Гладкий нелинейный регулятор в слабо нелинейной системе управления с коэффициентами, зависящими от состояния*

М. Г. Дмитриев, Д. А. Макаров

Аннотация. Работа посвящена задаче построения нелинейного гладкого стабилизирующего регулятора для одного класса систем управления, где коэффициенты являются слабо нелинейными функциями состояния, что выражается в наличии в правой части уравнений динамики системы так называемого малого параметра. Предложен алгоритм конструирования регулятора, позволяющий строить его в численно-аналитической форме, что существенно снижает вычислительные затраты.

Ключевые слова: *нелинейное стабилизирующее управление, малый параметр, уравнение Риккати с зависящими от состояния коэффициентами.*

Введение

Проблеме исследования устойчивости в нелинейных системах и синтеза нелинейного стабилизирующего управления уделено в литературе достаточно много внимания в связи с ее актуальностью. Вследствие различных типов нелинейности и имеющейся неопределенности возникают и различные подходы к построению стабилизирующих законов обратной связи, рациональные с той или иной точки зрения [1–4].

С середины 90-х годов прошлого века активно развиваются [3, 4] исследования в области уравнений Риккати с зависящими от состояния коэффициентами (SDRE — State Depended Riccati Equation). Развитие и применение этой техники позволяет получить достаточно общую методологию для построения субоптимальных гладких нелинейных регуляторов для нелинейных систем, коэффициенты которых также зависят от состояния (SDC — State Dependent Coefficients). Синтезированные регуляторы способны сколь угодно точно компенсировать нелинейности управляемой системы с помощью численного решения SDRE, могут строиться с учетом ограничений на управление [5] и состояние системы [6]. Однако, существенным вопросом здесь является компромисс между точностью решения и вычислительной сложностью метода.

Данная работа посвящена задаче построения стабилизирующего регулятора для одного класса систем управления, где коэффициенты являются слабо нелинейными функциями состояния, что выражается в наличии в правой части уравнений динамики системы так называемого малого параметра. При рассмотрении задач с возмущениями, которые могут быть формализованы с помощью введения малого параметра, естественно используются асимптотические методы, среди которых методы регулярных возмущений (библ. см. в [7]), методы пограничного слоя (см. [8–11]) и методы усреднения. Последние ориентированы на колебательные системы (в том числе и с быстро осциллирующими коэффициентами), и здесь отметим работы [7, 12, 13], где рассматривались задачи оптимального управления с ограничениями на управление и при этом основное внимание уделялось построению субоптимальных программных конструкций.

Новизной работы является подход к построению нелинейного регулятора в численно-аналитической форме, что особенно актуально при построении стабилизирующих регуляторов в нелинейных задачах с коэффициентами, зависящими от состояния. В последних задачах традиционные подходы построения приближенного синтеза связаны с необходимостью применения поточечного вычисления в пространстве состояний, интерполяционных процедур на полученной сетке, а также проведения различных символьных вычислений, что в реальных задачах может потребовать больших вычислительных ресурсов.

1. Постановка задачи

Будем рассматривать управляемую систему на полуоси с линейно входящим управлением, где коэффициенты могут быть зависимыми от состояния

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00692).

$$\frac{dx}{dt} = \left(A_0 + \varepsilon A_1(x)\right)x + \left(B_0 + \varepsilon B_1(x)\right)u,\ \ x(0) = x^0, \quad x \in X \subset \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r, t \in \left[0, \infty\right), 0 < \varepsilon << 1, \tag{1.1}$$

где $A_0, A_1(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $B_0, B_1(x) \in \mathbb{R}^{n\times r}$ и при этом все элементы A_1 и B_1 достаточно гладкие функции своих аргументов, X — некоторое ограниченное множество пространства состояний системы.

Требуется построить такое управление $u(x,\varepsilon)$ для некоторой области изменения ε, что траектория замкнутой системы (1.1) будет асимптотически стремиться к нулю, т. е. $x \to 0$ при $t \to \infty$.

2. Конструирование регулятора в слабо возмущенной нелинейной системе

Произвольная нелинейная по состоянию и линейная по управлению система может быть представлена [4] бесчисленным числом систем вида (1.1).

