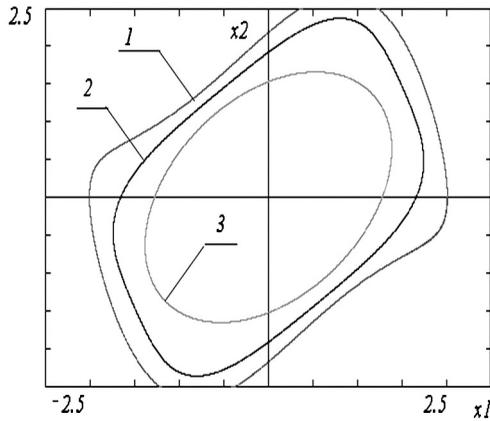


Рис. 5

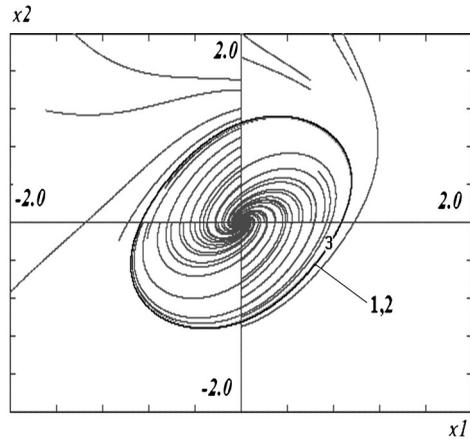


Рис. 7

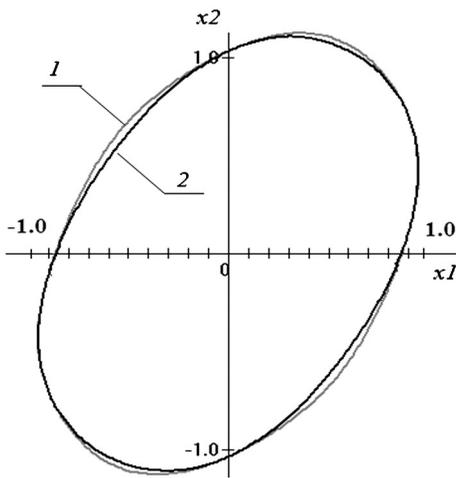


Рис. 6

На рис. 5 показано соотношение между истинной областью устойчивости (кривая 1) и ее оценкой по предложенному здесь методу (кривая 2). Для сравнения здесь же помещен эллипс из примера 1 (кривая 3).

Пример 4. Рассматривается устойчивость системы второго порядка.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + 0.5x_1^3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + 0.5\sqrt{3}x_1^2x_2 + 0.5x_2^3. \end{aligned}$$

с использованием функции Ляпунова $V = x^{[2]} H x^{[2]}$. В данном случае

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

На рис. 6 показана область \mathfrak{D} (кривая 1) и область притяжения (кривая 2).

Из рис. 7 видно, что истинная область устойчивости (кривая 1) и расчетная область устойчивости (кривая 2) практически совпадают.

Заключение

В настоящей статье предложен метод оценки области притяжения для систем, содержащих кубические элементы в правой части дифференциальных уравнений. Точность метода возрастает вместе с ростом степени используемой функции Ляпунова. Разумеется, возрастают и вычислительные трудности, особенно для систем высокого порядка.

Метод очевидным образом может быть распространен на любые системы с полиномами нечетной степени. Принципиальные трудности возникают при анализе устойчивости систем, имеющих наряду с нечетными еще и четные члены. Такие задачи требуют использования новых классов функций Ляпунова.

Приложение

Описание верхнеиндексного преобразования $x^{[p]}$ приведено во введении. Рассмотрим применение степенного преобразования к линейным уравнениям. Если задано уравнение

$$z = Ax, \tag{П1}$$

то имеем

$$z^{[p]} = A^{[p]} x^{[p]}, \tag{П2}$$

где $A^{[p]}$ — $m \times m$ -матрица.

Отметим, что элементы матрицы $A^{[p]}$ нелинейно зависят от элементов матрицы A . Известны следующие свойства преобразования $A^{[p]}$.