Далее будем рассматривать те представления, которые удовлетворяют ряду требований.

I. Пусть $A_1(x), B_1(x)$ равномерно ограничены по x и в области $G_\varepsilon = \{x \in X, 0 \le t < \infty, 0 < \varepsilon \le \varepsilon_o\}$, где ε_o — некоторое достаточно малое положительное число.

Будем рассматривать два вида управления, первый линейный —

$$u_0(x) = L_0 x, \tag{2.1}$$

а второй, квазилинейный —

$$u_1(x,\varepsilon) = (L_0 + \varepsilon L_1(x))x, \tag{2.2}$$

где L_0, $L_1(x)$ — некоторые постоянная и переменная матрицы соответственно.

Замкнутая система (1.1) вдоль управления $u_1(x,\varepsilon)$ имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = [A(x,\varepsilon)x + B(x,\varepsilon)(L_0 + \varepsilon L_1(x)]x = F(x,\varepsilon)x,$$

$$x(0) = x^0. \tag{2.3}$$

Далее займемся построением алгоритма определения матриц, входящих в регулятор (2.2).

Сначала на матрицы A_0, B_0 наложим условие управляемости, т. е. потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\textbf{II.} \qquad rank\left[B_0, A_0 B_0, \ldots, A_0^{n-1} B_0\right] = n. \tag{2.4}$$

Теперь конкретизируем выбор матрицы Q_0. Пусть положительно полуопределенная матрица Q_0 подбирается так, что пара постоянных матриц $\{A_0, Q_0^{\frac{1}{2}}\}$ будет являться наблюдаемой парой, т. е. будет выполняется ранговый критерий

$$\textbf{III.} \qquad rank\left[Q_0^{\frac{1}{2}}, A_0 Q_0^{\frac{1}{2}}, \ldots, A_0^{n-1} Q_0^{\frac{1}{2}}\right] = n.$$

Нетрудно видеть, что такой подбор Q_0 приводит нас в нулевом приближении ($\varepsilon = 0$) к вариационной трактовке главной части конструируемого стабилизирующего регулятора, а именно, этот регулятор можно определять, задавая еще одну постоянную положительно определенную матрицу $R_0 \in \mathbb{R}^{r\times r}$ и решая следующую задачу оптимальной стабилизации

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x^T Q_0 x + u^T R_0 u)dt \to \min, \quad \frac{dx}{dt} = A_0 x + B_0 u, \quad x(0) = x^0. \tag{2.5}$$

Решение этой классической задачи имеет вид $u(x) = -R_0^{-1} B_0^T K_0 x$, где матрица K_0 есть положительное определенное решение матричного алгебраического уравнения Риккати

$$-K_0 A_0 - A_0^T K_0 + K_0 S_0 K_0 - Q_0 = 0, \tag{2.6}$$

в котором $S_0 = B_0 R_0^{-1} B_0^T$. Тогда в замкнутой системе для задачи (2.6)

$$\frac{dx}{dt} = (A_0 - S_0 K_0)x$$

при условиях II, III нулевое положение равновесия является асимптотически устойчивым по Ляпунову, так как $\mathrm{Re}\,\lambda(A_0 - S_0 K_0) < 0$.

Итак, полагая

$$L_0 = -R_0^{-1} B_0^T K_0, \tag{2.7}$$

мы получаем дополнительно вариационную трактовку для регулятора $u_0(x)$ из (2.1).

Рассуждая аналогично при выборе матрицы $L_1(x)$, которая, с одной стороны, должна выбираться из стремления учесть возмущения $A_1(x), B_1(x)$ в коэффициентах системы, а с другой — придать этой поправке некоторый рациональный смысл, будем выбирать $L_1(x)$ так, чтобы итоговый регулятор (2.2) был формально оптимальным в следующей задаче

$$
\begin{aligned}
&I(u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x^T Q(x,\varepsilon)x + u^T R(x,\varepsilon)u)dt \to \min,\\
&\frac{dx}{dt} = \left(A_0 + \varepsilon A_1(x)\right)x + \left(B_0 + \varepsilon B_1(x)\right)u,
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

где матрицы $Q(x,\varepsilon)$ и $R(x,\varepsilon)$ строятся специальным образом.

Предлагаемый здесь алгоритм построения стабилизирующего управления в задаче (1.1) перекликается с подходом SDRE, в котором предполагается, что в линейно-квадратичной задаче построения оптимального линейного синтеза коэффициенты могут зависеть от переменных состояния и поэтому в ряде случаев возможно сохранение алгоритма построения оптимального синтеза путем рассмотрения соответствующего алгебраического уравнения Риккати, где матрицы коэффициентов также зависят от переменных состояния.

Такой подход в последние годы развивался многими авторами (библ. см. в [4], а также в [1, 2]), привел к расширению области применения теории Калмана—Летова—Лурье [15] и позволил построить новые нелинейные робастные регуляторы на основе решения SDRE.

Будем искать стабилизирующий регулятор в задаче (2.8) на основе формального решения матричного алгебраического уравнения Риккати

$$
\begin{aligned}
&-K(x,\varepsilon)A(x,\varepsilon) - A^T(x,\varepsilon)K(x,\varepsilon) + \\
&+K(x,\varepsilon)S(x,\varepsilon)K(x,\varepsilon) - Q(x,\varepsilon) = 0,
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

где

$$S(x,\varepsilon) = B(x,\varepsilon)R^{-1}(x,\varepsilon)B^T(x,\varepsilon),$$

$$A(x,\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1(x),\ \ B(x,\varepsilon) = B_0 + \varepsilon B_1(x),$$

и матрицы R, Q должны подбираться так, чтобы при каждом $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ уравнение (2.9) имело решение — положительно определенную матрицу $K(x,\varepsilon)$. Уравнение (2.9) связано с условиями оптимальности в задаче 4, но мы здесь его используем как эвристическую конструкцию. Формально оптимальный регулятор в (2.8) можно искать [4] в виде

$$u(x,\varepsilon) = -R^{-1}(x,\varepsilon)B^T(x,\varepsilon)K(x,\varepsilon). \tag{2.10}$$

При $\varepsilon = 0$ из (2.10) получается матричное уравнение Риккати, которое в условиях II, III имеет положительно определенное решение $K_0 > 0$. Считая, что $R(x,\varepsilon) = R_0 > 0$ — постоянная матрица, а

$$Q = Q_0 + \varepsilon Q_1(x) + \ldots, \tag{2.11}$$

где слагаемые в (2.11), вообще говоря, положительно полуопределенные матрицы, будем искать матрицу коэффициентов усиления $K(x,\varepsilon)$ в виде первых двух членов формального ряда по $\varepsilon > 0$

$$K(x,\varepsilon) = K_0 + \varepsilon K_1(x). \tag{2.12}$$

Подставляя (2.12) в (2.9) и учитывая (1.1), получаем в силу специфики оператора в (2.9) конечное разложение

$$
\begin{aligned}
&0 = \left[-K_0A_0 - A_0^TK_0 + K_0B_0R^{-1}B_0^TK_0 - Q_0\right] + \\
&+\varepsilon\Big[-K_0A_1 - A_1^TK_0 - K_1A_0 - A_0^TK_1 + \\
&+K_1B_0R^{-1}B_0^TK_0 + K_0B_1R^{-1}B_0^TK_0 + \\
&+K_0B_0R^{-1}B_1^TK_0 + K_0B_0R^{-1}B_0^TK_1 - Q_1\Big] + \\
&+\varepsilon^2\Big[-K_1A_1 - A_1^TK_1 + K_1B_1R^{-1}B_0^TK_0 + \\
&+K_1B_0R^{-1}B_1^TK_0 + K_1B_0R^{-1}B_0^TK_1 + \\
&+K_0B_1R^{-1}B_1^TK_0 + \\
&+K_0B_1R^{-1}B_0^TK_1 + K_0B_0R^{-1}B_1^TK_1 - Q_2\Big] + \\
&+\varepsilon^3[K_1B_1R^{-1}B_1^TK_0 + K_1B_0R^{-1}B_1^TK_1 + \\
&+K_1B_1R^{-1}B_0^TK_1 + K_0B_1R^{-1}B_1^TK_1 - Q_3] + \\
&+\varepsilon^4\left[K_1B_1R^{-1}B_1^TK_1 - Q_4\right].
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