Пусть A, B — $n \times n$ -матрицы. Тогда:

- 1) $I_n^{[p]} = I_n$;
- 2) $(AB)^{[p]} = A^{[p]} B^{[p]}$;
- 3) $(A^q)^{[p]} = (A^{[p]})^q$, если q — целое и A^q существует;

Таблица П1

Степенные преобразования

№	Алгебраические тождества
А. Преобразования квадратных матриц	
1Г	$I_n^{[p]} = I_m$
2Г	$(AB)^{[p]} = A^{[p]}B^{[p]}$
3Г	$(A^q)^{[p]} = (A^{[p]})^q$
4Г	$(A')^{[p]} = (A^{[p]})'$
5Г	$(I_n)_{[p]} = pI_m$
6Г	$(A + B)_{[p]} = A_{[p]} + B_{[p]}$
7Г	$A'_{[p]} = (A')_{[p]}$
8Г	$(BAB^{-1})_{[p]} = B^{[p]}A_{[p]}(B^{[p]})^{-1}$
9Г	$(e^{At})^{[2]} = e^{A_{[2]}t}$
Б. Преобразования векторов (a, b – вектор-столбцы одинаковой размерности)	
10Г	$pa'ba^{[p-1]} = b'_{[p]}a^{[p]}$
11Г	$p(ab')_{[p]} = a_{[p]}b'_{[p]}$
12Г	$(a + b)_{[p]} = a_{[p]} + b_{[p]}$
13Г	$(ab')^{[p]} = a^{[p]}b'^{[p]}$
14Г	$(a'b)^p = a'^{[p]}b^{[p]}$
15Г	$a_{[p]}a^{[p-1]} = pa^{[p]}$
16Г	$a^{[p]} = \frac{1}{p!} a_{[p]}a_{[p-1]} \dots a_{[2]}a$
17Г	$a_{[p]}b_{[p-1]} = b_{[p]}a_{[p-1]}$
18Г	$(a'b)I_1 + \frac{1}{p-1} b_{[p-1]}a'_{[p-1]} = \frac{1}{p} a'_{[p]}b_{[p]}$
В. Связь преобразований матриц и векторов	
19Г	$(Ab)_{[p]}A^{[p-1]} = A^{[p]}b_{[p]}$
20Г	$(Ab)_{[p]}b^{[p-1]} = A_{[p]}b^{[p]}$
21Г	$b'_{[p]}A_{[p]} = (b'A)_{[p]} + A_{[p-1]}b'_{[p]}$

4) $(A')^{[p]} = (A^{[p]})'$.

Пусть теперь задано дифференциальное уравнение в R^n :

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{П3}$$

$$\frac{dx^{[p]}}{dt} = A_{[p]}x^{[p]}, \tag{П4}$$

где $A_{[p]}$ — некоторая $m \times m$ -матрица.

Введем нижнеиндексное преобразование вектора.

Пусть дано дифференциальное уравнение в R^n :

$$\dot{x} = b\xi(t), \tag{П5}$$

где $\xi(t)$ — скалярная функция. Применяя степенное преобразование, получаем

$$\frac{dx^{[p]}}{dt} = b_{[p]}x^{[p-1]}\xi(t), \tag{П6}$$

где $b_{[p]}$ — $m \times l$ — прямоугольная матрица,

$$l = \binom{n+p-2}{p-1},$$

которую и будем считать искомым преобразованием вектора b . Естественно принять также, что

$$(b')_{[p]} = (b_{[p]})'.$$

Литература

1. Баркин А. И. Абсолютная устойчивость систем управления. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2012. 176 с.
2. Баркин А. И., Зеленцовский А. Л., Пакин П. В. Абсолютная устойчивость детерминированных и стохастических систем управления. М.: Издательство МАИ, 1992. С. 300.
3. Баркин А. И. Вычисление области притяжения для систем с полиномиальной правой частью // Информационные технологии и вычислительные системы. 4/2013. С. 3–8.
4. Брокетт Р. У. Алгебры Ли и группы Ли в теории управления // Математические методы в теории систем / Под ред. Ю. И. Журавлева. М.: Мир, 1979. С. 174–200.
5. Каменецкий В. А. Построение областей притяжения методом функций Ляпунова // Автоматика и телемеханика. 1994. № 6. С. 10–26.
6. Chesi G., Garulli A., Tesi A. and Vicino A. LMI-based computation of optimal quadratic Lyapunov functions for odd polynomial systems // Int. J. Robust and Nonlinear Control. 2005. V. 15. P. 35–49.
7. Valmorbida G., Tarbouriech S., Garcia G. Region of attraction estimates for polynomial systems. Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference. Shanghai, P. R. China, December 16–18, 2009. P. 5947–5952.
8. Vannelli A., Vidyasagar M. Maximal Lyapunov functions and domains of attraction for polynomial differential equations // Automatica. V. 21. No. 1. P. 69–80, 1985.

Баркин Александр Иванович. Гл. н. с. ИСА РАН. Д. т. н., профессор. Окончил в 1962 г. МВТУ им. Н. Э. Баумана. Кол-во печатных работ: 40, из них 3 монографии. Область научных интересов: системы управления, устойчивость динамических систем, оптимизация. E-mail: barkin@isa.ru