Приравнивая в (2.13) члены при одинаковых степенях ε нулю, получим систему матричных уравнений для определения членов в (2.12)

$$\varepsilon^0:\ \ -K_0A_0 - A_0^TK_0 + K_0S_0K_0 - Q_0 = 0, \tag{2.14}$$

$$\varepsilon^1: -K_1(A_0 - S_0K_0) - (A_0 - S_0K_0)^TK_1 - 2Q_1(x) = 0. \tag{2.15}$$

где $S_0 = B_0R^{-1}B_0^T$, а $Q_1(x)$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
&Q_1(x) = K_0\left(A_1(x) - S_{10}(x)K_0\right) + \\
&+\left(A_1(x) - S_{10}(x)K_0\right)^TK_0,
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

здесь

$$
\begin{aligned}
&S_{10}(x) = B_1(x)R^{-1}B_0^T,\\
&S_{01}(x) = B_0(x)R^{-1}B_1^T,\\
&S_{01}^T(x) = S_{10}(x).
\end{aligned}
$$

Так как спектр постоянной матрицы $A_0 - S_0K_0$ находится в левой полуплоскости, то из (2.15) единственным образом будет находиться $K_1(x) > 0$, если матрица $Q_1(x)$, являющаяся функцией известных величин, при каждом $x \in X$ будет положительно определенной.

Итак, введем условие

IV. Матрица $Q_1(x) > 0$ при каждом $x \in X$.

Рассмотрим симметрические матрицы

$$
\begin{aligned}
Q_2 = {} & -K_1 A_1 - A_1^T K_1 + K_1 B_1 R^{-1} B_0^T K_0 + K \\
& {}+_1 B_0 R^{-1} B_1^T K_0 + \\
& +K_1 B_0 R^{-1} B_0^T K_1 + K_0 B_1 R^{-1} B_1^T K_0 + \\
& +K_0 B_1 R^{-1} B_0^T K_1 + K_0 B_0 R^{-1} B_1^T K_1, \qquad (2.17) \\
Q_3 = {} & K_1 B_1 R^{-1} B_1^T K_0 + K_1 B_0 R^{-1} B_1^T K_1 + \\
& +K_1 B_1 R^{-1} B_0^T K_1 + K_0 B_1 R^{-1} B_1^T K_1. \\
Q_4 = {} & K_1 B_1 R^{-1} B_1^T K_1.
\end{aligned}
$$

Отметим, что $Q_4(x) \ge 0$, а знакоопределенность $Q_2(x), Q_3(x)$ не гарантируется.

Очевидно, теперь имеет место

Теорема 1. Если выполняются условия II–IV, положительно определенные матрицы $K_0, K_1(x)$ являются решениями уравнений (2.14)–(2.13), где $Q_1(x) > 0$ определяется из (2.16), а матрицы Q_i, $i = 2,3,4$ определяются из (2.17), тогда (2.12) является единственным положительно определенным решением (2.13) в X при $\varepsilon > 0$.

Заметим, что матрицы в (2.17) симметрические. Поэтому при достаточно малых $\varepsilon > 0$ матрица $Q(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{4} \varepsilon^i Q_i$ будет положительно определенной, т. к. $Q_0 \ge 0,\ Q_1(x) > 0$.

Введем условие

V. Пары матриц

$$\{A(x,\varepsilon), B(x,\varepsilon)\} \text{ и } \{A(x,\varepsilon), Q(x,\varepsilon)\}$$

управляемы и наблюдаемы соответственно при каждом $x \in X$.

Теперь при условиях I – V можно воспользоваться результатами работы [16], согласно которым имеет место локальная асимптотическая устойчивость в замкнутой системе (1.1), (2.10), (2.12). Итак, имеет место

Теорема 2. При условиях I – V в системе (1.1) управление (2.10), (2.12) обеспечивает локальную асимптотическую устойчивость тривиального положения равновесия.

Замечание 1. Если $Q_1(x)$ имеет аналитическое представление, тогда появляется возможность получения приближенной аналитической зависимости регулятора $u(x)$ от переменных состояния, что резко уменьшает объем вычислений по сравнению с применением традиционных интерполяционных процедур, которые используют сетку в пространстве состояний [4].

Если $Q_1(x)$, задаваемая (2.16), является положительно определенной матрицей при каждом $x \in X$, то имеет место [17], следующее аналитическое выражение

$$
\begin{aligned}
& K_1(x) = \\
& = \lim_{T_{\text{fin}} \to \infty} 2 \int_0^{T_{\text{fin}}} \exp((A_0 - S_0 K_0)^{\mathrm{T}} \sigma) Q_1(x) \exp((A_0 - S_0 K_0)\sigma) d\sigma.
\end{aligned} \qquad (2.18)
$$

Таким образом, получен следующий аналитико-численный алгоритм построения нелинейного управления вида (2.10), (2.12) для системы (1.1):

1) Задаем постоянную положительно полуопределенную матрицу Q_0, проверяем условия II, III.
2) Находим положительно определенное решение K_0 матричного уравнения (2.6).
3) Подбираем, если это возможно, матрицу $R > 0$ так, чтобы матрица

$$Q_1(x) = -K_0\left(A_1(x) - S_{10}K_0\right) - \left(A_1(x) - S_{10}K_0\right)^T K_0$$

являлась положительно определенной.

4) На основе представления (2.18) находим сколь угодно точное значение $K_1(x)$.
5) Используя формулы (2.11), (2.16), (2.17), вычисляем и проверяем условие V.
6) Искомое стабилизирующее управление имеет вид (2.10), (2.12).

Замечание 2. В общем случае, не задавая Q_i, $i = 2,3,4$ по формулам (2.16)–(2.17), можно, как обычно, в асимптотическом анализе, установить существование точного положительно определенного решения матричного уравнения (2.9) в окрестности $K_0 + \varepsilon K_1(x) > 0$ и установить оценку асимптотического представления (2.12) вида

$$\left\| K(x,\varepsilon) - (K_0 + \varepsilon K_1(x)) \right\| = O(\varepsilon^2),$$

используя вариант метода последовательных приближений нахождения неявной функции [18].

3. Численный эксперимент

Рассмотрим построение регулятора в слабо нелинейной системе

$$\frac{dx}{dt} = A(x,\varepsilon)x + B(x,\varepsilon)u, \quad 0 < \varepsilon << 1,$$

$$A(x,\varepsilon) = \begin{bmatrix} \varepsilon\left(-0.6x_1(t)^2 - 7.2 - 0.27x_2(t)^2\right) & 0.9 + \varepsilon\left(-17.07 - 1.71x_1(t)^2\right) \\ a_1 + \varepsilon\left(0.29b_2\left(x_1(t) + x_2(t)\right)^2 + 4x_1(t)^2 + 39.21 + 0.09x_2(t)^2\right) & \varepsilon 0.87b_2\left(x_1(t) + x_2(t)\right)^2 \end{bmatrix},$$

$$B(x,\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + \varepsilon b_2\left(x_1(t) + x_2(t)\right)^2 \end{bmatrix}, \quad a_1 = -\sqrt{2}, \quad b_2 = 1.$$

Как уже отмечалось, для систем размерности два и более существует бесконечное число способов представления в виде (1.1). Пусть рассматриваемая система имеет следующие элементы этого представления

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0.9 \\ a_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2\left(x_1(t) + x_2(t)\right)^2 \end{bmatrix},$$

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} -0.6x_1(t)^2 - 7.2 - 0.27x_2(t)^2 & -17.07 - 1.71x_1(t)^2 \\ 0.29b_2\left(x_1(t) + x_2(t)\right)^2 + 4x_1(t)^2 + 39.21 + 0.09x_2(t)^2 & 0.87b_2\left(x_1(t) + x_2(t)\right)^2 \end{bmatrix}. \qquad (3.1)$$

Поскольку формально считаем, что $0 < \varepsilon << 1$, при синтезе управления (2.12) ограничимся лишь первыми членами разложения (2.13), а именно — (2.14) и (2.15). При этом $Q_1(x)$ будем находить из (2.16).

Положим

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 2. \qquad (3.2)$$

Тогда решая численно (2.6) и учитывая (3.1) и (3.2), находим K_0

$$K_0 = \begin{bmatrix} 1.942 & 0.293 \\ 0.293 & 0.874 \end{bmatrix} > 0. \qquad (3,3)$$

Из (2.16) имеем

$$Q_1(x(t)) = \begin{bmatrix} x_2(t)^2 + 5 & 1 \\ 1 & x_1(t)^2 + 10 \end{bmatrix} > 0. \qquad (3.4)$$

Теперь, используя (2.18), получаем численную процедуру для сколь угодно точного вычисления матрицы K_1, обращающей член при ε^1 из (2.13), т. е. (2.15), в тождественный нуль. В качестве верхнего предела несобственного интеграла в (2.18) использовалось время $T_{\text{fin}} = 100$ с. На рисунке 1 представлены переходные процессы для замкнутых систем (1.1), (3.1), (2.10), (2.12) для двух управляющих воздействий: линейного управления $u_0(x)$ (координаты x_1^{u0}, x_2^{u0}) и нелинейного управления $u_1(x)$ с $K_1(x)$ (координаты x_1^{u1}, x_2^{u1}), вычисляемого с помощью (2.18), (3.4). Начальные условия и параметр задавались следующим образом:

$$x_1^{u0} = x_2^{u0} = x_1^{u1} = x_2^{u1} = 1, \varepsilon = 0.1.$$

Как видно, оба построенных управления являются стабилизирующими. При этом управление u_1 благодаря учету нелинейностей в исходной системе показывает лучшее качество переходных процессов.

На рис. 2 представлены переходные процессы системы (1.1), (3.1) с параметром $\varepsilon = 1$ и теми же управлениями u_0 и u_1, а также при наличии аддитивных возмущений $\begin{bmatrix} \sin(10 \cdot t) & 0 \\ 0 & \cos(15 \cdot t) \end{bmatrix}$ в коэффициентах матрицы $A_1(x)$.

Очевидно, что работоспособность нелинейного управления u_1, построенного с помощью предложенного подхода, сохраняется и в этом случае, т. е. когда параметр ε равен единице и присутствуют аддитивные возмущения в коэффициентах матрицы исходной системы. Кроме того, превосходство u_1 над u_0 в качестве переходных процессов стало еще

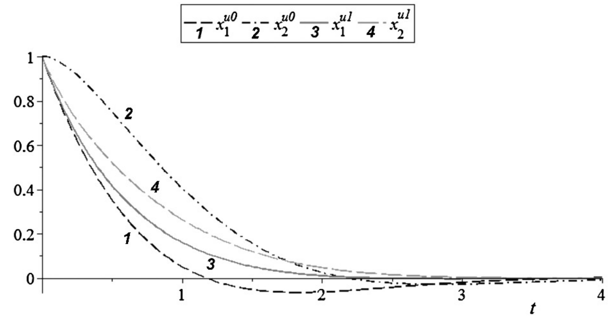

Рис. 1. Переходные процессы систем

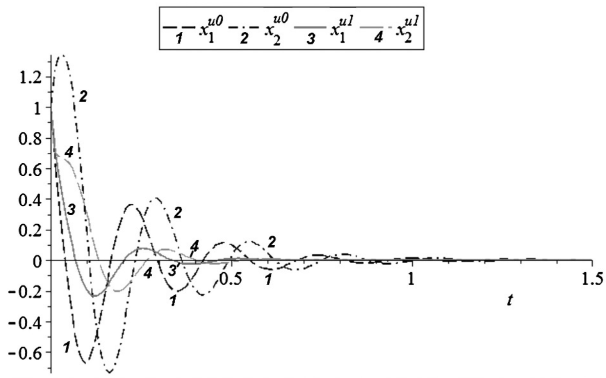

Рис. 2. Переходные процессы систем при наличии возмущений в $A_1(x)$ и $\varepsilon = 1$

заметнее: x_1^{u1}, x_2^{u1} обладают в два с лишним раза меньшим перерегулированием и значительно меньшим временем вхождения в окрестность положения равновесия по сравнению с x_1^{u0}, x_2^{u0}. Отметим также, что оба регулятора обладают робастностью по отношению к указанным возмущениям.

Заключение

В работе предложен подход к построению нелинейного гладкого стабилизирующего управления для одного класса нелинейных систем, где коэффициенты являются слабо нелинейными функциями состояния. Предложенная техника базируется на выделение в системе малого параметра в правых частях уравнения динамики исходной системы и приближенном решении уравнения Риккати с зависящими от состояния коэффициентами. Получены численно-аналитической форма для синтеза регулятора и условия локальной асимптотической устойчивости соответствующей замкнутой системы. Проведенное численное моделирование демонстрирует работоспособность и эффективность предложенного подхода.

Литература

1. *Афанасьев В. Н.* Управление неопределенными динамическими объектами. М.: Физматлит, 2008. 208 с.
2. *Афанасьев В. Н.* Концепция гарантированного управления неопределенными объектами // Известия РАН: Теория и системы управления. 2010. № 1. С. 24–37.
3. *Mracek C. P., Cloutier J. R.* Control designs for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent Riccati equation method // International Journal of robust and nonlinear control. 1998. V. 8. №. 4–5. P. 401–433.
4. *Cimen T.* State dependent Riccati Equation (SDRE) control: A Survey // Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control. Seoul, Korea, July 6–11. 2008. P. 3761–3775.
5. *Cloutier J. R., Stansbery D. T.* Dynamic conversion of flight path angle commands to body attitude commands // Proceedings of the American Control Conference. 2002. P. 221–225.
6. *Cloutier J. R., Cockburn J. C.* The state-dependent nonlinear regulator with state constraints // Proceedings of American Control Conference. 2001. V. 1. P. 390–395.
7. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
8. *Васильева А. Б., Дмитриев М. Г.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техники. Серия «Математический анализ». 1982. Т. 20. С. 3–77.
9. *Saksena V. R., O'Reilly J., Kokotovic P. V.* Singular perturbations and time-scale methods in control theory: survey 1976–1983 // Automatica. 1984. V. 20. P. 273–293.
10. *Дмитриев М. Г.* Теория сингулярных возмущений и некоторые задачи оптимального управления // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 10. С. 1693–1698.
11. *Дмитриев М. Г., Курина Г. А.* Сингулярные возмущения в задачах управления. Обзор 1982–2004 гг. // АиТ. 2006. № 1. С. 3–53.
12. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. Одесса: Лыбидь, 1992. 188 с.
13. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. И.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью: Асимптотические методы. Одесса: Изд-во «Астро-принт», 1999. 356 с.
14. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: URSS, 2004. 552 с.
15. *Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Математическое конструирование систем управления. М.: Высш. шк., 2003. 614 с.
16. *Mracek C. P., Cloutier J. R.* Control design for the nonlinear benchmark problem via the state-depended Riccati equation method // International Journal of robust and Nonlinear Control. 1998. V. 8. P. 401–433.
17. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 352 с.
18. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1993. 440 с.

Дмитриев Михаил Геннадьевич. Гл. н. с. ИСА РАН. Д. ф.-м. н., профессор НИУ ВШЭ. Окончил в 1969 г. Днепропетровский ГУ. Количество печатных работ: более 200 (в т. ч. 2 монографии). Область научных интересов: математическое моделирование, сингулярные возмущения, оптимальное управление, системный анализ. E-mail: mdmitriev@mail.ru

Макаров Дмитрий Александрович. Инженер-исследователь ИСА РАН. К. ф.-м. н. Окончил в 2008 г. Рыбинскую государственную авиационную технологическую академию им. П. А. Соловьева. Количество печатных работ: 15. Область научных интересов: управление сложными динамическими системами, робастные методы устойчивости и стабилизируемости, искусственный интеллект, экспертные системы. E-mail: makarov@isa.ru